普通高等教育“十五”国家级规划教材

材料力学（I）

第四版

孙训方　方孝淑　关来泰　编

孙训方　胡增强　修订



高等教育出版社

Mechanics of Materials (I)

ISBN 7-04-011072-5

9 787040 110722 >

定价：28.90元

普通高等教育“十五”国家级规划教材

材料力学(I)

第四版

孙训方　方孝淑　关来泰　编

孙训方　胡增强　修订

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

材料力学(Ⅰ)/孙训方　方孝淑　关来泰编．—四版．
北京:高等教育出版社,2002．8
普通高等教育"十五"国家级规划教材
ISBN 7-04-011072-5

Ⅰ．材…　Ⅱ．①孙…②方…③关…　Ⅲ．材料
力学-高等学校-教材　Ⅳ．TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 044353 号

材料力学(Ⅰ)第四版
孙训方　方孝淑　关来泰　编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010　64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京中科印刷有限公司		
		版　　次	1982 年 1 月第 1 版
开　　本	787×960　16		2002 年 8 月第 4 版
印　　张	25.25	印　　次	2002 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	460 000	定　　价	28.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

第一版序言

本书是根据一九七七年十一月教育部委托召开的高等学校工科基础课力学教材会议上讨论的土建类专业多学时类型的《材料力学》教材编写大纲编写的。同时，在内容上也适当地照顾到其他专业的需要，因此，只需将引例和例题略加增删或改动，并对个别专题的内容加以补充，本书也可用作其他专业多学时类型《材料力学》课程的试用教材。

在本书的基本部分中，较多地引用了一九六四——一九六五年孙训方、方孝淑、陆耀洪编写的《材料力学》一书的有关内容，但按上述编写大纲的要求和一些兄弟院校材料力学教师的意见，作了必要的增删和修改。例如删去了动荷载一章，而将其主要内容作为例题安排在第二、三、五等章中，这样既可使读者从基本变形形式开始就接触到动荷载问题，又能及时将基本变形形式中的能量概念用于计算，以加深对能量方法的理解。此外，在对问题的分析方面还作了必要的充实，并增加了较多的例题。在各章后附上了习题，习题答案在附录中给出。这样的安排都是为使本书更便于自学。

本书除了对基本变形形式下的内力分析、应力计算公式的推导及其适用的条件性，以及位移计算中的边界条件等特别给以重视外，还对稳定性的概念、临界力公式的推导、能量原理的基本概念和方法等都予以加强。对于单元体和应力状态、变形能、叠加原理等概念和方法则分散在有关各章中逐步引出概念，并通过例题、习题加以应用，以收到反复巩固的功效。编者希望通过这样的处理，使材料力学中的主要内容能使读者切实学到手。断裂力学作为常规强度计算的补充，近年来有了很大的发展。本书用专章着重介绍了线弹性断裂力学的一些基本原理和简单的应用，这些都是断裂力学的重要基础。至于对线弹性断裂力学的进一步研究以及弹塑性断裂力学的内容，就只能由专门的课程来介绍了。

本书对于一些次要内容的处理办法是：在属于次要内容的章节前加上 * 号或将其安排在例题中，这样做可便于教师的取舍。由于材料力学内容较为丰富，专业要求又不尽相同，建议教师在使用本书时，根据专业的特点选用有关的章节进行教学。对于有些专业，限于学时的安排，也可以把主要精力放在基本部分上，而将专题部分作为选修的内容。

本书的字符和下标尽量保持与我国现行的有关手册和规范中所采用者一致。至于各种量的单位则主要以国际制单位为准，在少数插图中由于原始资料不便改动，仍保留了原有的公制单位。本书还附有一些主要常用量的公制单位

与国际制单位的换算表，以便查用。

在本书编写过程中，西南交通大学、大连工学院和南京工学院三校的领导同志给予了大力支持。担任本教材主审的武汉水利电力学院粟一凡同志以及参加审稿会的武汉水利电力学院、成都科学技术大学、哈尔滨工业大学、华东水利学院、西安冶金建筑学院、江西工学院、重庆建筑工程学院、天津大学、同济大学、北京工业大学、太原工学院、清华大学、北京建筑工程学院和西南交通大学、大连工学院、南京工学院等院校的代表对本书的初稿提供了宝贵的意见。西南交通大学材料力学教研室奚绍中同志等对本书初稿特别是其中的例题及习题进行了校阅和修改，并提出了不少建设性的建议。三院校材料力学教研室的同志对本书的插图和例题、习题解答等方面都做了大量工作。这些对本书的定稿都起了很大的作用，这里一并致谢。

限于编者的水平，本书一定存在不少缺点和不妥之处，希望广大教师和读者在使用本书后给我们提出宝贵的意见，以便今后改进。

编　者

一九七九年二月

第二版序言

这本教材问世以来，经很多学校采用为教科书，出版社曾要求此书的编者们，根据当前的教育改革形势，对该书进行一次全面的修订。但修订本要在一两年后才能付印，而原书的纸型已不能再用。为了满足各校对此书的需要，出版社只好将原书重新排版印刷。

根据近年来使用这本教材的师生们反映，原书第十四章，线弹性断裂力学基础，不可能在现行教学计划所规定的学时数内讲授，而作为选修课程的断裂力学基础，近年来已有很多教本可供选用。因此，利用这次重新排版的机会，将原书第十四章及与之有关的附录6“常用应力强度因子表”，一并删去。同时，将低应力脆断·断裂韧度作为材料的力学性能，以§13－10的形式写进第十三章中。此外，还对原书特别是下册中的部分内容作了一些更动；对原书中排版的不当处也尽量作了更正。

希望采用这本教材的广大教师和读者在使用此重排本后能继续给我们提出宝贵意见，在本书修订时加以改进。

编　者

一九八六年七月

第三版序言

这套教材的第一版于1979年4月出版，第二版于1987年4月出版。在第二版中主要删去了断裂力学基础一章，其余仅作了少量的修改和勘误。在本书十多年的使用过程中，国家教委制订了“材料力学课程教学基本要求”，国家颁布了新版的“钢结构设计规范”、“木结构设计规范”等。因此，本书的一些内容已不太适应目前的教学需要。在广泛征求工科院校材料力学教师意见的基础上，编者于1991年6月开始对第二版进行修订。为了维持原书的特色，并避免相邻两版间的突变，第三版主要作了如下工作：

1. 弯曲问题中有些属于进一步研究的内容，集中起来另立一章。这样便于教师根据教学要求选用，可以完全不讲，也可以选讲其中的部分节、段。为此，该章中各节均加上 * 号。

2. 剪切与连接件的计算独立成章，并安排在拉压、扭转、弯曲变形各章之后，以便讲授受扭和受弯构件连接部分的计算。

3. 在强度理论一章中，编入了我国学者首创的双剪应力强度理论。由于该理论目前正在进一步发展，并尚未纳入有关规范，因而，本书主要介绍该理论的基本原理及依据，并给出相应的强度判据。对其适用范围则未详加讨论。

4. 压杆稳定分成两章。前一章属于基本要求的内容，原书中的压杆稳定系数表及有关曲线，以新版的钢结构和木结构设计规范中的稳定系数表和计算公式代替。当然，在引用有关设计规范时，以有代表性的材料(如Q235钢①)为限，主要给初学者一个概念。后一章是压杆稳定问题的进一步研究，以及其他弹性稳定问题的简介。这些内容对于理解弹性失稳的物理实质及拓宽知识面是很有好处的，供教师和学生选用。因而，该章的各节均加上 * 号。

5. 在能量方法一章中，把重点放在应变能概念和卡氏定理及其应用上，而把虚功原理及单位力法放在后面，并加上 * 号。这主要是考虑与后续的结构力学课程相衔接。对于无结构力学课程的专业，可仍以虚功原理和单位力法为主。

6. 有关动荷载的内容从基本变形的各章中集中起来，并与交变应力合并编为一章，主要是有利于教学安排。对于疲劳破坏与疲劳强度的内容作了较大的改动，并以新版钢结构设计规范中的构件疲劳折减系数表，代替了原来的疲劳折减系数曲线和公式，以加强与钢结构中疲劳计算方法间的联系。

---

① Q235钢是国家标准GB 700—1988的钢牌号，相当于旧标准钢牌号的A3钢。

7. 实验应力分析与理论分析计算相辅相成，在材料力学课程中均安排了一定的实验课。为了使学生对实验应力分析有较系统的认识，仍保留了实验应力分析基础一章，且对电阻应变计法的原理及应用这一节作了较大的改动，以供学生在实验课中参考，并对全章加上＊号。

8. 在材料力学性能的进一步研究一章的低应力脆断·断裂韧度一节中，简单介绍了线弹性断裂力学的一些基本概念，以充实该节的内容。

除了以上几方面的更动外，在第三版中，各章还编写了思考题，适当增加了一些例题和习题。这是为帮助学生理解基本概念和因材施教创造条件。本书第三版采用高等教育出版社根据国家标准的规定和惯用情况整理的名词符号表。

参加第三版修订工作的有孙训方（西南交通大学）、胡增强（东南大学）、金心全（西南交通大学），并由孙训方主持修订。哈尔滨建筑工程学院的干光瑜教授对书稿进行了审阅，并提出了很多宝贵的意见，对提高第三版的质量作出了贡献，特此致谢。希望采用本教材的广大教师和读者，对使用中发现的问题，提出宝贵意见和建议，以利于今后再次修订，使之更臻完善。

编　者

一九九三年八月

第四版序言

本教材的第一版于1979年4月出版，第二版于1987年4月出版，第三版于1994年9月出版。第三版教材于1996年获国家教育委员会第三届全国普通高等学校优秀教材一等奖，并被台湾和香港地区的大学选用，由台湾科技图书股份有限公司出版繁体字版。随着科学技术的发展和教育改革的深入，为更好地适应当前的教学要求，编者在征集高校材料力学教师意见的基础上，于2000年7月开始对第三版进行修订。第四版在保留原版概念深入浅出、内容丰富的特色，以及相邻两版间的连续性的基础上，将原书的上、下册修订为相对独立的《材料力学(I)》和《材料力学(II)》。《材料力学(I)》包含了材料力学的基本内容，以适应50～60学时材料力学课程的教学需要；《材料力学(II)》包含了材料力学较为深入的内容，补充较多学时材料力学课程的教学要求的内容，以及为有潜力的学生留有深入学习的余地。第四版主要作了如下工作：

1. 拉压、扭转和弯曲的超静定问题集中成独立的一章，以使对超静定问题的解法有统一的认识。

2. 应力状态和强度理论合并成一章，既使篇幅较为紧凑，也明确了讨论问题的目的性以及两者的内在联系。

3. 组合变形与连接部分的计算合并成一章，除精简篇幅外，使这一章成为在基本变形后，求解工程实际问题的内容。

4. 考虑材料塑性的极限分析集中成章，除极限扭矩和极限弯矩外，增加了拉压杆系极限荷载的内容，并放入《材料力学(II)》中，以使对材料的塑性和考虑材料塑性的极限分析有较为全面、完整的认识，且便于教学安排。

5. 应变分析和电阻应变计法基础合并成一章，删去了原来实验应力分析基础中的光弹性法和全息光弹性法的内容，以适应当前的教学实践。

第四版对教材的文字叙述、例题、思考题和习题设置进行了适当精简，着重课程的教学基本要求，有利于培养学生的能力，提高教材的适用面。第四版中的名词术语、量和单位的名称、符号及书写规则等，根据国家标准作了全面修订。

第四版修订的指导思想和修订大纲，由孙训方教授(西南交通大学)确定，具体的修订工作由胡增强教授(东南大学)执笔完成。北京航空航天大学单辉祖教授对书稿进行了审阅，并提出了很多宝贵意见，为提高第四版教材的质量作出了贡献，特此致谢。

希望采用本教材的广大师生和读者，对使用中发现的问题，提出宝贵意见和建议，以利于今后再次修订，使之更臻完善。

修订者

二〇〇一年十月

内容提要

本书为"十五"国家级规划教材。本书第四版既保留了原版概念确切、说理透彻、内容丰富的特点和相邻两版间的连续性，又根据当前教育改革的要求，适应不同专业的教学实际，将原版的上、下册修订为相对独立的《材料力学(I)》和《材料力学(II)》。《材料力学(I)》包含了材料力学的基本内容，可供50~60学时的材料力学课程选用；《材料力学(II)》包含了材料力学较为深入的内容，补充较多学时材料力学课程教学需要的内容，以及为有潜力的学生留有深入学习的余地。

本书为《材料力学(I)》，共九章，内容包括：绪论及基本概念，轴向拉伸和压缩，扭转，弯曲应力，梁弯曲时的位移，简单的超静定问题，应力状态和强度理论，组合变形及连接部分的计算，压杆稳定。

本书适用于高等学校土建、水利类各专业，也可供其他专业及有关工程技术人员参考。

作者简介



孙训方(1923—2000),西南交通大学教授。1945年毕业于西南联合大学土木系,获工程学士学位,随后在清华大学任助教。1948年赴美国哈佛大学工程研究生院学习,获科学硕士学位。1949年9月新中国成立前夕毅然回国,一直在西南交通大学(原唐山铁道学院)任教,长期担任数理力学系副系主任及材料力学教研室主任。1981年被国务院批准为首批博士生导师,1988年成为博士后指导专家,1989年被评为铁道部优秀教师,1991年被评为四川省优秀博士生导师,1993年起享受国务院政府特殊津贴

历任中国力学学会第一、二、三届副理事长,第四、五届名誉理事,全国高等学校工科力学课程指导委员会副主任委员,中国反应堆结构力学专业委员会主任,四川省力学学会副理事长,四川机械工程学会常务理事,四川省高校高级职称评委会委员及力学评审组组长,四川省科技顾问团成员等。

毕生从事于力学教学与科研工作,致力于力学在工程实际中的应用。尤为我国断裂力学的开创、发展和工程应用作出了不朽的贡献。在损伤力学和材料本构关系领域中的研究成果为世人瞩目。1957年起先后出版主编材料力学教材4套、译著4本,发表学术论文近100篇。曾获全国科学大会奖、国家教委科技进步二等奖和四川省优秀教学成果一等奖。1996年《材料力学》(第三版)获国家教育委员会第三届全国普通高等学校优秀教材一等奖。二十余年来为国家培养了硕士生、博士生和博士后数十位,其中大多成为所在单位的学术带头人或业务骨干。

材料力学(I)目录

第一章　绪论及基本概念

§1-1　材料力学的任务

结构物和机械通常都受到各种外力的作用，例如，厂房外墙受到的风压力、吊车梁承受的吊车和起吊物的重力、轧钢机受到钢坯变形时的阻力等，这些力称为**荷载**①。组成结构物和机械的单个组成部分，统称为**构件**。

当结构或机械承受荷载或传递运动时，每一构件都必须能够正常地工作，这样才能保证整个结构或机械的正常工作。为此，首先要求构件在受荷载作用时不发生破坏。如机床主轴因荷载过大而断裂时，整个机床就无法使用。但只是不发生破坏，并不一定就能保证构件或整个结构的正常工作。例如，机床主轴若发生过大的变形，则将影响机床的加工精度。此外，有一些构件在荷载作用下，其原有的平衡形态可能丧失稳定性。例如，房屋中受压柱如果是细长的，则在压力超过一定限度后，就有可能显著地变弯，甚至可能使房屋倒塌。针对上述三种情况，对构件正常工作的要求可以归纳为如下三点：

(1) 在荷载作用下构件应不至于破坏（断裂），即应具有足够的**强度**；

(2) 在荷载作用下构件所产生的变形应不超过工程上允许的范围，也就是要具有足够的**刚度**；

(3) 承受荷载作用时，构件在其原有形态下的平衡应保持为稳定的平衡，也就是要满足**稳定性**的要求。

设计构件时，不但要满足上述强度、刚度和稳定性要求，还必须尽可能地合理选用材料和降低材料的消耗量，以节约资金或减轻构件的自身重量。前者往往要求多用材料，而后者则要求少用材料，两者之间存在着矛盾。材料力学的任务就在于合理地解决这种矛盾。在不断解决新矛盾的同时，也促进了材料力学的发展。

构件的强度、刚度和稳定性问题均与所用材料的**力学性能**（主要是指在外力作用下材料变形与所受外力之间的关系，以及材料抵抗变形与破坏的能力）有关，这些力学性能均需通过材料试验来测定。此外，也有些单靠现有理论解决不

---

① 在材料力学中首先研究静荷载问题。静荷载是指荷载本身或构件质点没有加速度或加速度可以略去不计，因而可以略去由加速度所引起的惯性力等影响的荷载。

了的问题，需借助于实验来解决。因此，实验研究和理论分析同样重要，都是完成材料力学的任务所必需的。

§1-2　材料力学与生产实践的关系

“科学的发生与发展，一开始就是由生产决定的。”① 材料力学的发展也是由生产的发展所推动的，同时它又反过来对生产实践起着重要的指导作用。

在封建社会及其以前，建筑物多以石料、木材以及冶炼粗糙的铸铁、铸铜等为主要的建筑材料，同时，这些建筑物的工作条件也较简单，在设计时大多凭经验或采用模仿的方法。但在古代建筑中也已体现出当时劳动人民根据生产实践所积累起来的经验，对构件受力特点及材料的力学性能有了初步认识，并能结合构件受力特点正确地使用材料。例如，在我国古代就已将一些砖石结构做成拱形，以充分发挥材料的压缩强度；用竹索做成悬索桥，以充分利用竹材的拉伸强度。此外，在木结构中也积累了不少制造梁、柱的经验，如对于矩形截面的木梁，采用的截面高宽比为3:2，这事实上是符合材料力学基本原理的。

封建社会解体后，生产力得到了迅速的发展。为了建造新的建筑物、车、船及机械等，单凭经验或采用模仿的方法就解决不了新提出的问题。材料力学也就在这种情况下逐渐形成为一门科学。这一时期的意大利科学家伽利略(Galileo)，为了解决建造船只和水闸所需梁的尺寸问题进行了一些实验，并在1638年首先提出了计算梁强度的公式。由于他用了刚体力学的方法而未考虑到梁受力后的变形这一重要因素，以致其结论并不正确，但他开辟了用实验和按理论方法计算构件的新途径。后来，英国科学家胡克(R. Hooke)在1678年发表了他根据实验观察所总结出来的重要物理定律——力与变形成正比。从此以后，材料力学在过去生产实践中所积累的丰富经验的基础上，开始有了新的发展。

随着生产的发展，以及随着铁路车辆、船舶、飞机、新型建筑物和金属切削机床的发明和使用，提出了减轻构件自重、减少材料消耗量的要求。为此必须提高材料的强度，这就推动了冶金工业的发展，使高强度的金属例如钢、铝合金等材料逐渐成为主要的工程材料，从而使构件为了符合其强度要求所需要的截面尺寸有可能减小。然而，由于采用了细长的构件，荷载作用下的变形就显著地增大。因此，保证构件的刚度就成为在计算中必须加以考虑的另一个方面。此外，由于细长杆件在受压时，又出现了丧失其原有平衡形态的稳定性问题，所以对构件进行稳定性计算，也成为理论计算中不可忽视的又一个方面。由此可见，在荷载作用下的构件需要进行强度、刚度和稳定性计算，是随着生产发展中不断出现

---

① 见恩格斯《自然辩证法》。

的新问题而逐渐提出来的。

生产的进一步发展又带来了更多的新问题，例如很多构件需要在随时间而交替变化的荷载作用下，或长期在高温环境中工作，等等。对于在这些情况下工作的构件进行强度、刚度和稳定性计算时，就得考虑更多的影响因素。此外，随着超高强度钢的应用，又出现了由于结构或构件中存在着漏检的初始裂纹而发生意外断裂的事故，为解决这类问题，近年来发展了断裂力学这一个分支。

综上所述，材料力学所要解决的问题的范围随着生产的发展而日益扩大。一方面，生产实践提供了大量成功的经验和失败的教训，同时在实验室内进行的大量科学实验也不断积累着有关材料力学方面丰富的实验资料，这些都有助于材料力学的发展。另一方面，材料力学的发展对生产实践也起着重要的指导作用，它为构件的计算提供了简便实用的方法，既保证了构件在各种情况下能够正常地工作，又能合理地使用材料。

§1-3 可变形固体的性质及其基本假设

制造构件所用的材料，其物质结构和性质是多种多样的，但具有一个共同的特点，即都是固体，而且在荷载作用下都会发生**变形**——包括物体尺寸的改变和形状的改变。因此，这些材料统称为**可变形固体**。

工程中实际材料的物质结构是各不相同的，例如，金属具有晶体结构，所谓晶体是由排列成一定规则的原子所构成；塑料由长链分子所组成；玻璃、陶瓷是由按某种规律排列的硅原子和氧原子所组成。因而，各种材料的物质结构都具有不同程度的空隙，并可能存在气孔、杂质等缺陷。然而，这种空隙的大小与构件的尺寸相比，都是极其微小的（例如金属晶体结构的尺寸约为 1×10^{-8} cm 数量级），因而，可以略去不计而认为物体的结构是密实的。此外，对于实际材料的基本组成部分，例如金属、陶瓷、岩石的晶体，混凝土的石子、砂和水泥等，彼此之间以及基本组成部分与构件之间的力学性能都存在着不同程度的差异。但由于基本组成部分的尺寸与构件尺寸相比极为微小，且其排列方向又是随机的，因而，材料的力学性能反映的是无数个随机排列的基本组成部分力学性能的统计平均量。例如，构成金属的晶体的力学性能是有方向性的，但由成千上万个随机排列的晶体所组成的金属材料，其力学性能则是统计各向同性的。

综上所述，对于可变形固体制成的构件，在进行强度、刚度或稳定性计算时，通常略去一些次要因素，将它们抽象为理想化的材料，然后进行理论分析。对可变形固体所作的两个基本假设如下。

1．连续性假设 认为物体在其整个体积内充满了物质而毫无空隙，其结构是密实的。根据这一假设，就可在受力构件内任意一点处截取一体积单元来进

行研究。而且,值得注意的是,在正常工作条件下,变形后的固体仍应保持其连续性。因此,可变形固体的变形必须满足**几何相容条件**,即变形后的固体既不引起"空隙",也不产生"挤入"现象。

2. 均匀性假设 认为从物体内任意一点处取出的体积单元,其力学性能都能代表整个物体的力学性能。显然,这种能够代表材料力学性能的体积单元的尺寸,是随材料的组织结构不同而有所不同的。例如,对于金属材料,通常取 0.1 mm×0.1 mm×0.1 mm 为其代表性体积单元的最小尺寸。对于混凝土,则需取 10 mm×10 mm×10 mm 为其代表性体积单元的最小尺寸。这是因为代表性体积单元的最小尺寸必须保证在其体积中包含足够多数量的基本组成部分,以使其力学性能的统计平均值能保持一个恒定的量。

对于可变形固体,除上述两个基本假设外,对于常用的工程材料,通常还有**各向同性假设**,即认为材料沿各个方向的力学性能是相同的。如前所述,金属沿任意方向的力学性能,是具有方向性晶体的统计平均值。至于钢板、型钢或铝合金板、钛合金板等金属材料,由于轧制过程造成晶体排列择优取向,沿轧制方向和垂直于轧制方向的力学性能会有一定的差别,且随材料和轧制加工程度不同而异。但在材料力学的计算中,通常不考虑这种差别,而仍按各向同性进行计算。不过对于木材和纤维增强叠层复合材料等,其整体的力学性能具有明显的方向性,就不能再认为是各向同性的,而应按**各向异性**来进行计算。关于各向异性材料的基本特征,将在第七章中稍加说明。

如上所述,在材料力学的理论分析中,以均匀、连续、各向同性的可变形固体作为构件材料的力学模型,这种理想化了的力学模型抓住了各种工程材料的基本属性,从而使理论研究成为可行。而且,用这种力学模型进行计算所得结果的精度,在大多数情况下是在工程计算的允许范围内。

材料力学中所研究的构件在承受荷载作用时,其变形与构件的原始尺寸相比通常甚小,可以略去不计。所以,在研究构件的平衡和运动以及内部受力和变形等问题时,均可按构件的原始尺寸和形状进行计算。这种变形微小及按原始尺寸和形状进行计算的概念,在材料力学中将经常用到。与此相反,有些构件在受力变形后,必须按其变形后的形状来计算,例如第九章所讨论的压杆稳定就属于这类问题。对于大变形问题,在《材料力学(II)》第四章的例题中作了介绍,但对大变形问题的详细讨论,则超出了本书所涉及的范围。

工程上所用的材料,在荷载作用下均将发生变形。当荷载不超过一定的范围时,绝大多数的材料在卸除荷载后均可恢复原状。但当荷载过大时,则在荷载卸除后只能部分地复原而残留下一部分变形不能消失。在卸除荷载后能完全消失的那一部分变形,称为**弹性变形**,不能消失而残留下来的那一部分变形,则称为**塑性变形**。例如取一段直的钢丝,用手将它弯成一个圆弧,若圆弧的曲率不

大，则放松后钢丝又会变直，这种变形就是弹性变形；若弯成的圆弧曲率过大，则放松后弧形钢丝的曲率虽然会减小些，但不能再变直了，残留下来的那一部分变形就是塑性变形。对于每一种材料，通常当荷载不超过一定的限度时，其变形完全是弹性的。多数构件在正常工作条件下，均要求其材料只发生弹性变形。所以，在材料力学中所研究的大部分问题，多局限于弹性变形范围内。对于考虑材料塑性时的计算，将在《材料力学(II)》的第二章中讨论。

概括起来讲，在材料力学中是把实际材料看作均匀、连续、各向同性的可变形固体，且在大多数场合下局限在弹性变形范围内和小变形条件下进行研究。

§1-4 材料力学主要研究对象(杆件)的几何特征

材料力学所研究的主要构件从几何上多抽象为杆，而且大多数抽象为直杆。直杆是**纵向**(长度方向)尺寸远比**横向**(垂直于长度方向)尺寸要大得多的构件。梁、柱和传动轴等都可抽象为直杆。

直杆有两个主要的几何因素，即**横截面**和**轴线**。前者指的是直杆沿垂直于其长度方向的截面，后者则为所有横截面形心的连线(图 1-1a)。横截面和轴线是互相垂直的。在材料力学中所研究的多数是等截面的直杆(图 1-1a)。

对于等截面的曲杆，它的主要几何因素仍是横截面和轴线。前者指的是曲杆沿垂直于其弧长方向的截面，后者则为所有横截面形心的连线(图 1-1b)。曲杆的轴线与横截面也是相互垂直的。

横截面沿轴线变化的杆称为变截面杆。

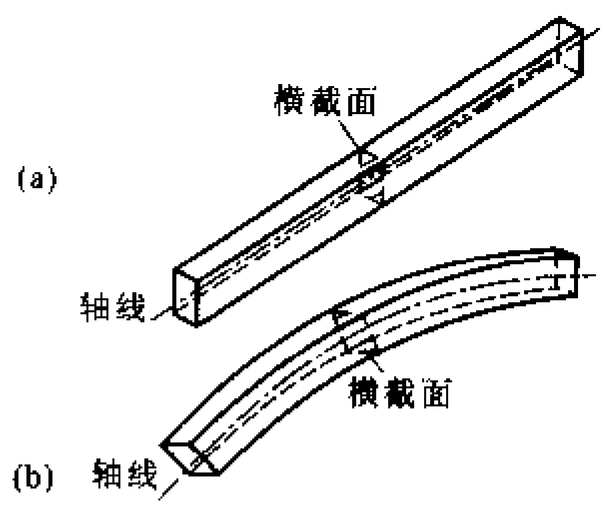


图 1-1

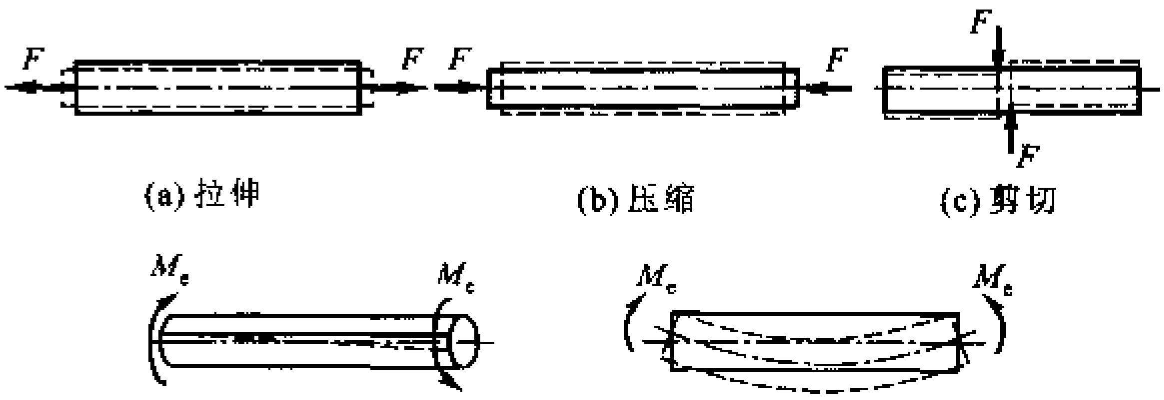
等直杆的计算原理一般也可近似地用于曲率很小的曲杆和横截面变化不大的变截面杆。

§1-5 杆件变形的基本形式

作用在杆上的外力是多种多样的，因此，杆的变形也是各种各样的。不过这些变形的基本形式不外乎以下四种。

1. 轴向拉伸或轴向压缩 在一对其作用线与直杆轴线重合的外力 F 作用下，直杆的主要变形是长度的改变。这种变形形式称为轴向拉伸(图 1-2a)或轴向压缩(图 1-2b)。简单桁架在荷载作用下，桁架中的杆件就发生轴向拉伸

或轴向压缩。



(a) 拉伸　(b) 压缩　(c) 剪切

(d) 扭转　(e) 弯曲

图 1－2

2. 剪切　在一对相距很近的大小相同、指向相反的横向外力 F 作用下，直杆的主要变形是横截面沿外力作用方向发生相对错动(图 1－2c)。这种变形形式称为剪切。一般在发生剪切变形的同时，杆件还存在其他的变形形式。

3. 扭转　在一对转向相反、作用面垂直于直杆轴线的外力偶(其矩为 M_e)作用下，直杆的相邻横截面将绕轴线发生相对转动，杆件表面纵向线将成螺旋线，而轴线仍维持直线。这种变形形式称为扭转(图 1－2d)。机械中传动轴的主要变形就包括扭转。

4. 弯曲　在一对转向相反、作用面在杆件的纵向平面(即包含杆轴线在内的平面)内的外力偶(其矩为 M_e)作用下，直杆的相邻横截面将绕垂直于杆轴线的轴发生相对转动，变形后的杆件轴线将弯成曲线。这种变形形式称为**纯弯曲**(图 1－2e)。梁在横向力作用下的变形将是纯弯曲与剪切的组合，通常称为**横力弯曲**。传动轴的变形往往是扭转与横力弯曲的组合。

工程中常用构件在荷载作用下的变形，大多为上述几种基本变形形式的组合，纯属一种基本变形形式的构件较为少见。但若以某一种基本变形形式为主，其他属于次要变形的，则可按该基本变形形式计算。若几种变形形式都非次要变形，则属于组合变形问题。本书将先分别讨论构件的每一种基本变形，然后再分析组合变形问题。

第二章　轴向拉伸和压缩

§2－1　轴向拉伸和压缩的概念

工程中有很多构件，例如，钢木组合桁架中的钢拉杆（图2－1）和做材料试验用的万能试验机的立柱等，除连接部分外都是等直杆，作用于杆上的外力（或外力合力）的作用线与杆轴线重合。等直杆在这种受力情况下，其主要变形是**纵向伸长或缩短**。这种变形形式就是§1－5中所述的轴向拉伸或压缩。这类构件称为**拉（压）杆**。

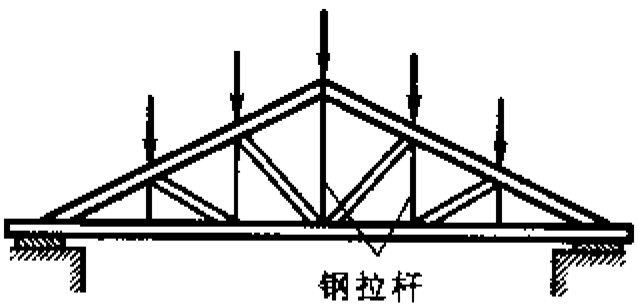


图2－1

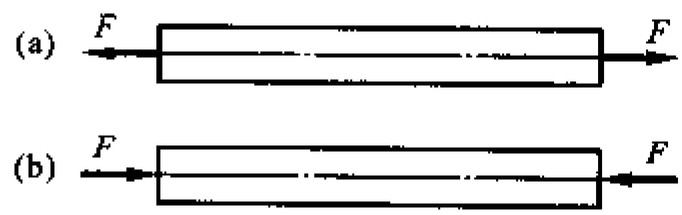


图2－2

实际拉（压）杆的端部可以有各种连接方式。如果不考虑其端部的具体连接情况，则其计算简图即如图2－2a，b所示。计算简图从几何上讲是等直杆；其受力情况是杆在两端各受一集中力 F 作用，两个 F 力大小相等，指向相反，且作用线与杆轴线重合。

§2－2　内力·截面法·轴力及轴力图

Ⅰ. 内力

物体在受到外力作用而变形时，其内部各质点间的相对位置将有变化。与此同时，各质点间相互作用的力也发生了改变。上述相互作用力由于物体受到外力作用而引起的改变量，就是材料力学中所研究的内力。由于已假设物体是均匀连续的可变形固体，因此在物体内部相邻部分之间相互作用的内力，实际上是一个**连续分布**的内力系，而将分布内力系的合成（力或力偶），简称为**内力**。也

就是说，内力是指由外力作用所引起的、物体内相邻部分之间分布内力系的合成。

II. 截面法 · 轴力及轴力图

由于内力是物体内相邻部分之间的相互作用力，为了显示内力，可应用截面法。设一等直杆在两端轴向拉力 F 的作用下处于平衡，欲求杆件横截面 $m-m$ 上的内力(图 2-3a)。为此，假想一平面沿横截面 $m-m$ 将杆件截分为 I, II 两部分，任取一部分(如部分 I)，弃去另一部分(如部分 II)，并将弃去部分对留下部分的作用以截开面上的内力来代替。

对于留下部分 I 来说，截开面 $m-m$ 上的内力 F_N 就成为外力。由于整个杆件处于平衡状态，杆件的任一部分均应保持平衡，故其留下部分 I 也应保持平衡。于是，杆件横截面 $m-m$ 上的内力必定是与其左端外力 F 共线的轴向力 F_N(图 2-3b)。内力 F_N 的数值可由平衡条件求得。

由平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_N-F=0$$

得

$$F_N=F$$

式中，F_N 为杆件任一横截面 $m-m$ 上的内力，其作用线也与杆的轴线重合，即垂直于横截面并通过其形心。这种内力称为轴力，并规定用记号 F_N 表示。

若取部分 II 为留下部分，则由作用与反作用原理可知，部分 II 在截开面上的轴力与前述部分 I 上的轴力数值相等而指向相反(图 2-3b,c)。当然，同样也可从部分 II 的平衡条件来确定。

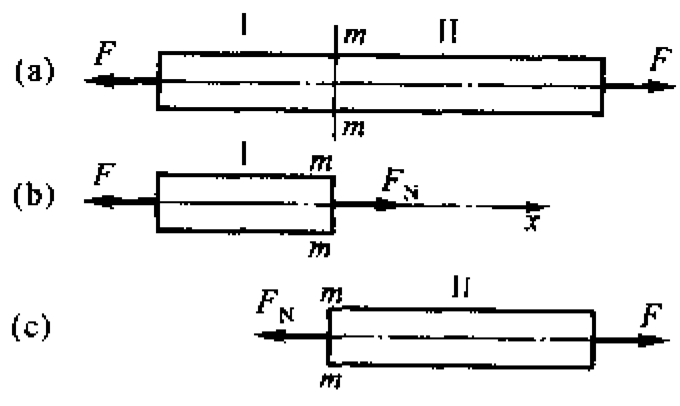


图 2-3

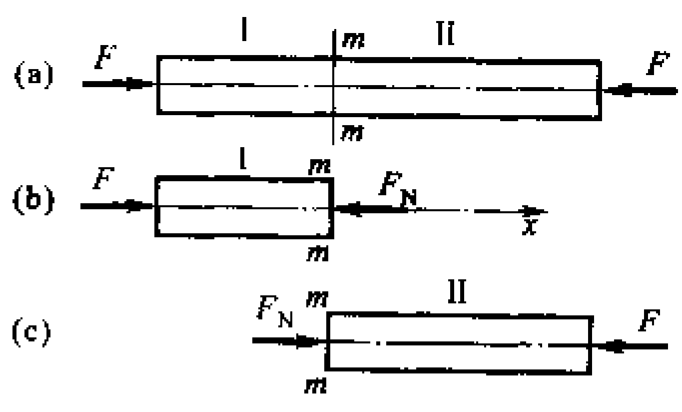


图 2-4

对于压杆，也可通过上述过程求得其任一横截面 $m-m$ 上的轴力 F_N，其指向如图 2-4 所示。为了使由部分 I 和部分 II 所得同一截面 $m-m$ 上的轴力具有相同的正负号，联系变形情况，规定：引起纵向伸长变形的轴力为正，称为拉

力，由图 2－3b，c 可见拉力是背离截面的；引起纵向缩短变形的轴力为负，称为**压力**，由图 2－4b，c 可见，压力是指向截面的。

上述分析轴力的方法称为**截面法**，它是求内力的一般方法。截面法包括以下三个步骤：

(1) 截开：在需要求内力的截面处，假想地将杆截分为两部分；

(2) 代替：将两部分中的任一部分留下，并把弃去部分对留下部分的作用代之以作用在截开面上的内力(力或力偶)；

(3) 平衡：对留下的部分建立平衡方程，根据其上的已知外力来计算杆在截开面上的未知内力。应该注意，截开面上的内力对留下部分而言已属外力了。

必须指出，静力学中的力(或力偶)的可移性原理，在用截面法求内力的过程中是有限制的。例如，图 2－5a 所示拉杆在自由端 A 承受集中力 F，由截面法可得，杆任一横截面 $m-m$ 或 $n-n$ 上的轴力 F_N 均等于 F(图 2－5b,c)。若将集中力 F 由自由端 A 沿其作用线移至杆的 B 点处(图 2－5d)，则其 AB 段内任一横截面 $m-m$ 上的轴力都将等于零(图 2－5e)，而 BC 段内任一横截面 $n-n$ 上的轴力仍等于 F(图 2－5f)，保持不变。这是因为集中力 F 由自由端 A 移至 B 点后，改变了杆件 AB 段的变形，而并不改变 BC 段的变形。同理，将杆上的荷载用一个静力等效的相当力系来代替，在求内力的过程中也有所限制。

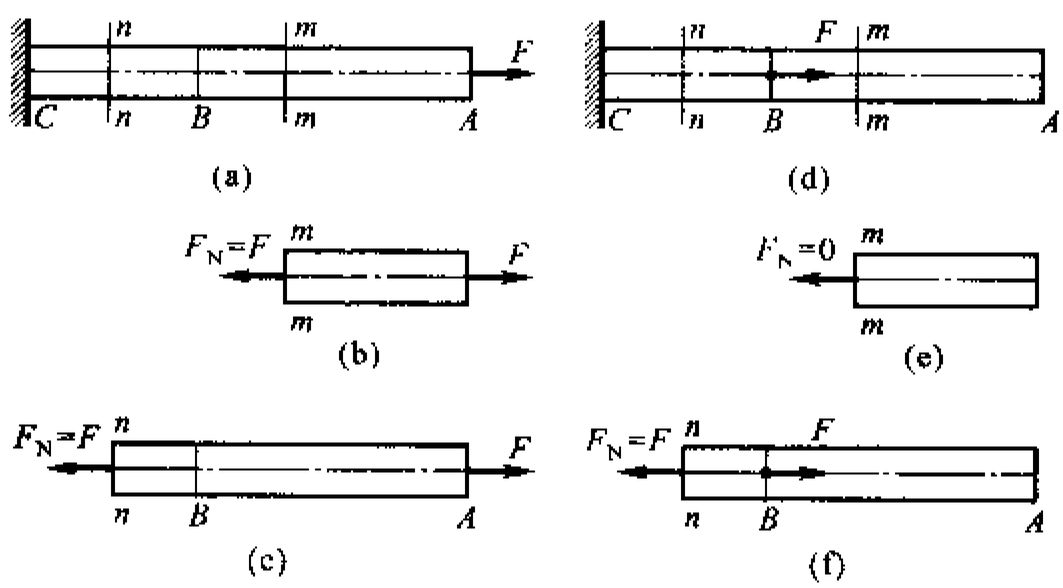
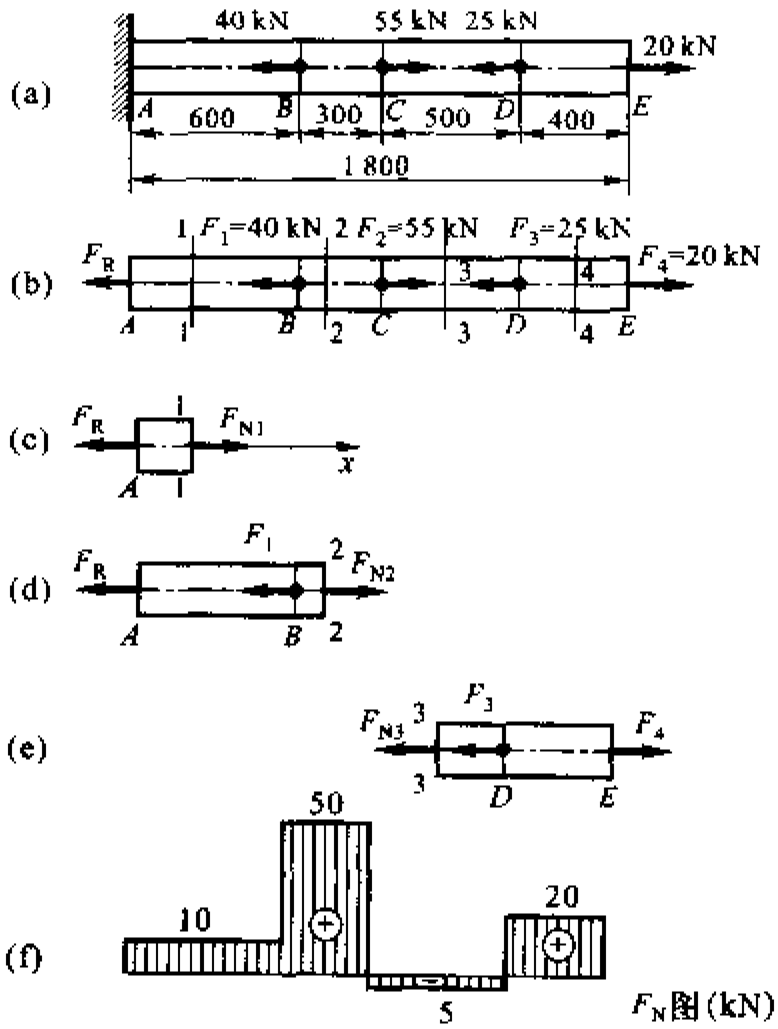


图 2－5

当杆受到多个轴向外力作用时，在杆的不同横截面上的轴力将各不相同。为了表明横截面上的轴力随横截面位置而变化的情况，可用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置，用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上轴力的数值，从而绘出表示轴力与截面位置关系的图线，称为**轴力图**。从该图上即可确定最大轴力的数值及其所在横截面的位置。习惯上将正值的轴力画在上侧，负值的画在下侧。

例题 2－1 一等直杆及其受力情况如图 a 所示，试作杆的轴力图。



例题 2-1 图

解：为运算方便，首先求出支反力 F_R(图 b)。由整个杆的平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad -F_R - F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 0$$

得

$$F_R = 10\ \text{kN}$$

在求 AB 段内任一横截面上的轴力时，应用截面法研究截开后左段杆的平衡。假定轴力 F_{N1} 为拉力(图 c)，由平衡方程求得 AB 段内任一横截面上的轴力为

$$F_{N1} = F_R = 10\ \text{kN}$$

结果为正值，故 F_{N1} 为拉力。

同理，可求得 BC 段内任一横截面上的轴力(图 d)为

$$F_{N2} = F_R + F_1 = 50\ \text{kN}$$

在求 CD 段内的轴力时，将杆截开后宜研究其右段的平衡，因为右段杆比左段杆上包含的外力较少，并假定轴力 F_{N3} 为拉力(图 e)。由

$$\sum F_x = 0,\quad -F_{N3} - F_3 + F_4 = 0$$

得

$$F_{N3} = -F_3 + F_4 = -5\ \text{kN}$$

结果为负值,说明原先假定的 F_{N3} 的指向不对,即应为压力。

同理,可得 DE 段内任一横截面上的轴力 F_{N4} 为

$$F_{N4} = F_4 = 20\ \text{kN}$$

按前述作轴力图的规则,作出杆的轴力图如图 f 所示。$F_{N,max}$ 发生在 BC 段内的任一横截面上,其值为 50 kN。

§2-3　应力·拉(压)杆内的应力

在确定了拉(压)杆的轴力以后,还不能判断杆是否会因强度不足而破坏。因为轴力只是杆横截面上分布内力系的合力,而要判断杆是否会因强度不足而破坏,还必须知道度量分布内力大小的分布内力集度,以及材料承受荷载的能力。杆件截面上的分布内力集度,称为**应力**。

I. 应力的概念

应力是受力杆件某一截面上一点处的内力集度。若考察受力杆截面 $m-m$ 上 M 点处的应力(图 2-6a),则可在 M 点周围取一很小的面积 ΔA,设 ΔA

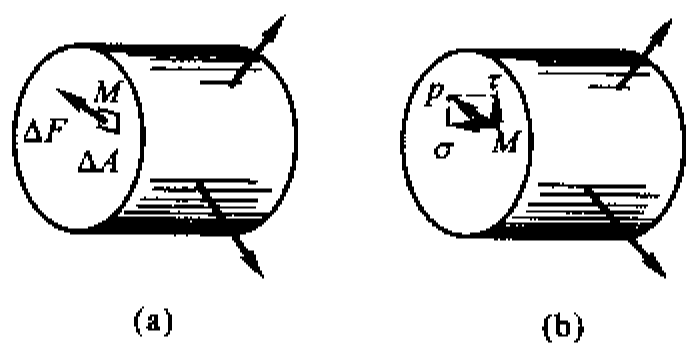


图 2-6

面积上分布内力的合力为 ΔF,于是,在面积 ΔA 上内力 ΔF 的平均集度为

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

式中,p_m 称为面积 ΔA 上的**平均应力**。一般地说,截面 $m-m$ 上的分布内力并不是均匀的,因而,平均应力 p_m 的大小和方向将随所取的微小面积 ΔA 的大小而不同。为表明分布内力在 M 点处的集度,令微小面积 ΔA 无限缩小而趋于零,则其极限值

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} \tag{2-1}$$

即为 M 点处的内力集度,称为截面 $m-m$ 上 M 点处的**总应力**。由于 ΔF 是矢

量,因而总应力 p 也是个矢量,其方向一般既不与截面垂直,也不与截面相切。通常,将总应力 p 分解为与截面垂直的法向分量 σ 和与截面相切的切向分量 τ(图 2-6b)。法向分量 σ 称为**正应力**,切向分量 τ 称为**切应力**。

从应力的定义可见,应力具有如下特征:(1) 应力定义在受力物体的某一截面上的某一点处,因此,讨论应力必须明确是在哪一个截面上的哪一点处。(2) 在某一截面上一点处的应力是矢量。对于应力分量,通常规定离开截面的正应力为正,指向截面的正应力为负,即拉应力为正,压应力为负;而对截面内部(靠近截面)的一点产生顺钟向力矩的切应力为正,反之为负(图 2-6b 中表示的正应力和切应力均为正)。(3) 应力的量纲为 $ML^{-1}T^{-2}$。应力的单位为 Pa[①]。(4) 整个截面上各点处的应力与微面积 dA 之乘积的合成,即为该截面上的内力。

II. 拉(压)杆横截面上的应力

拉(压)杆横截面上的内力为轴力,其方向垂直于横截面,且通过横截面的形心,而截面上各点处应力与微面积 dA 之乘积的合成即为该截面上的内力。显然,截面上各点处的切应力不可能合成为一个垂直于截面的轴力。因而,与轴力相应的只可能是垂直于截面的正应力。由于还不知道正应力在截面上的变化规律,为此,考察杆件在受力后表面上的变形情况,并由表及里地作出杆件内部变形情况的几何假设,再根据力与变形间的物理关系,得到应力在截面上的变化规律,然后再通过应力与 dA 之乘积的合成即为内力这一静力学关系,得到以内力表示的应力计算公式。

取一等直杆(图 2-7a),在其侧面作相邻的两条横向线 ab 和 cd,然后在杆两端施加一对轴向拉力 F 使杆发生变形。此时,可观察到该两横向线移到 $a'b'$ 和 $c'd'$(图 2-7b 中的虚线)。根据这一现象,设想横向线代表杆的横截面,于是,可假设原为平面的横截面在杆变形后仍为平面,称为**平面假设**。根据平面假设,拉杆变形后两横截面将沿杆轴线作相对平移,也就是说,拉杆在其任意两个横截面之间纵向线段的伸长变形是均匀的。

由于假设材料是均匀的,而杆的分布内力集度又与杆纵向线段的变形相对应,因而,拉杆在横截面上的分布内力也是均匀分布的,即横截面上各点处的正应力 σ 都相等(见图 2-7c,d)。然后,按静力学求合力的概念

$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = \sigma \int_A \mathrm{d}A = \sigma A$$

即得拉杆横截面上正应力 σ 的计算公式

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \tag{2-2}$$

① $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2}$。由于这一单位较小,工程中通常采用 MPa,即 $1\ \mathrm{MPa} = 10^6\ \mathrm{Pa}$。

式中,F_N 为轴力;A 为杆的横截面面积。

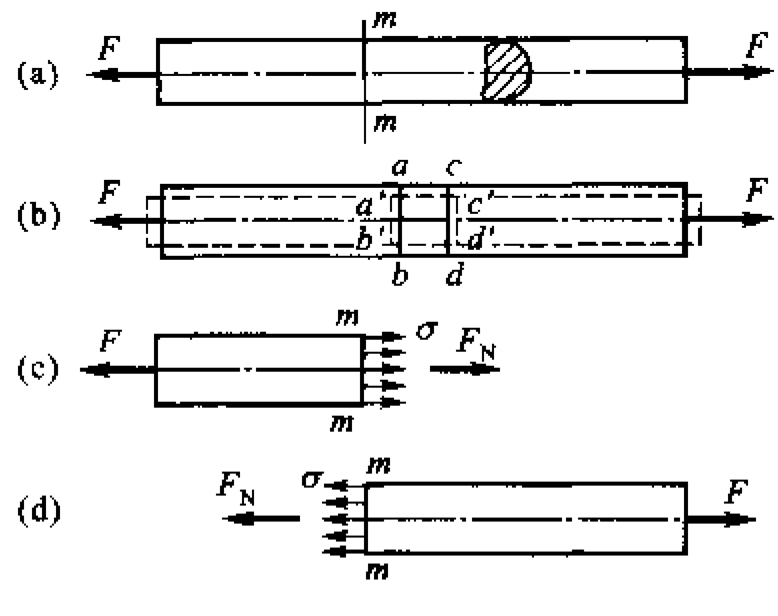


图 2-7

对轴向压缩的杆,上式同样适用。由于已规定了轴力的正负号,由式(2-2)可知,正应力的正负号与轴力的正负号是一致的。

式(2-2)是根据正应力在杆横截面上各点处相等这一结论而导出的。应该指出,这一结论实际上只在杆上离外力作用点稍远的部分才正确,而在外力作用点附近,由于杆端连接方式的不同,其应力情况较为复杂。但**圣维南**(Saint-Venant)**原理**指出:"力作用于杆端方式的不同,只会使与杆端距离不大于杆的横向尺寸的范围内受到影响"。这一原理已被实验所证实,故在拉(压)杆的应力计算中,都以式(2-2)为准。至于杆端连接部分的计算,将在第八章中讨论。

当等直杆受几个轴向外力作用时,由轴力图可求得其最大轴力 $F_{N,max}$,代入式(2-2)即得杆内的最大正应力为

$$\sigma_{max} = \frac{F_{N,max}}{A} \tag{2-3}$$

最大轴力所在的横截面称为**危险截面**,危险截面上的正应力称为**最大工作应力**。

例题 2-2　一横截面为正方形的砖柱分上、下两段,其受力情况、各段长度及横截面尺寸如图 a 所示。已知 $F=50$ kN,试求荷载引起的最大工作应力。

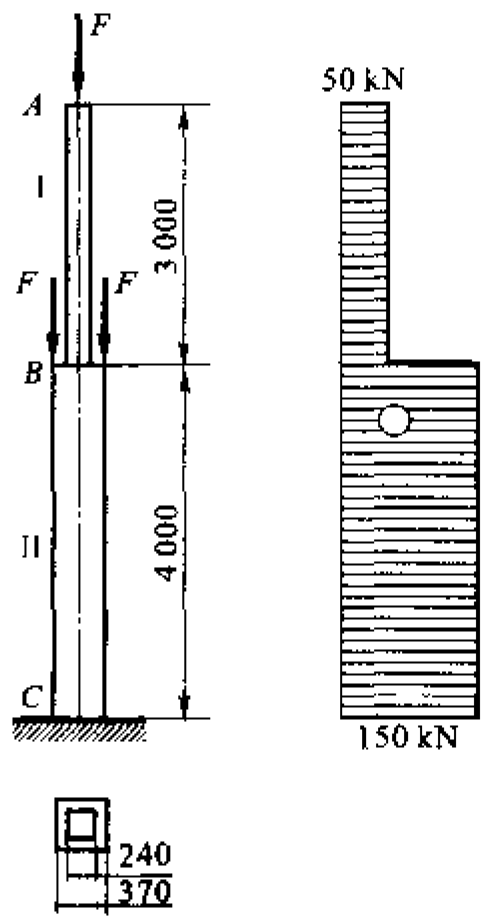
解:首先作柱的轴力图如图 b 所示。

由于砖柱为变截面杆,故须利用式(2-2)求出每段柱的横截面上的正应力,从而确定全柱的最大工作应力。

I,II 两段柱(图 a)横截面上的正应力,分别由轴力图及横截面尺寸算得为

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{-50\times10^3\ \text{N}}{(0.24\ \text{m})(0.24\ \text{m})}$$

$$= -0.87\times10^6\ \text{Pa} = -0.87\ \text{MPa}(压应力)$$



(a)　　(b)

例题 2-2 图

和

$$\sigma_2=\frac{F_{N2}}{A_2}=\frac{-150\times10^3\ \mathrm{N}}{(0.37\ \mathrm{m})(0.37\ \mathrm{m})}$$

$$=-1.1\times10^6\ \mathrm{Pa}=-1.1\ \mathrm{MPa}(\text{压应力})$$

由上述结果可见，砖柱的最大工作应力在柱的下段，其值为 1.1 MPa，是压应力。

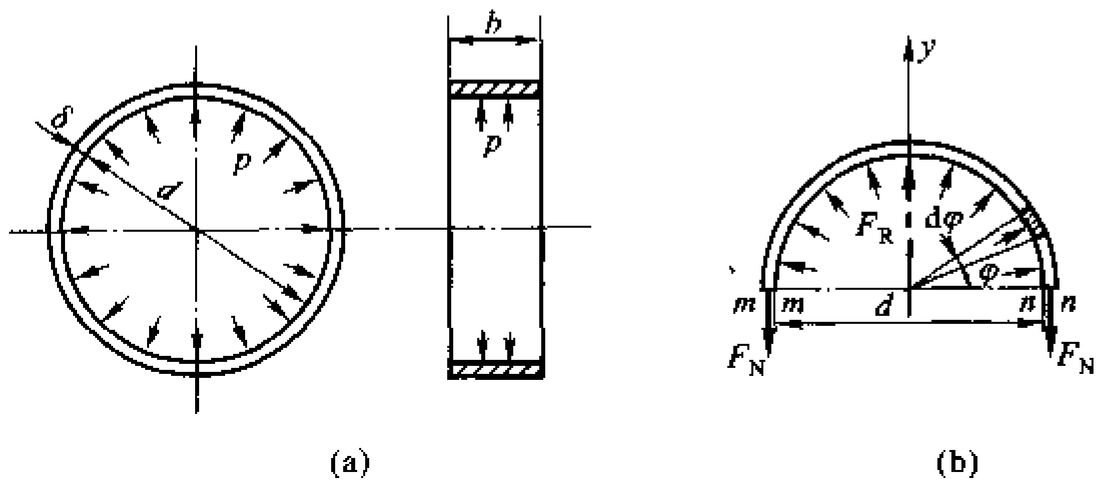
例题 2-3　长为 b、内径 $d=200$ mm、壁厚 $\delta=5$ mm 的薄壁圆环，承受 $p=2$ MPa 的内压力作用，如图 a 所示。试求圆环径向截面上的拉应力。

解：薄壁圆环在内压力作用下要均匀胀大，故在包含圆环轴线的任何径向截面上，作用有相同的法向拉力 F_N。为求该拉力，可假想地用一直径平面将圆环截分为二，并研究留下的半环(图 b)的平衡。半环上的内压力沿 y 方向的合力为

$$F_R=\int_0^{\pi}\left(pb\cdot\frac{d}{2}\mathrm{d}\varphi\right)\sin\varphi=\frac{pbd}{2}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=pbd$$

其作用线与 y 轴重合。

因壁厚远小于内径 d，故可近似地认为在环的每一个横截面 $m-m$ 或 $n-n$ 上各点处的正应力相等(如果 $\delta\leqslant d/20$，这种近似足够精确)。又由对称关系



例题 2-3 图

可知,此两横截面上的正应力必组成数值相等的合力 F_N。由平衡方程 $\sum F_y = 0$,求得

$$F_N = \frac{F_R}{2} = \frac{pbd}{2}$$

于是横截面上的正应力 σ 为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{pbd}{2b\delta} = \frac{pd}{2\delta}$$

$$= \frac{(2\times10^6\ \text{Pa})(0.2\ \text{m})}{2(5\times10^{-3}\ \text{m})} = 40\times10^6\ \text{Pa} = 40\ \text{MPa}$$

III. 拉(压)杆斜截面上的应力

上面分析了拉(压)杆横截面上的正应力,现研究与横截面成 α 角的任一斜截面 $k-k$ 上的应力(图 2-8a)。为此,假想地用一平面沿斜截面 $k-k$ 将杆截分为二,并研究左段杆的平衡(图 2-8b)。于是,可得斜截面 $k-k$ 上的内力 F_α 为

$$F_\alpha = F \tag{a}$$

仿照求横截面上正应力变化规律的分析过程,同样可得到斜截面上各点处的总应力 p_α 相等的结论。于是,有

$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} \tag{b}$$

式中,A_α 是斜截面面积。A_α 与横截面面积 A 的关系为 $A_\alpha = A/\cos\alpha$,代入式(b),并利用式(a),即得

$$p_\alpha = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma_0\cos\alpha \tag{c}$$

式中,$\sigma_0 = \dfrac{F}{A}$ 即拉杆在横截面($\alpha = 0$)上的正应力。

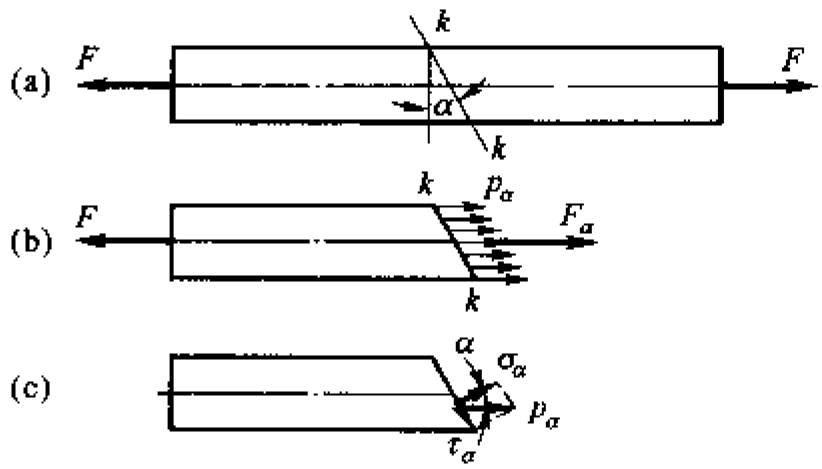


图 2－8

总应力 p_α 是矢量，分解为两个分量：沿截面法线方向的正应力和沿截面切线方向的切应力，并分别用 σ_α，τ_α 表示①，如图 2－8c 所示。

上述两个应力分量可表示为

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha \tag{d}$$

和

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha \tag{e}$$

上列两式表达了通过拉杆内任一点处不同方位斜截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 随 α 角而改变的规律。通过一点的所有不同方位截面上应力的全部情况，称为该点处的**应力状态**。由(d)，(e)两式可知，在所研究的拉杆中，一点处的应力状态由其横截面上的正应力 σ_0 即可完全确定，这样的应力状态称为**单轴应力状态**。关于应力状态的问题将在第七章中详细讨论。

由(d)，(e)两式可见，通过拉杆内任意一点不同方位截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α，其数值随 α 角作周期性变化，它们的最大值及其所在截面的方位为：(1) 当 $\alpha=0$ 时，$\sigma_\alpha=\sigma_0$ 是 σ_α 中的最大值。即通过拉杆内某一点的横截面上的正应力，是通过该点的所有不同方位截面上正应力中的最大值。(2) 当 $\alpha=45°$ 时，$\tau_\alpha=\dfrac{\sigma_0}{2}$ 是 τ_α 中的最大值，即与横截面成 45°的斜截面上的切应力，是拉杆所有不同方位截面上切应力中的最大值。

以上的全部分析结果对于压杆也同样适用。

① 在通常情况下，总应力、正应力和切应力分别用 p，σ 和 τ 表示。这里的下角标 α 表示这些应力是在 α 面上的应力。

§2－4　拉(压)杆的变形·胡克定律

设拉杆的原长为 l，承受一对轴向拉力 F 的作用而伸长后，其长度增为 l_1（图 2－9），则杆的纵向伸长为

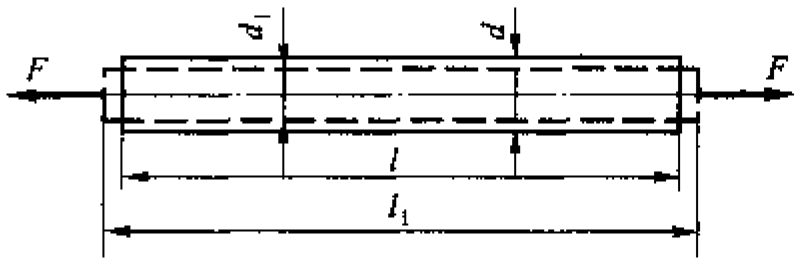


图 2－9

$$\Delta l = l_1 - l \tag{a}$$

纵向伸长 Δl 只反映杆的总变形量，而无法说明沿杆长度方向上各段的变形程度。由于拉杆各段的伸长是均匀的，因此，其变形程度可以每单位长度的纵向伸长（即 $\Delta l/l$）来表示。每单位长度的伸长（或缩短），称为**线应变**，并用记号 ε 表示。于是，拉杆的纵向线应变为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{b}$$

由式(a)可知，拉杆的纵向伸长 Δl 为正，压杆的纵向缩短 Δl 为负。故线应变在伸长时为正，缩短时为负。

必须指出，式(b)所表达的是在长度 l 内的平均线应变，当沿杆长度均匀变形时，就等于沿长度各点处的纵向线应变。当沿杆长度为非均匀变形时（如一等直杆在自重作用下的变形），式(b)并不反映沿长度各点处的纵向线应变。为研究一点处的线应变，可围绕该点取一个很小的正六面体（图 2－10）。设所取正六面体沿 x 轴方向 AB 边的原长为 Δx，变形后其长度的改变量为 $\Delta\delta_x$，对于非均匀变形，比值 $\Delta\delta_x/\Delta x$ 为 AB 边的平均线应变。当 Δx 无限缩小而趋于零时，其极限值

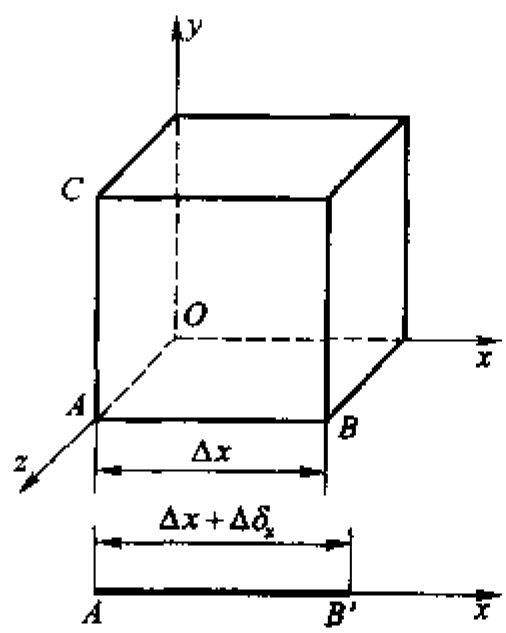


图 2－10

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta_x}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}\delta_x}{\mathrm{d}x} \tag{2-4}$$

称为 A 点处沿 x 轴方向的线应变。

拉杆在纵向变形的同时将有横向变形。设拉杆为圆截面杆，其原始直径为 d，受力变形后缩小为 d_1(图 2-9)，则其横向变形为

$$\Delta d = d_1 - d \tag{c}$$

在均匀变形情况下，拉杆的横向线应变为

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} \tag{d}$$

由式(c)可见，拉杆的横向线应变显然为负，即与其纵向线应变的正负号相反。

以上有关拉杆变形的一些基本概念同样适用于压杆，但压杆的纵向线应变 ε 为负值，而其横向线应变 ε' 则为正值。

拉(压)杆的变形量与其所受力之间的关系与材料的性能有关，只能通过实验来获得。对工程中常用的材料，如低碳钢、合金钢所制成的拉杆，由一系列实验证明：当杆内的应力不超过材料的某一极限值，即比例极限(见§2-6)时，杆的伸长 Δl 与其所受外力 F、杆的原长 l 成正比，而与其横截面面积 A 成反比，即有

$$\Delta l \propto \frac{Fl}{A}$$

引进比例常数 E，则有

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \tag{2-5a}$$

由于 $F = F_N$，故上式可改写为

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \tag{2-5b}$$

这一关系式称为**胡克定律**。式中的比例常数 E 称为**弹性模量**，其量纲为 $ML^{-1}T^{-2}$，其单位为 Pa。E 的数值随材料而异，是通过实验测定的，其值表征材料抵抗弹性变形的能力。式(2-5a)或(2-5b)同样适用于压杆。轴力 F_N 和变形 Δl 的正负号是相对应的，即当轴力 F_N 是拉力为正时，求得的变形 Δl 是伸长也为正，反之亦然。

EA 称为杆的**拉伸(压缩)刚度**，对于长度相等且受力相同的拉杆，其拉伸刚度越大则拉杆的变形越小。

将上述公式改写成

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_N}{A} \tag{e}$$

式中，$\frac{\Delta l}{l}$ 为杆内任一点处的纵向线应变 ε；$\frac{F_N}{A}$ 为杆横截面上的正应力 σ。于是，得胡克定律的另一表达形式

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{2-6}$$

显然,上式中的纵向线应变 ε 和横截面上正应力 σ 的正负号也是相对应的,即拉应力引起纵向伸长线应变。式(2-6)是经过改写后的胡克定律,它不仅适用于拉(压)杆,而且还可以更普遍地用于所有的单轴应力状态,故通常又称其为**单轴应力状态下的胡克定律**。

对于横向线应变 ε',实验结果指出,当拉(压)杆内的应力不超过材料的比例极限时,它与纵向线应变 ε 的绝对值之比为一常数,此比值称为**横向变形因数**或**泊松**(S. -D. Poisson)**比**,通常用 ν 表示,即

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \tag{f}$$

ν 是量纲为一的量,其数值随材料而异,也是通过实验测定的。

考虑到纵向线应变与横向线应变的正负号恒相反,故有

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon \tag{2-7a}$$

将式(2-6)中的 ε 代入,则得

$$\varepsilon' = -\nu\frac{\sigma}{E} \tag{2-7b}$$

上式说明一点处的横向线应变与该点处的纵向正应力也成正比,但正负号相反。

弹性模量 E 和泊松比 ν 都是材料的弹性常数。表 2-1 给出了一些材料的 E 和 ν 的约值。

表 2-1 弹性模量及泊松比的约值

材料名称	牌 号	E/GPa①	ν
低碳钢	Q235	200~210	0.24~0.28
中碳钢	45	205	
低合金钢	16Mn	200	0.25~0.30
合金钢	40CrNiMoA	210	
灰口铸铁		60~162	0.23~0.27
球墨铸铁		150~180	
铝合金	LY12	71	0.33
硬质合金		380	
混凝土		15.2~36	0.16~0.18
木材(顺纹)		9~12	

例题 2-4 求例题 2-3 中所示薄壁圆环在内压力 p 作用下的径向应变和

① $1\ \mathrm{GPa} = 10^9\ \mathrm{Pa}$。

圆环直径的改变量。已知材料的弹性模量 $E = 210\ \text{GPa}$。

解：在例题 2－3 中已经求出圆环在任一横截面上的正应力 σ，若正应力不超过材料的比例极限，则可按式(2－6)算出沿正应力 σ 方向(即沿圆周方向)的线应变 ε 为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{40 \times 10^6\ \text{Pa}}{210 \times 10^9\ \text{Pa}} = 1.9 \times 10^{-4}$$

圆环的周向应变 ε 就等于其径向应变 ε_d，因为

$$\varepsilon = \frac{\pi(d + \Delta d) - \pi d}{\pi d} = \frac{\Delta d}{d} = \varepsilon_d$$

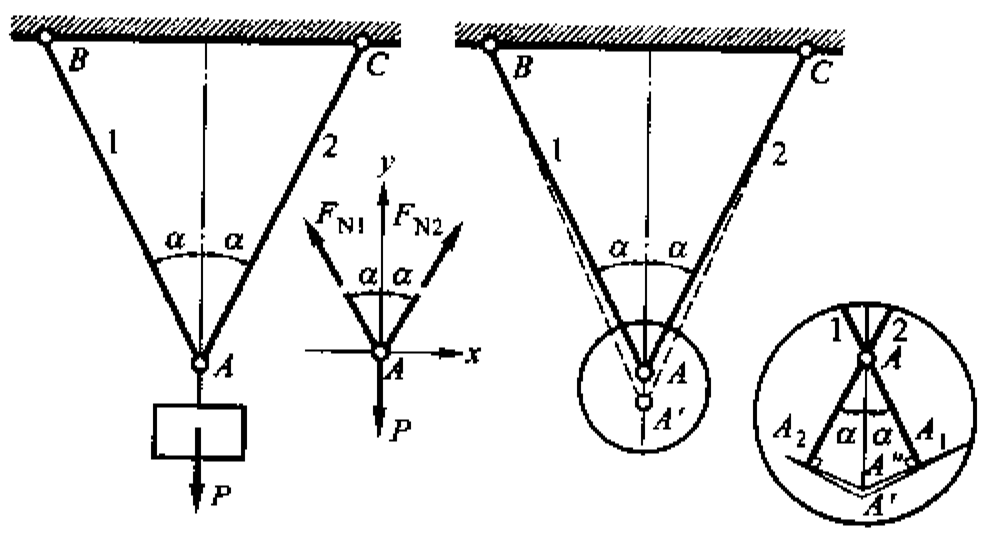
根据上式即可算出圆环在内压力 p 作用下的直径增大量为

$$\Delta d = \varepsilon_d d = 1.9 \times 10^{-4} \times 0.2\ \text{m}$$
$$= 3.8 \times 10^{-5}\ \text{m} = 0.038\ \text{mm}$$

例题 2－5 图 a 所示杆系由钢杆 1 和 2 组成。已知杆端铰接，两杆与铅垂线均成 $\alpha = 30°$ 的角度，长度均为 $l = 2\ \text{m}$，直径均为 $d = 25\ \text{mm}$，钢的弹性模量为 $E = 210\ \text{GPa}$。设在结点 A 处悬挂一重量为 $P = 100\ \text{kN}$ 的重物，试求结点 A 的位移 Δ_A。

解：由于两杆受力后伸长，而使 A 点有位移，为求出各杆的伸长，先求出各杆的轴力。

在微小变形情况下，求各杆的轴力时可将 α 角的微小变化忽略不计。假定各杆的轴力均为拉力(图 b)，由结点 A 的平衡



例题 2－5 图

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2}\sin\alpha - F_{N1}\sin\alpha = 0$$

和

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1}\cos\alpha + F_{N2}\cos\alpha - P = 0$$

由此解得各杆的轴力为

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{P}{2\cos\alpha} \tag{1}$$

结果都是正值，说明原先假定的拉力是正确的。将 F_{N1} 和 F_{N2} 代入式(2-5b)，得每杆的伸长为

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{N1}}{EA} = \frac{Pl}{2EA\cos\alpha} \tag{2}$$

式中，$A = \frac{\pi}{4}d^2$ 为杆的横截面面积。

为了求位移 Δ_A，可假想地将两杆在 A 点处拆开，并在其原位置上分别增加长度 Δl_1 和 Δl_2。显然，变形后两杆仍应铰结在一起，即应满足变形的几何相容条件。于是，分别以 B，C 为圆心，以两杆伸长后的长度 $\overline{BA_1}$，$\overline{CA_2}$ 为半径作圆弧，它们的交点 A''(图 c)即为 A 点的新位置。$\overline{AA''}$ 即为 A 点的位移。但因变形微小，故可过 A_1，A_2 分别作 1，2 两杆的垂线以代替圆弧，两垂线交于 A'(图 c)，略去高阶微量，可认为 $\overline{AA'} = \overline{AA''}$。由于问题在几何、物性及受力情况方面的对称性，故 A' 必与 A 在同一铅垂线上，因而由图 c 可得

$$\Delta_A = \overline{AA'} = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} \tag{3}$$

将式(2)代入式(3)，得

$$\Delta_A = \frac{Pl}{2EA\cos^2\alpha} \tag{4}$$

再将已知数据代入式(4)，得

$$\Delta_A = \frac{(100\times 10^3\ \text{N})(2\ \text{m})}{2(210\times 10^9\ \text{Pa})\left[\frac{\pi}{4}(25\times 10^{-3}\ \text{m})^2\right]\cos^2 30^\circ}$$

$$= 0.001\,293\ \text{m} = 1.293\ \text{mm}(\downarrow)$$

从上述计算可见，由于杆件的变形而引起点的位移。点的位移是指点位置的移动，其值根据杆件的变形，并由变形的几何相容条件求得。因此，变形与位移既有联系又有区别。变形是标量，而位移则是矢量。

§2-5 拉(压)杆内的应变能

弹性体在受力后要发生变形，同时弹性体内将积蓄能量。例如钟表的发条(弹性体)被拧紧(发生变形)以后，在它放松的过程中将带动齿轮系，使指针转动，这样，发条就作了功。这说明拧紧了的发条具有作功的本领，这是因为发条在拧紧状态下积蓄有能量。为了计算这种能量，现以受重力作用且仅发生弹性变形的拉杆为例，利用能量守恒原理来找出外力所作的功与弹性体内所积蓄的

能量在数量上的关系。设杆(图 2-11)的上端固定,在其下端的小盘上逐渐增加重量。每加一点重量,杆将相应地有一点伸长,已在盘上的重物也相应地下沉,因而重物的位能将减少。由于重量是逐渐增加的,故在加载过程中,可认为杆没有动能改变。按能量守恒原理,略去其他微小的能量损耗不计,重物失去的位能将全部转变为积蓄在杆内的能量。因为杆的变形是弹性变形,故在卸除荷载以后,这种能量又随变形的消失而全部转换为其他形式的能量。这种伴随着弹性变形的增减而改变的能量称为**应变能**。在所讨论的情况下,应变能就等于重物所失去的位能。

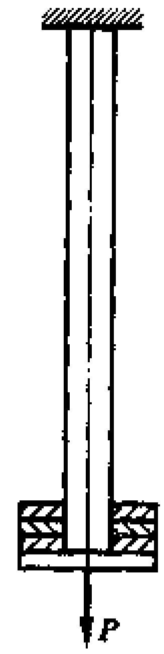


图 2-11

因为重物失去的位能在数值上等于它下沉时所作的功,所以杆内的应变能在数值上就等于重物在下沉时所作的功。推广到一般弹性体受静荷载(不一定是重力)作用的情况,可以认为在弹性体的变形过程中,积蓄在弹性体内的应变能 V_ε 在数值上等于外力所作的功 W,即

$$V_\varepsilon = W \tag{2-8}$$

上式称为弹性体的**功能原理**。应变能 V_ε 的单位为 J[①]。

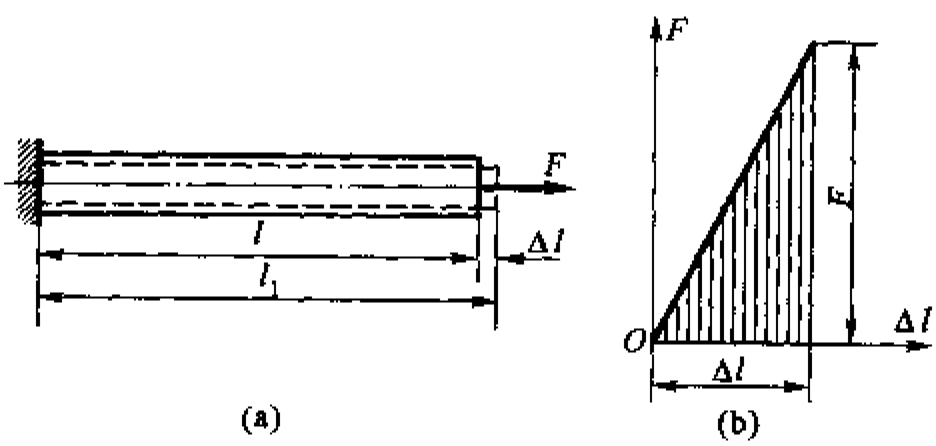


图 2-12

为推导拉杆(图 2-12a)应变能的计算式,先求外力所作的功 W。在静荷载 F 的作用下,杆伸长了 Δl,这就是拉力 F 的作用点的位移。力 F 对此位移所作的功可以从 F 与 Δl 的关系图线下的面积来计算。由于在弹性变形范围内 F 与 Δl 成线性关系,如图 2-12b 所示,于是,可求得 F 力所作的功 W 为

$$W = \frac{1}{2}F\Delta l$$

从式(2-8)可知,积蓄在杆内的应变能为

① $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N \cdot m}$。

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}F\Delta l \tag{a}$$

又因 $F_N = F$，故可将上式改写为

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}F_N\Delta l \tag{b}$$

利用式(2－5a)和(2－5b)中的关系，可从(a)，(b)两式分别得到

$$V_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA} \tag{2-9a}$$

和

$$V_\varepsilon = \frac{F_N^2 l}{2EA} \tag{2-9b}$$

或

$$V_\varepsilon = \frac{EA}{2l}\Delta l^2 \tag{2-9c}$$

由于在拉杆的各横截面上所有点处的应力均相同，故杆的单位体积内所积蓄的应变能，可由杆的应变能 V_ε 除以杆的体积 V 来计算。这种单位体积内的应变能，称为**应变能密度**，并用 v_ε 表示，于是

$$v_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{c}$$

利用式(2－6)，又可得

$$v_\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{2-10a}$$

或

$$v_\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{2-10b}$$

应变能密度的单位为 J/m^3。

以上计算拉杆内应变能的各公式也适用于压杆。而式(2－10a)及(2－10b)则普遍适用于所有的单轴应力状态。当然，这些公式都只有在应力不超过材料的比例极限这一前提下才能应用，也就是说，只适用于**线弹性范围**以内。

利用应变能的概念可以解决与结构或构件的弹性变形有关的问题。这种方法称为**能量法**。本节将用能量法求解一些较简单的拉(压)杆的位移，对于较为一般的情形，将在《材料力学(II)》的第三章中讨论。

例题2－6　试计算例题2－5中结构的应变能，并求结点 A 的位移 Δ_A。

解：在例题2－5中已知组成该结构的两杆材料相同，长度和横截面面积相等，受力也相等。因此，两杆的应变能必相等。根据式(2－9b)求得结构的应变能为

$$V_\varepsilon = 2\frac{F_{N1}^2 l}{2EA} = \frac{P^2 l}{(2\cos\alpha)^2 EA}$$

$$= \frac{(100\times10^3\ \text{N})^2(2\ \text{m})}{(2\cos30^\circ)^2(210\times10^9\ \text{Pa})\left[\frac{\pi}{4}(25\times10^{-3}\ \text{m})^2\right]}$$

$$= 64.67\ \text{N}\cdot\text{m}$$

因结点 A 的位移 Δ_A 与荷载 P 的方向相同，由弹性体的功能原理，荷载 P 所作的功在数值上应等于该结构之应变能，即

$$\frac{1}{2}P\Delta_A = V_\varepsilon$$

于是，可得结点 A 的位移为

$$\Delta_A = \frac{2V_\varepsilon}{P} = \frac{2\times64.67\ \text{N}\cdot\text{m}}{100\times10^3\ \text{N}} = 1.293\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$= 1.293\ \text{mm}(\downarrow)$$

所得位移 Δ_A 为正值，表示位移 Δ_A 的方向与力 P 的指向相同，即铅垂向下。

§2－6 材料在拉伸和压缩时的力学性能

在前面讨论的拉(压)杆的应力、变形计算中，曾涉及材料在轴向拉伸(压缩)时的力学性能，例如发生弹性变形的应力某一极限值、弹性模量等。在后面的拉(压)杆的强度计算中，还将涉及另外一些力学性能。材料的力学性能都要通过试验来测定，本节主要介绍工程中常用材料在拉伸和压缩时的力学性能。

Ⅰ. 材料的拉伸和压缩试验

在进行拉伸试验时，应将材料做成标准的试样，使其几何形状和受力条件都能符合轴向拉伸的要求。试验以前，先在试样的中间等直部分上划两条横线(图2－13)。当试样受力时，横线之间的一段杆中任何横截面上的应力均相同，这一段为杆的工作段。在试验时就量测工作段的变形。为了能比较不同粗细的试样在拉断后工作段的变形程度，通常对圆截面标准试样的工作段长度(称为标距) l 与其横截面直径 d 的比例加以规定。矩形截面标准试样，则规定其工作段长度 l 与横截面面积 A 的比例。常用的标准比例有两种，即

$$l = 10\,d \quad 和 \quad l = 5\,d \quad (对圆截面试样)$$

或

$$l = 11.3\sqrt{A} \quad 和 \quad l = 5.65\sqrt{A} \quad (对矩形截面试样)$$

压缩试样通常用圆截面或正方形截面的短柱体(图2－14a,b)，其长度 l 与

横截面直径d或边长b的比值一般规定为1到3，这样才能避免试样在试验过程中被压弯。

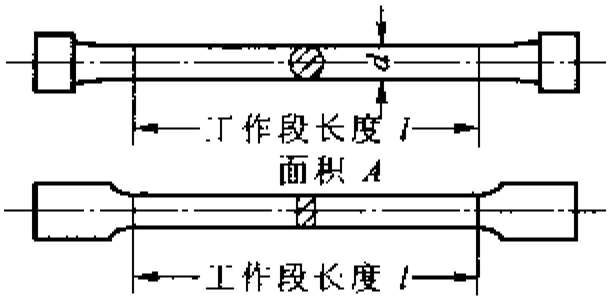


图 2-13

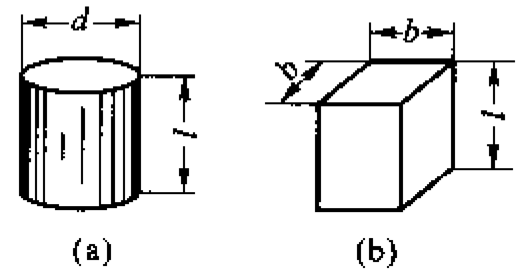


图 2-14

由于压缩试样的高度与宽度之间的比值较小，因而试样两端的端部影响必将波及整个试样。此外，试样受压后，其横向尺寸将增大，而试样的两端面与试验机承压平台间的摩阻力则阻止其扩大。这些因素将使压缩试样中的应力情况变得较为复杂，从而使试验所测定的在压缩时材料的力学性能带有一定的条件性。

拉伸或压缩试验时主要使用两类设备。一类是用来使试样发生变形（伸长或缩短）和测定试样的抗力（也就是§2-2中所说的内力）的**万能试验机**；另一类是用来量测试样变形的**变形仪**，将微小的变形放大，能在所需的精度范围内量测试样的变形。关于试验设备的具体构造和原理，可参看有关书籍①。

通常在实验室内所做的材料拉伸或压缩试验，是在室温（或称为常温）条件下按一般的变形速度进行的②。在上述条件下所得的材料的力学性能，即称为常温、静荷载下材料在拉伸或压缩时的力学性能。

II. 低碳钢试样的拉伸图及其力学性能

低碳钢是工程上最广泛使用的材料，同时，低碳钢试样在拉伸试验中所表现出的变形与抗力间的关系也比较典型。

一般万能试验机可以自动绘出试样在试验过程中工作段的伸长与抗力间定量的关系曲线。曲线以横坐标代表试样工作段的伸长量Δl，而以纵坐标代表万能试验机上的荷载（即试样的抗力）F，称为试样的**拉伸图**。

图2-15a所示为低碳钢试样的拉伸图。由图可见，低碳钢在整个拉伸试验过程中，其工作段的伸长量与荷载间的关系大致可分为以下四个阶段。

阶段 I 试样的变形完全是弹性的，全部卸除荷载后，试样将恢复其原长，这一阶段称为**弹性阶段**。低碳钢试样在此阶段内，其伸长量与荷载之间成正比

---

① 例如，贾有权主编，《材料力学实验》，第二版，高等教育出版社，1984年。

② 关于对试样的具体要求和测试条件，可参阅国家标准，例如，GB 228—1987《金属拉力试验法》，GB 1586—1979《金属材料杨氏模量测量方法》等。

关系，即式(2－5a)所表达的关系式

$$\Delta l=\frac{Fl}{EA}$$

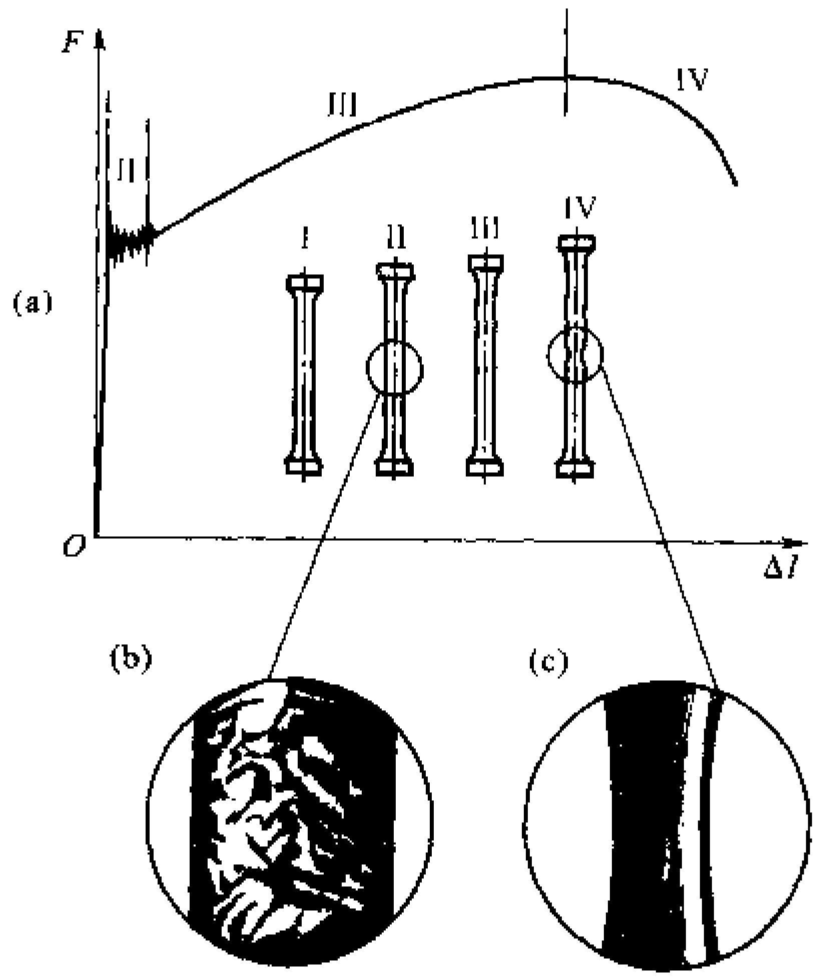


图 2－15

精确的量测虽指出伸长量与荷载间的关系和正比关系略有偏离，但从工程实用的精确度要求来看，此种微小的偏离是可以忽略不计的。

阶段 II　试样的伸长量急剧地增加，而万能试验机上的荷载读数却在很小的范围内波动。如果略去这种荷载读数的微小波动不计，则这一阶段在拉伸图上可用一水平线段来表示，即试样的荷载基本不变而试样却不断伸长。这一现象称为**屈服**，这一阶段则称为**屈服阶段**。屈服阶段出现的变形，是不可恢复的塑性变形。若试样经过抛光，则在试样表面将可看到大约与轴线成 45°方向的条纹(图 2－15b)，是由材料沿试样的最大切应力面发生滑移而出现的，称为**滑移线**。

阶段 III　试样经过屈服阶段后，若要使其继续伸长，由于材料在塑性变形过程中不断发生强化，因而试样中的抗力不断增长。这一阶段称为**强化阶段**。在强化阶段中试样的变形主要是塑性变形，所以要比在弹性阶段内试样的变形大得多。在此阶段中可以较明显地看到整个试样的横向尺寸在缩小。

阶段 IV　试样伸长到一定程度后，荷载读数反而逐渐降低。此时可以看到

试样某一段内的横截面面积显著地收缩，出现如图 2－15c 所示的“**缩颈**”现象。在试样继续伸长（主要是“缩颈”部分的伸长）的过程中，由于“缩颈”部分的横截面面积急剧缩小，因此，荷载读数（即试样的抗力）反而降低，一直到试样被拉断。这一阶段称为**局部变形阶段**。

若在强化阶段中停止加载，并逐渐卸除荷载，则可看到，在这一过程中荷载与试样的伸长量之间遵循直线关系，该直线 bc 与弹性阶段内的直线 Oa（图 2－16）近乎平行。卸载时荷载与伸长量之间遵循直线关系的规律称为材料的**卸载规律**。由此可见，在强化阶段中，试样的变形包括弹性变形 Δl_e 和塑性变形 Δl_p 两部分（图 2－16），在卸载过程中，弹性变形逐渐消失，只留下塑性变形。

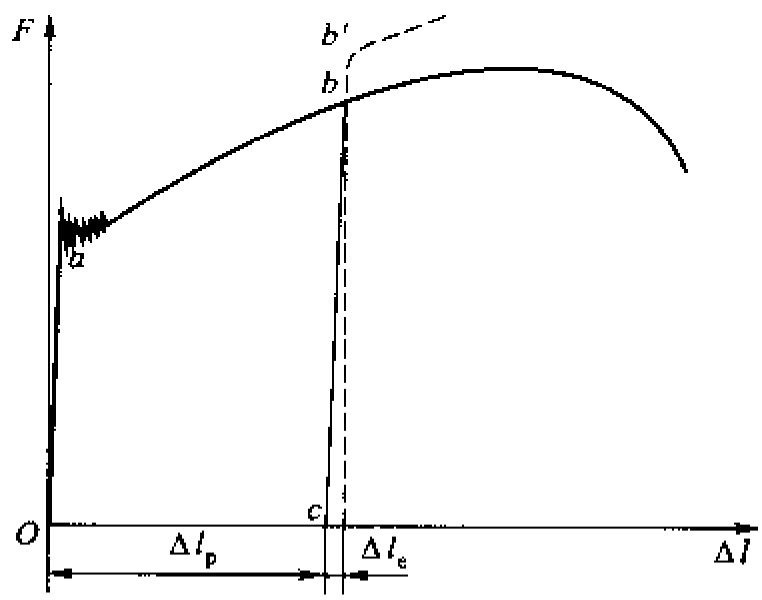


图 2－16

如果卸载后立即再加荷载，则荷载与伸长量间基本上仍遵循着卸载时的同一直线关系，一直到开始卸载时的荷载为止。再往后则大体上遵循着原来拉伸图的曲线关系。

若对试样预先施加轴向拉力，使之达到强化阶段，然后卸载（例如在图 2－16 中的 b 点处卸载），则当再加荷载时，试样在线弹性范围内所能承受的最大荷载将增大，而试样所能经受的塑性变形降低（图 2－17）。这一现象称为材料的**冷作硬化**。在工程上常利用冷作硬化来提高钢筋和钢缆绳等构件在线弹性范围内所能承受的最大荷载。值得注意的是，若试样拉伸至强化阶段后卸载，经过一段时间后再受拉，则其线弹性范围的最大荷载还有所提高，如图 2－16 中虚线 cb' 所示。这种现象称为**冷作时效**。冷作时效不仅与卸载后至加载的时间

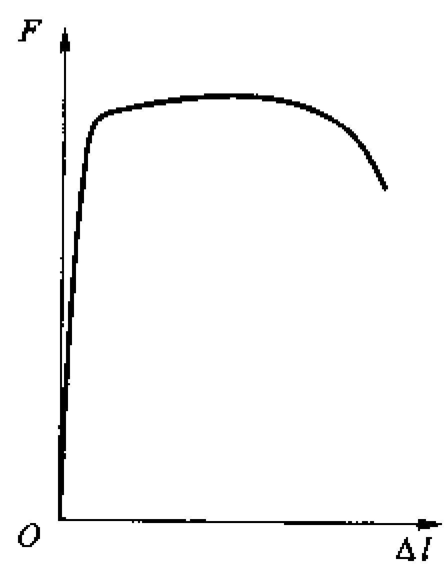


图 2－17

间隔有关，而且与试样所处的温度有关。较详细的讨论可参阅有关书籍[①]。

低碳钢试样的拉伸图只能代表试样的力学性能，因为该图的横坐标和纵坐标均与试样的几何尺寸有关。若将拉伸图的纵坐标即荷载 F 除以试样横截面的原面积 A，将其横坐标即伸长量 Δl 除以试样工作段的原长 l，所得曲线即与试样的尺寸无关，而可以代表材料的力学性能，称为**应力－应变曲线**或 **$\sigma-\varepsilon$ 曲线**。

低碳钢的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线如图 2－18 所示，其纵坐标

$$\sigma=\frac{F}{A}$$

实质上是名义应力（称为工程应力），因为超过屈服阶段以后，试样横截面面积显著缩小，仍用原面积求得的应力并不能表示试样横截面上的真实应力。曲线的横坐标

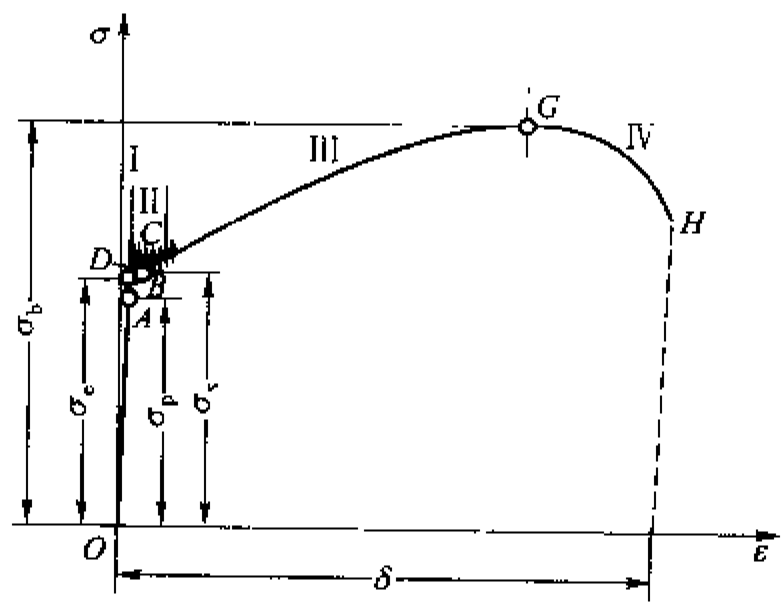


图 2－18

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$$

实质上也是名义应变（称为工程应变，并通常用百分数表示），因为超过屈服阶段之后，试样的长度显著增加，用原长 l 求得的应变也不能表示试样的真实应变。

现在来研究 $\sigma-\varepsilon$ 曲线（图 2－18）各阶段中的几个特征点及其相应的含义。

在弹性阶段内，A 点是应力与应变成正比即符合胡克定律的最高限，与之对应的应力称为材料的**比例极限**，以 σ_p 表示。弹性阶段的最高点 B 是卸载后不发生塑性变形的极限，而与之对应的应力称为材料的**弹性极限**，并以 σ_e 表示。

由于这两个极限应力在数值上相差不大，在实测中很难区分，因此在工程实用中通常并不区分材料的这两个极限应力，而统称为弹性极限。

① 例如，天津大学、同济大学、南京工学院编《钢筋混凝土结构》，中国建筑工业出版社，1985 年。

在屈服阶段内，应力 σ 有幅度不大的波动，其最高点 C 的应力为**屈服高限**，而最低点 D 的应力为**屈服低限**。试验指出，加载速度等很多因素对屈服高限的数值有影响，而屈服低限值则较为稳定。因此，通常将屈服低限称为材料的**屈服点应力**或**屈服极限**，并以 σ_s 表示①。

在强化阶段里，G 点是该阶段的最高点，即试样中的名义应力的最大值，G 点的名义应力称为材料的**强度极限**或**拉伸强度**，以 σ_b 表示。

对低碳钢来讲，极限应力 σ_s 和 σ_b 是衡量材料强度的两个重要指标。

$\sigma-\varepsilon$ 曲线（图 2－18）横坐标上的 δ 代表试样拉断后的塑性变形程度，其值等于试样的工作段在拉断后的长度 l_1 与其原长 l 之差除以 l，通常用百分数表示，称为**伸长率**，即

$$\delta=\frac{l_1-l}{l}\times 100\%$$

此值的大小表示材料在拉断前能发生的最大的塑性变形程度，是衡量材料塑性的一个重要指标。

试样拉断后的长度 l_1 内既包括了整个工作段的均匀伸长，也包括“缩颈”部分的局部伸长。由于前者与工作段的原长有关，而后者则仅与工作段的横截面尺寸有关，因此，伸长率 δ 的大小就和试样工作段的长度与横截面尺寸的比值有关。考虑到这一因素，对标准拉伸试样，要规定其工作段长度与横截面尺寸的比值。通常不加说明的 δ 是 $l=10\,d$ 标准试样的伸长率。

衡量材料塑性的另一个指标为**断面收缩率** ψ，其定义为

$$\psi=\frac{A-A_1}{A}\times 100\%$$

式中，A_1 代表试样在拉断后断口处的最小横截面面积。

对于 Q235 钢，衡量其强度和塑性指标的平均约值为

$$\sigma_s=240\ \text{MPa},\qquad \sigma_b=390\ \text{MPa}$$

$$\delta=20\%\sim30\%,\qquad \psi=60\%\text{左右}$$

这种 δ 和 ψ 数值均较高的材料，通常称为**塑性材料**。

III. 其他金属材料在拉伸时的力学性能

与低碳钢在 $\sigma-\varepsilon$ 曲线上相似的材料，还有 16 锰钢以及另外一些高强度低合金钢。它们与低碳钢相比，屈服极限和强度极限都显著地提高了，而屈服阶段则稍短且伸长率略低。

对于其他金属材料，$\sigma-\varepsilon$ 曲线并不都像低碳钢那样具备四个阶段。图

① 在国家标准 GB 228—1987 中规定，以不计初始瞬时效应时的最小荷载来计算屈服极限。

2－19中给出了另外几种典型的金属材料在拉伸时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线。将这些曲线与图2－18相比较，可以看出：有些材料例如铝合金和退火球墨铸铁没有屈服阶段，而其他三个阶段却很明显；另外一些材料例如锰钢则仅有弹性阶段和强化阶段，而没有屈服阶段和局部变形阶段。这些材料的共同特点是伸长率 δ 均较大，它们和低碳钢一样都属于塑性材料。

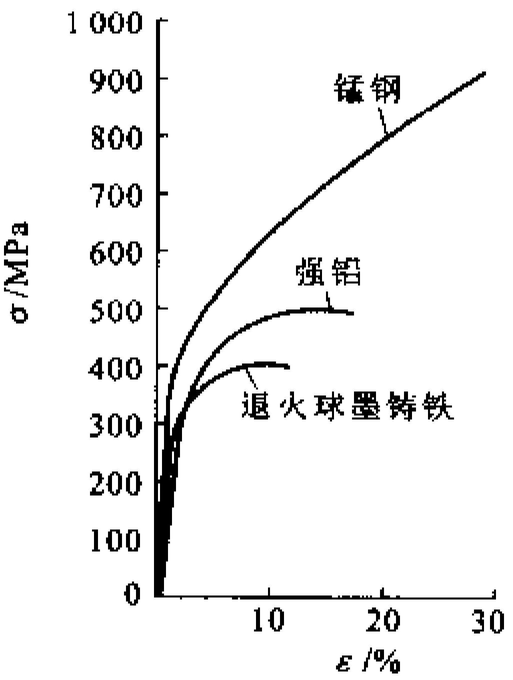


图 2－19

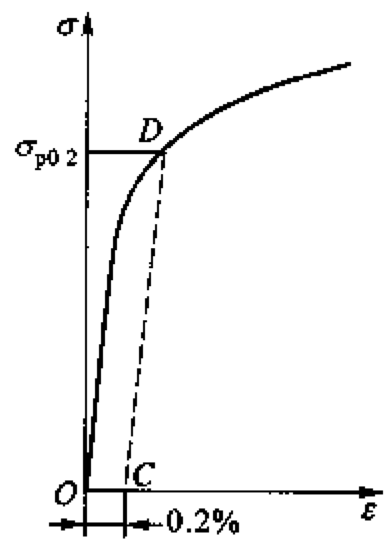


图 2－20

对于没有屈服阶段的塑性材料，通常将对应于塑性应变 $\varepsilon_p=0.2\%$ 时的应力定为**规定非比例伸长应力**或**屈服强度**，并以 $\sigma_{p0.2}$ 表示。这是一个人为规定的极限应力，作为衡量材料强度的指标。确定 $\sigma_{p0.2}$ 数值的方法如图2－20所示。图中的直线 CD 与弹性阶段内的直线部分相平行。

另外一类典型材料的共同特点是伸长率 δ 均很小。这类材料称为**脆性材料**。通常以伸长率 $\delta<2\%\sim5\%$ 作为定义脆性材料的界限。图2－21所示的就是脆性材料灰口铸铁在拉伸时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线。灰口铸铁的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线从很低的应力开始就不是直线，但由于直到拉断时试样的变形都非常小，且没有屈服阶段、强化阶段和局部变形阶段，因此，在工程计算中，通常取总应变为0.1%时 $\sigma-\varepsilon$ 曲线的割线（图2－21中的虚线）斜率来确定其弹性模量，称为**割线弹性模量**。

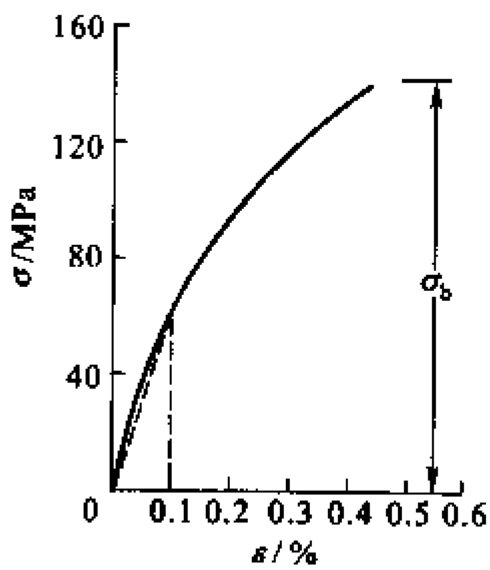


图 2－21

衡量脆性材料拉伸强度的唯一指标是材料的拉伸强度 σ_b。这个应力可看成是试样被拉断时的真实应力，因为脆性材料的试样被拉断时，其横截面面积的

缩减极其微小。

例题 2-7 一根材料为 Q235 钢的拉伸试样，其直径 $d=10\ \text{mm}$，工作段长度 $l=100\ \text{mm}$。当试验机上荷载读数达到 $F=10\ \text{kN}$ 时，量得工作段的伸长为 $\Delta l=0.0607\ \text{mm}$，直径的缩小为 $\Delta d=0.0017\ \text{mm}$。试求此时试样横截面上的正应力 σ，并求出材料的弹性模量 E 和泊松比 ν。已知 Q235 钢的比例极限为 $\sigma_p=200\ \text{MPa}$。

解：$F=10\ \text{kN}$ 时，试样横截面上的正应力为

$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{F}{\frac{\pi}{4}d^2}=\frac{10\times10^3\ \text{N}}{\frac{\pi}{4}(1\times10^{-2}\ \text{m})^2}$$

$$=127.3\times10^6\ \text{Pa}=127.3\ \text{MPa}$$

其值低于材料的比例极限，故可由式(2-6)和(2-7a)分别计算 E 和 ν。为此，先分别求出试样的纵向线应变 ε 和横向线应变 ε' 值：

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}=\frac{0.0607\times10^{-3}\ \text{m}}{0.1\ \text{m}}=6.07\times10^{-4}$$

和

$$\varepsilon'=\frac{\Delta d}{d}=\frac{-0.0017\times10^{-3}\ \text{m}}{10\times10^{-3}\ \text{m}}=-1.7\times10^{-4}\quad(\text{因 }\Delta d\text{ 为缩小量，故取负值})$$

将已算得的 σ 和相应的 ε 代入式(2-6)，得

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{127.3\times10^6\ \text{Pa}}{6.07\times10^{-4}}=210\times10^9\ \text{Pa}=210\ \text{GPa}$$

将已算得的 ε 和 ε' 代入式(2-7a)，得

$$\nu=-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=-\frac{(-1.7\times10^{-4})}{6.07\times10^{-4}}=0.28$$

IV. 金属材料在压缩时的力学性能

首先介绍工程上常用的低碳钢在压缩时的力学性能。将短圆柱体压缩试样置于万能试验机的承压平台间，并使之发生压缩变形。与拉伸试验相同，绘出试样在试验过程中的缩短量 Δl 与抗力 F 之间的关系曲线。这一曲线称为试样的**压缩图**。为了使得到的曲线与所用试样的横截面面积和长度无关，同样可用试样的名义应力作纵坐标，而以其名义应变作横坐标，将压缩图改画成 $\sigma-\varepsilon$ 曲线，如图 2-22 中的实线所示。为了便于比较材料在拉伸和压缩时的力学性能，在图中以虚线绘出了低碳钢在拉伸时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线。

由图 2-22 中的低碳钢在拉伸和压缩时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线可以看出：在屈服阶段以前，两曲线基本上是重合的，进入强化阶段后，试样在压缩时名义应力的增长率随着 ε 的增加而越来越大，因为到了强化阶段，试样的横截面面积逐渐增

大,而计算名义应力时仍采用试样的原来面积。此外,由于试样的横截面面积越压越大,使得低碳钢试样的压缩强度 σ_{bc} 无法测定。

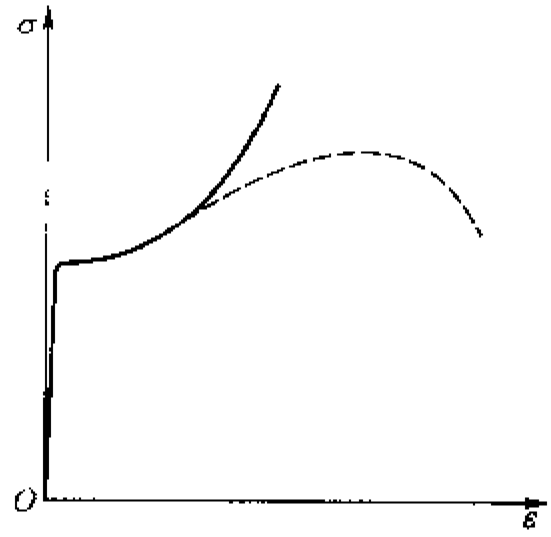


图 2-22

从图 2-22 可见,低碳钢试样在拉伸和压缩时的屈服极限基本上是相同的,其弹性模量也相同。而由于压缩时试样的压缩强度无法测定,所以,对于低碳钢,从拉伸试验的结果就可以了解其在压缩时的主要力学性能。

类似情况在一般的塑性材料中也存在。但有些材料(例如铬钼硅合金钢)在拉伸和压缩时的屈服极限并不相同,因此,对这些材料需要做压缩试验,以确定其压缩屈服极限。

这类材料的试样在压缩后的变形情况如图 2-23a 所示。试样的两端面由于受到摩擦力的影响,因此,变形后呈鼓状。



(a) (b)

图 2-23

与塑性材料不同,脆性材料在压缩和拉伸时的力学性能有较大的区别。例如,图 2-24 所示为灰口铸铁在拉伸(虚线)和压缩(实线)时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线[①],压缩试样的 $l:d=5:1$。比较这两条曲线可以看出:(1) 铸铁在压缩时无论是强度极限还是伸长率都比在拉伸时要大得多,因而这种材料宜用作受压构件;(2) 铸铁无论在拉伸或压缩时,其 $\sigma-\varepsilon$ 曲线中的直线部分都很短,因此,只能认为是近似地符合胡克定律的。

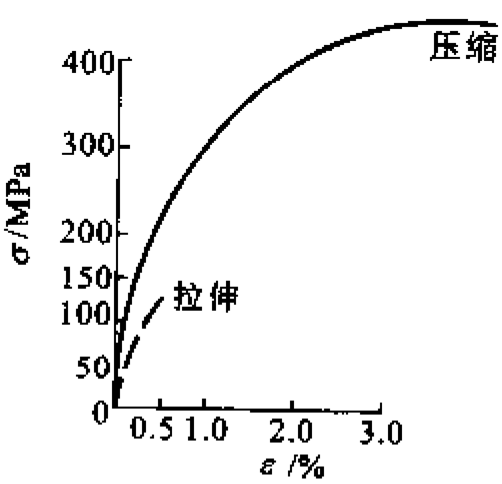


图 2-24

铸铁试样受压破坏的情况如图 2-23b 所

① 本图曲线引自:老亮、宋先郎,"灰铸铁应力-应变图中一个值得商榷的问题",《国防科技大学学报》,1981 年,第 3 期。

示。试样受压时将沿与轴线大致成 50°～55°倾角的斜截面发生错动而破坏。

值得注意的是，根据材料在常温、静荷载下拉伸试验所得的伸长率大小，将材料区分为塑性材料和脆性材料。这两类材料在力学性能上的主要差异是：塑性材料在断裂前的变形较大，塑性指标（伸长率和断面收缩率）较高，抵抗拉断的能力较好，其常用的强度指标是屈服极限，而且，一般地说，在拉伸和压缩时的屈服极限值相同；脆性材料在断裂前的变形较小，塑性指标较低，其强度指标是强度极限，而且其拉伸强度 σ_b 远低于压缩强度 σ_{bc}。但是，材料是塑性的还是脆性的，将随材料所处的温度、应变率和应力状态等条件的变化而不同。例如，具有尖锐切槽的低碳钢试样，在轴向拉伸时将在切槽处发生突然的脆性断裂；而在很大的外压作用下，铸铁试样在轴向拉伸时也将发生大的塑性变形和缩颈现象。

V．几种非金属材料的力学性能

一、混凝土

混凝土是由水泥、石子和砂加水搅拌均匀经水化作用后而成的人造材料。由于石子粒径较构件尺寸要小得多，故可近似地看作匀质、各向同性材料。

混凝土和天然石料都是脆性材料，一般都用作压缩构件。混凝土的压缩强度是以标准的立方体试块，在标准养护条件下经过 28 天养护后进行测定的。混凝土的标号就是根据其压缩强度标定的。

混凝土压缩时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线如图 2－25a 所示。在加载初期有很短的一直线段，以后明显弯曲，在变形不大的情况下突然断裂。混凝土的弹性模量规定以 $\sigma=0.4\sigma_b$ 时的割线斜率来确定。混凝土在压缩试验中的破坏形式，与两端压板和试块的接触面的润滑条件有关。当润滑不好、两端面的摩阻力较大时，压坏后呈两个对接的截锥体（图 2－25b）；当润滑较好、摩阻力较小时则沿纵向开裂（图 2－25c）。两种破坏形式所对应的压缩强度也有差异。因此，在这类材料的压缩试验中还规定其端部条件，这样所得的压缩强度才能作为衡量材料强度的一种比较性指标。

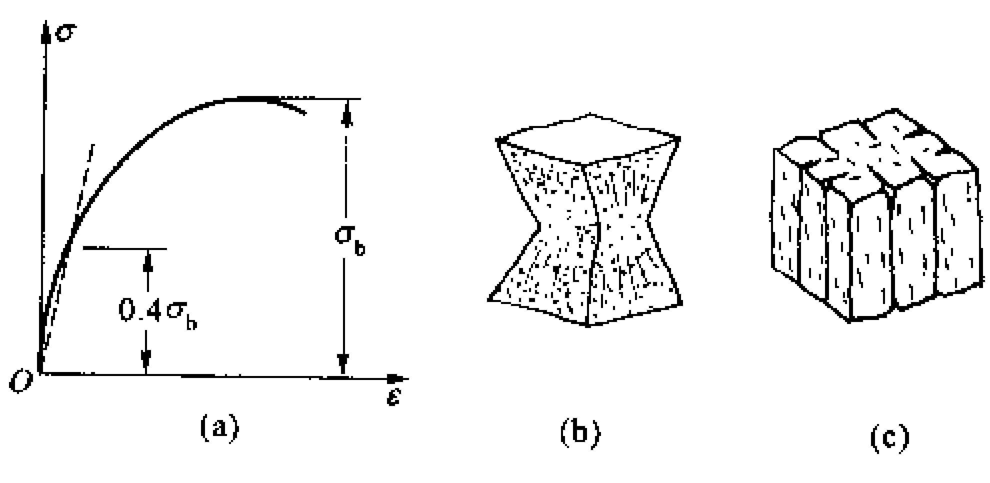


图 2－25

混凝土的拉伸强度很小，约为压缩强度的1/5～1/20，故在用作弯曲构件时，其受拉部分一般用钢筋来加强（称为钢筋混凝土），在计算时就不考虑混凝土的拉伸强度。

二、木材

木材的力学性能随应力方向与木纹方向间倾角的不同而有很大的差异，即木材的力学性能具有方向性，称为**各向异性材料**。由于木材的组织结构对于平行于木纹（称为顺纹）和垂直于木纹（称为横纹）的方向基本上具有对称性，因而其力学性能也具有对称性。这种力学性能具有三个相互垂直的对称轴的材料，称为**正交各向异性材料**（图2－26）。

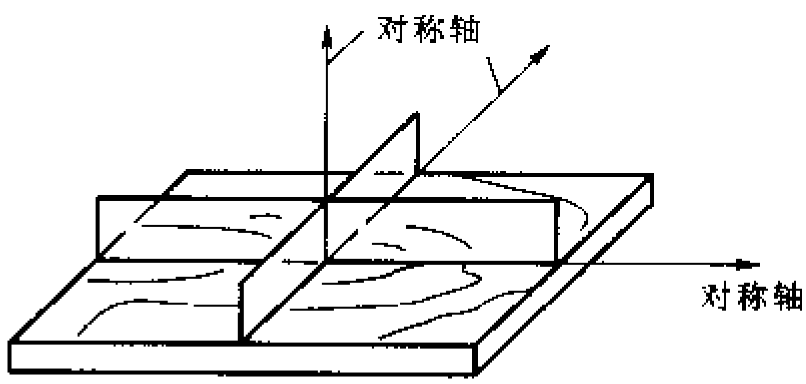


图2－26

松木在顺纹拉伸、压缩和横纹压缩时，其$\sigma-\varepsilon$曲线的大致形状如图2－27所示。木材的顺纹拉伸强度很高，但因受木节等缺陷的影响，其强度极限值波动很大。木材的横纹拉伸强度很低，工程中应避免横纹受拉。木材的顺纹压缩强度虽稍低于顺纹拉伸强度，但受木节等缺陷的影响较小，因此，在工程中广泛用作柱、斜撑等承压构件。木材在横纹压缩时，其初始阶段的应力－应变关系基本上成线性关系，当应力超过比例极限后，曲线趋于水平，并产生很大的塑性变形，工程中通常以其比例极限作为强度指标。

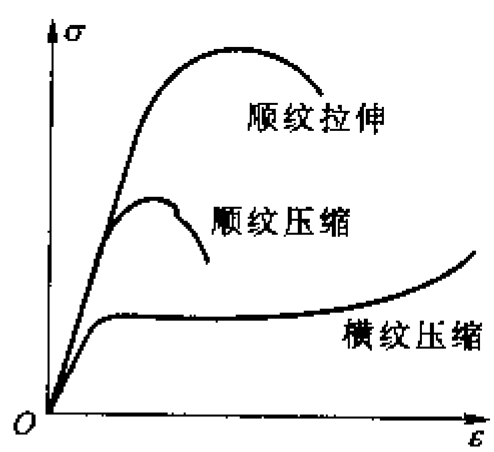


图2－27

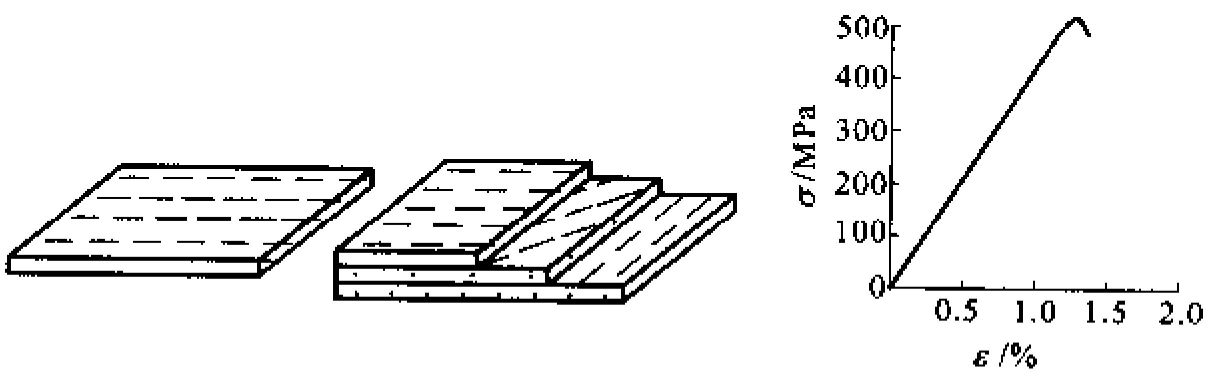
由于木材的力学性能具有方向性，因而在设计计算中，其弹性模量E和许用应力$[\sigma]$，都应随应力方向与木纹方向间倾角的不同而采用不同的数值，详情可参阅《木结构设计规范》。

三、玻璃钢

玻璃钢是由玻璃纤维（或玻璃布）作为增强材料，与热固性树脂粘合而成的一种复合材料。玻璃钢的主要优点是重量轻，比强度（拉伸强度/密度）高，成型

工艺简单，且耐腐蚀、抗振性能好。因此，玻璃钢作为结构材料在工程中得到广泛应用。我国自行设计制造的双层列车车厢，就已经采用了玻璃钢材料。

玻璃钢的力学性能与所用的玻璃纤维（或玻璃布）和树脂的性能，以及两者的相对用量和相互结合的方式有关。玻璃纤维（或玻璃布）可以是同一方向排列的（图 2-28a），也可以将每层按不同方向叠合粘结在一起（图 2-28b）。纤维呈单向排列的玻璃钢沿纤维方向拉伸时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线如图 2-28c 所示，直至断裂前，基本上是线弹性的。由于纤维的方向性，显然，玻璃钢的力学性能是各向异性的。关于玻璃钢在纤维排列方式不同和应力作用方向不同时的力学计算，可参阅有关复合材料力学的书籍[①]。



(a)　(b)　(c)

图 2-28

近代的纤维增强复合材料所用的增强纤维，已发展为强度更高的碳纤维、硼纤维等，从力学计算的角度来看，基本上与玻璃钢相仿。

最后必须指出，本节讨论的几种在土建工程中常用的材料的力学性能，都是在常温、静荷载条件下由实验测定的。材料在高温或低温下的力学性能与常温下并不相同，不仅与温度值有关，而且与荷载的作用时间有关。而荷载的作用方式（如冲击荷载或随时间作周期性变化的交变荷载等）对材料的力学性能也将产生明显的影响。有关这方面的详细讨论见《材料力学（II）》中的第七章。

§2-7　强度条件·安全因数·许用应力

I. 拉（压）杆的强度条件

由式（2-3）求得拉（压）杆的最大工作应力后，并不能判断杆件是否会因强度不足而发生破坏。只有把杆件的最大工作应力与材料的强度指标联系起来，才有可能作出判断。

① 例如，R. M. 琼斯著《复合材料力学》，朱颐龄等译，上海科学技术出版社，1981 年。

为便于说明问题，将材料的两个强度指标 σ_s 和 σ_b 统称为**极限应力**，并用 σ_u 表示。为确保拉(压)杆不致因强度不足而破坏，杆件的最大工作应力 σ_{max} 应小于材料的极限应力 σ_u，可规定为极限应力 σ_u 的若干分之一，并称为材料在拉伸(压缩)时的**许用应力**，以 $[\sigma]$ 表示，即

$$[\sigma]=\frac{\sigma_u}{n} \tag{2-11}$$

式中，n 是一个大于 1 的因数，称为**安全因数**。关于安全因数的确定，将在下面进一步讨论。于是，为确保拉(压)杆不致因强度不足而破坏的强度条件为

$$\sigma_{max}\leqslant[\sigma] \tag{2-12}$$

对于等截面直杆，拉伸(压缩)时的强度条件，可改写为

$$\frac{F_{N,max}}{A}\leqslant[\sigma] \tag{2-13}$$

根据拉(压)杆的强度条件，可对其进行强度计算。通常强度计算有以下三种类型：(1) 强度校核；(2) 截面选择；(3) 计算许可荷载。

在已知拉(压)杆的材料、尺寸及所受荷载的情况下，检验构件能否满足上述强度条件，称为强度校核。

已知拉(压)杆所受荷载及所用材料，按强度条件选择杆件的横截面面积或尺寸，称为截面选择。为此可将式(2-13)改写为

$$A\geqslant\frac{F_{N,max}}{[\sigma]}$$

当选用标准截面时，可能会遇到为满足强度条件而将采用过大截面的情况。为经济起见，此时可以考虑采用小一号的截面，但由此而引起的最大工作应力超过许用应力的百分数，在设计规范上有具体规定，一般限制在 5% 以内。

已知拉(压)杆的材料和尺寸，也可以按强度条件来确定杆所能容许的最大轴力，并从而计算出它所允许承受的荷载，称为许可荷载计算。此时式(2-13)可改写为

表 2-2 常用材料的许用应力约值

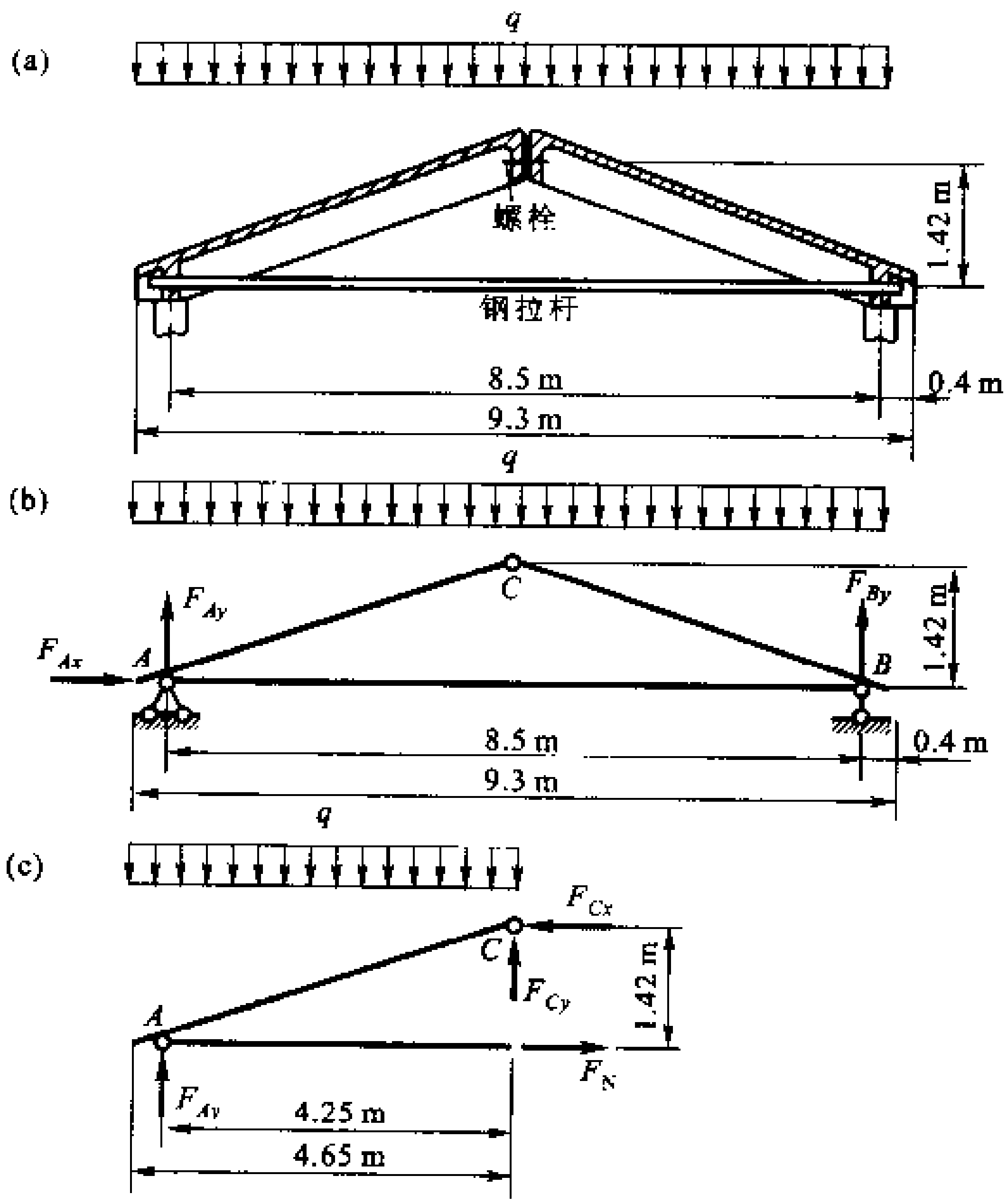
(适用于常温、静荷载和一般工作条件下的拉杆和压杆)

材料名称	牌号	许用应力/MPa	
		轴向拉伸	轴向压缩
低碳钢	Q235	170	170
低合金钢	16Mn	230	230
灰口铸铁		34～54	160～200
混凝土	C20	0.44	7
混凝土	C30	0.6	10.3
红松(顺纹)		6.4	10

$$F_{N,max} \leqslant A[\sigma]$$

在以上的计算中,都要用到材料的许用应力。工程上常用材料在一般情况下的许用拉(压)应力的约值在表2-2中给出。

例题2-8 三铰屋架的主要尺寸如图a所示,承受长度为 $l=9.3$ m 的竖向均布荷载沿水平方向的集度为 $q=4.2$ kN/m。屋架中的钢拉杆直径 $d=16$ mm,许用应力$[\sigma]=170$ MPa。试校核拉杆的强度。



例题2-8图

解:(1) 作计算简图:由于两屋面板之间和拉杆与屋面板之间的接头难以阻止微小的相对转动,故可将接头看作铰接,于是得屋架的计算简图如图b所示。

(2) 求支反力:从屋架整体(图b)的平衡方程$\sum F_x=0$,得

$$F_{Ax}=0$$

为了简便,可利用对称关系得

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{1}{2}ql = \frac{1}{2}(4.2\times10^3\ \text{N/m})(9.3\ \text{m}) = 19.5\times10^3\ \text{N}$$

$$= 19.5\ \text{kN}$$

(3) 求拉杆的轴力 F_N：取半个屋架为分离体(图 c)，从平衡方程

$$\sum M_C = 0,\ (1.42\ \text{m})F_N + \frac{(4.65\ \text{m})^2}{2}q - (4.25\ \text{m})F_{Ay} = 0$$

及 $q = 4.2$ kN/m 和 $F_{Ay} = 19.5$ kN 求得

$$F_N = 26.3\ \text{kN}$$

(4) 求拉杆横截面上的工作应力 σ：由拉杆直径 $d = 16$ mm 及轴力 F_N 得

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{26.3\times10^3\ \text{N}}{\frac{\pi}{4}(16\times10^{-3}\ \text{m})^2}$$

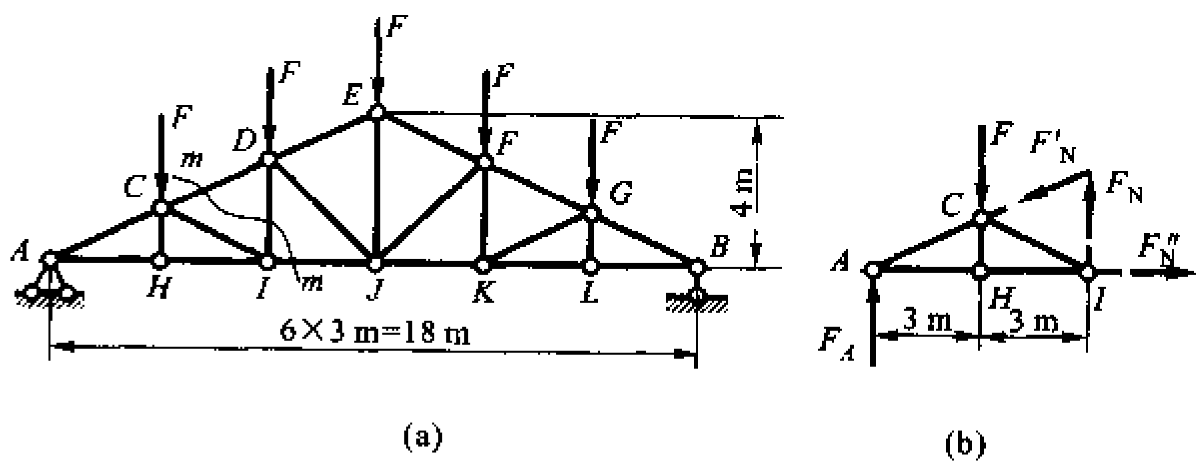
$$= 131\times10^6\ \text{Pa} = 131\ \text{MPa}$$

(5) 强度校核：因为

$$\sigma = 131\ \text{MPa} < [\sigma]$$

满足强度条件，故钢拉杆的强度是安全的。

例题 2－9　图 2－1 所示钢木组合桁架的尺寸及计算简图如图 a 所示。已知 $F = 16$ kN，钢的许用应力$[\sigma] = 120$ MPa。试选择钢拉杆 DI 的直径 d。



例题 2－9 图

解：首先求拉杆 DI 的轴力 F_N。为此，用一假想截面 $m-m$(图 a)截取桁架的 ACI 部分(图 b)，并研究其平衡。从平衡方程

$$\sum M_A = 0,\quad F_N\times6\ \text{m} - F\times3\ \text{m} = 0$$

得

$$F_N = \frac{F}{2} = 8\ \text{kN}$$

为了满足强度条件，拉杆 DI 所必需的横截面面积为

$$A = \frac{F_N}{[\sigma]} = \frac{8 \times 10^3\ \text{N}}{120 \times 10^6\ \text{Pa}} = 0.667 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

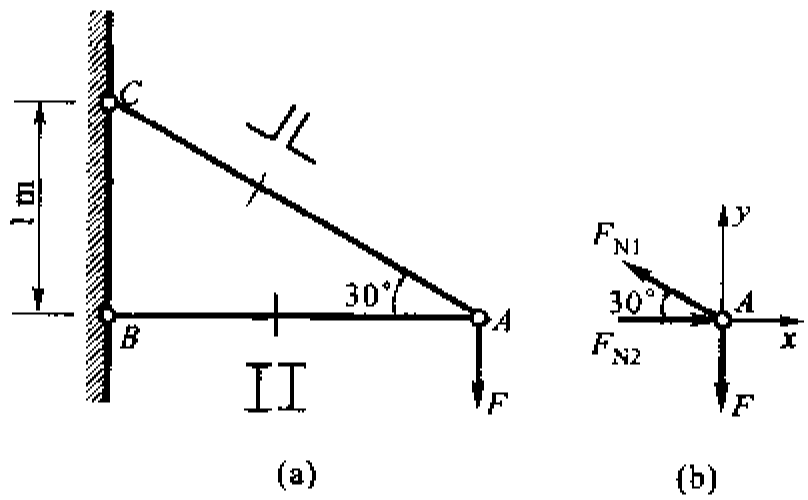
由此得该杆所必须具有的直径为

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}(0.667 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)} = 0.92 \times 10^{-2}\ \text{m} = 9.2\ \text{mm}$$

由于用作钢拉杆的圆钢的最小直径为 10 mm，故选用

$$d = 10\ \text{mm}$$

例题 2－10　简易起重设备(图 a)中，杆 AC 由两根 80 mm×80 mm×7 mm 等边角钢组成，杆 AB 由两根 10 号工字钢组成。材料为 Q235 钢，许用应力$[\sigma]$＝170 MPa。试求许可荷载$[F]$。



例题 2－10 图

解：(1) 求杆 AC 和杆 AB 的轴力 F_{N1} 和 F_{N2} 与荷载 F 的关系。取结点 A 为研究对象，并假设 F_{N1} 为拉力，F_{N2} 为压力，其受力图如图 b 所示。结点 A 的平衡方程为

$$\sum F_y = 0,\quad F_{N1}\sin 30° - F = 0$$
$$\sum F_x = 0,\quad F_{N2} - F_{N1}\cos 30° = 0$$

解得

$$F_{N1} = 2F,\quad F_{N2} = 1.732F \tag{1}$$

(2) 计算各杆的许可轴力。由型钢表查得杆 AC 的横截面面积 $A_1 = (1\,086 \times 10^{-6}\ \text{m}^2) \times 2 = 2\,172 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$，杆 AB 的横截面面积 $A_2 = (1\,430 \times 10^{-6}\ \text{m}^2) \times 2 = 2\,860 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$。根据强度条件

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \leqslant [\sigma]$$

并将 A_1,A_2 分别代入此式,得到许可轴力为

$$[F_{N1}]=(170\times10^6\ \mathrm{Pa})(2\,172\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2)=369.24\times10^3\ \mathrm{N}=369.24\ \mathrm{kN}$$

$$[F_{N2}]=(170\times10^6\ \mathrm{Pa})(2\,860\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2)=486.20\times10^3\ \mathrm{N}=486.20\ \mathrm{kN}$$

(3) 将$[F_{N1}]$和$[F_{N2}]$分别代入式(1),便得到按各杆强度要求所算出的许可荷载为

$$[F_1]=\frac{[F_{N1}]}{2}=\frac{369.24\ \mathrm{kN}}{2}=184.6\ \mathrm{kN}$$

$$[F_2]=\frac{[F_{N2}]}{1.732}=\frac{486.20\ \mathrm{kN}}{1.732}=280.7\ \mathrm{kN}$$

所以该结构的许可荷载应取$[F]=184.6\ \mathrm{kN}$。

事实上,压杆的许用应力在考虑到压杆稳定性时应该小于强度的许用应力。

II. 许用应力和安全因数

首先研究极限应力 σ_u 的选用。对于塑性材料制成的拉(压)杆,当它发生显著的塑性变形时,往往影响到它的正常工作,所以通常取屈服极限 σ_s 作为 σ_u;对于无明显屈服阶段的塑性材料,则用 $\sigma_{p0.2}$ 作为 σ_u。至于脆性材料,由于它直到破坏为止都不会产生明显的塑性变形,只有在真正断裂时才丧失正常工作能力,所以应取强度极限 σ_b 作为 σ_u。

选定了材料在拉伸(压缩)时的极限应力后,再研究定安全因数 n 的选取。以不同的强度指标作为极限应力,所用的安全因数 n 也就不同。塑性材料的安全因数是对应于屈服极限 σ_s 或 $\sigma_{p0.2}$ 的,以 n_s 表示。于是,塑性材料的许用拉(压)应力为

$$[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n_s}\quad 或\quad [\sigma]=\frac{\sigma_{p0.2}}{n_s}$$

脆性材料的安全因数则对应于拉伸(压缩)强度 $\sigma_b(\sigma_{bc})$,用 n_b 表示。所以,脆性材料的许用拉(压)应力为

$$[\sigma]=\frac{\sigma_b(\sigma_{bc})}{n_b}$$

由此可见,对许用应力数值的规定实质上是如何选择适当的安全因数。安全因数实质上包括了两方面的考虑:一方面是在强度条件中有些量的本身就存在着主观认识与客观实际间的差异;另一方面则是给构件以必要的强度储备。

主观认识与客观实际间的差异主要有以下几方面:(1) 极限应力的差异。材料的极限应力值是根据材料试验结果按统计方法得到的,材料产品的合格与否也只能凭抽样检查来确定,所以,实际使用的材料的极限应力值个别的有低于给定值的可能。(2) 横截面尺寸的差异。个别构件在经过加工后,其实际横截

面尺寸有可能比规定的尺寸小。(3) 荷载值的差异。实际荷载有可能超过在计算中所采用的标准荷载，例如百年难遇的风、雪荷载就可能超过在计算中所选用的数值。(4) 实际结构与其计算简图间的差异。将实际结构简化为计算简图，往往会因忽略了一些次要因素而带来偏于不安全的后果，例如例题 2-8 中三铰屋架的钢拉杆，其两端并非光滑铰接，拉力作用线也未必正好与杆轴线重合，但在计算简图中，这些次要因素都被略去了。这些差异都造成了偏于不安全的后果，因此，为从强度上确保构件能正常工作，就在强度条件中以安全因数的形式加以补偿。

至于强度储备，是考虑到构件在使用期内可能遇到意外的事故或其他不利的工作条件。对这些因素的考虑，应该和构件的重要性以及当构件损坏时后果的严重性等联系起来。这种强度储备也是以安全因数的形式加以考虑的。

从以上分析可见，规定安全因数的数值并不单纯是个力学问题，这里面同时还包括了工程上的考虑以及复杂的经济问题。下面粗略地给出安全因数的大致范围。在静荷载下，n_s 一般取为 1.25～2.5；在对荷载的考虑较全面、材料质量较均匀等有利条件下，n_s 可取较低值，反之则应取较高值。同样在静荷载下，n_b 一般取 2.5～3.0；有时可大到 4～14。由于脆性材料的破坏以断裂为标志，而塑性材料的破坏则以发生一定程度的塑性变形为标志，两者的危险性显然不同，且脆性材料的强度指标值的分散度较大。因此，对脆性材料要多给一些强度储备。

§2-8 应力集中的概念

§2-3 中的应力计算公式(2-2)只适用于等截面的直杆。对于横截面平缓地变化的拉(压)杆，按等截面直杆的应力计算公式进行计算，在工程计算中一般是允许的。但在工程实际中，由于结构或工艺上的要求，经常会碰到一些截面有骤然改变的杆件，例如具有螺栓孔的钢板、带有螺纹的拉杆，等等。在杆件的截面突然变化处，将出现局部的应力骤增现象。如图 2-29 所示具有小圆孔的均匀拉伸板，在通过圆心的横截面上的应力分布就不再是均匀的，在孔的附近处应力骤然增加，而离孔稍远处应力就迅速下降并趋于均匀。这种由杆件截面骤然变化(或几何外形局部不规则)而引起的局部应力骤增现象，称为**应力集中**。

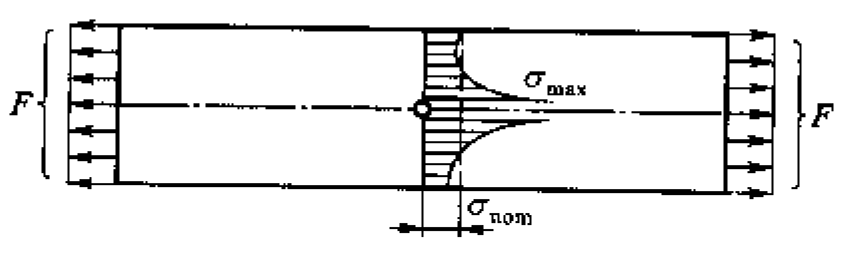


图 2-29

在杆件外形局部不规则处的最大局部应力 σ_{max}，必须借助于弹性理论、计算力学或实验应力分析的方法求得。在工程实际中，应力集中的程度用最大局部应力 σ_{max} 与该截面上的名义应力 σ_{nom}（轴向拉压时即为截面上的平均应力）的比值来表示，即

$$K_{t\sigma}=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \tag{2-14}$$

这一比值 $K_{t\sigma}$ 称为**理论应力集中因数**，其下标 σ 表示是正应力。

值得注意的是，应力集中并不是单纯由截面积的减小所引起的，杆件外形的骤然变化，是造成应力集中的主要原因。一般地说，杆件外形的骤变越是剧烈（即相邻截面的刚度差越大），应力集中的程度就越是严重。同时，应力集中是一种局部的应力骤增现象，如图 2－29 中具有小圆孔的均匀受拉平板，在孔边处的最大应力约为平均应力的 3 倍，而距孔稍远处，应力即趋于均匀。而且，应力集中处不仅最大应力急剧增长，其应力状态也与无应力集中时不同。

由塑性材料制成的杆件受静荷载作用时，由于一般塑性材料存在屈服阶段，当局部的最大应力达到材料的屈服极限时，若继续增加荷载，则其应力不增加，应变可继续增大，而所增加的荷载将由其余部分的材料来承受，直至整个截面上各点处的应力都达到屈服极限时，杆件才因屈服而丧失正常的工作能力。因此，由塑性材料制成的杆件，在静荷载作用下通常可不考虑应力集中的影响。对于由脆性材料或塑性差的材料（例如高强度钢）制成的杆件，在静荷载作用下，局部的最大应力就可能引起材料的开裂，因而应按局部的最大应力来进行强度计算。但是，脆性材料中的铸铁由于其内部组织很不均匀，本身就存在气孔、杂质等引起应力集中的因素，因此外形骤变引起的应力集中的影响反而很不明显，就可不考虑应力集中的影响。但在动荷载作用下，则不论是塑性材料，还是脆性材料制成的杆件，都应考虑应力集中的影响。有关动荷载下考虑应力集中影响的问题，将在《材料力学（II）》的第六章中讨论。

思 考 题

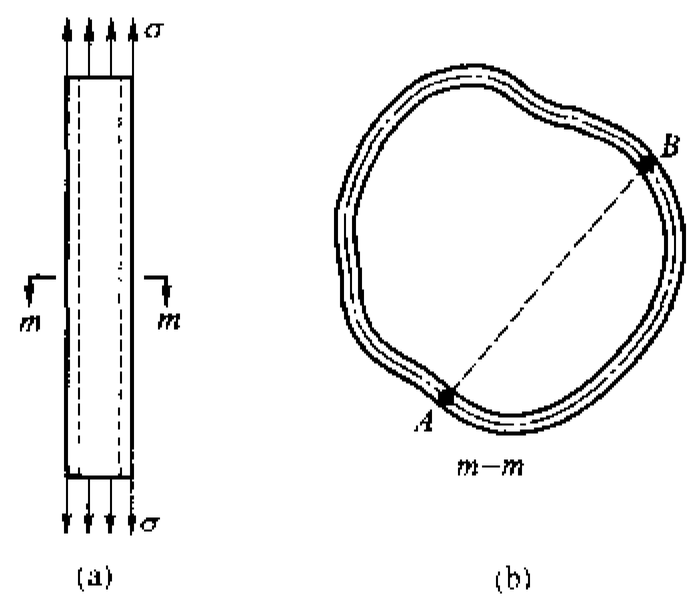
2－1 试论证杆件横截面上各点处的正应力若相等，则截面上法向分布内力的合力必通过横截面的形心。反之，法向分布内力的合力虽通过横截面的形心，但正应力在横截面上各点处却不一定相等。

2－2 横截面面积为 A，单位长度重量为 q 的无限长弹性杆，自由放在摩擦因数为 f 的粗糙表面上，如图所示。试求欲使该杆在端点产生位移 δ 时所需的力 F。已知杆的弹性模量为 E。



思考题 2－2 图

2－3 受轴向拉伸的闭合薄壁截面杆如图所示。已知 A，B 两点间的距离 a、材料的弹性常数 E，ν。试证明两点间距离的改变量为 $\Delta_{AB}=-\nu\sigma a/E$。



思考题 2－3 图

2－4　一根钢筋试样，其弹性模量 $E=210$ GPa，比例极限 $\sigma_p=210$ MPa；在轴向拉力 F 作用下，纵向线应变为 $\varepsilon=0.001$。试求钢筋横截面上的正应力。如果加大拉力 F，使试样的纵向线应变增加到 $\varepsilon=0.01$，问此时钢筋横截面上的正应力能否由胡克定律确定，为什么？

2－5　弹性模量 E 的物理意义是什么？如低碳钢的弹性模量 $E_s=210$ GPa，混凝土的弹性模量 $E_c=28$ GPa，试求下列各项：

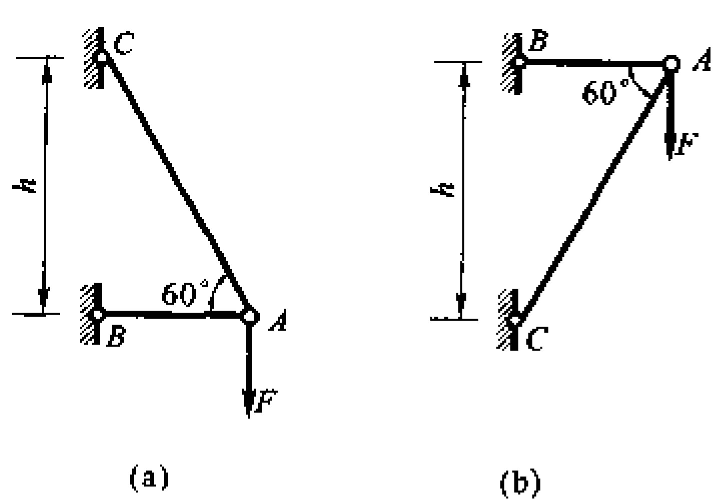
（1）在横截面上正应力 σ 相等的情况下，钢和混凝土杆的纵向线应变 ε 之比；

（2）在纵向线应变 ε 相等的情况下，钢和混凝土杆横截面上正应力 σ 之比；

（3）当纵向线应变 $\varepsilon=0.000\,15$ 时，钢和混凝土杆横截面上正应力 σ 的值。

2－6　若在受力物体内某点处，已测得 x 和 y 两方向均有线应变，则在 x 和 y 两方向是否都必定有正应力？若测得仅 x 方向有线应变，则是否 y 方向必无正应力？若测得 x 和 y 方向均无线应变，则是否 x 和 y 方向都必无正应力？

2－7　直径相同的铸铁圆截面杆，可设计成图 a 和图 b 所示的两种结构形式。试问哪种结构所承受的荷载 F 大？大多少？



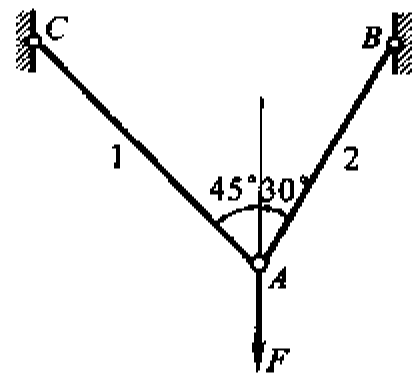
思考题 2－7 图

2－8　由某种材料制成的拉杆，如果实际上是由于 $\tau_{-45^\circ}=\tau_u$ 而引起强度破坏，试问是

否可用 $\sigma_{0^\circ}=\sigma_u$ 作为强度破坏的判据？这里 σ_u 和 τ_u 是指拉杆材料发生强度破坏时横截面上的正应力和45°斜截面上的切应力。

2－9　在低碳钢试样的拉伸图上，试样被拉断时的应力为什么反而比强度极限低？

2－10　在图示结构中，杆1和杆2的许用应力分别为 $[\sigma]_1$ 和 $[\sigma]_2$，横截面面积分别为 A_1 和 A_2，则两杆各自的许可轴力分别为 $[F_{N1}]=[\sigma]_1A_1$ 和 $[F_{N2}]=[\sigma]_2A_2$。若根据结点 A 的平衡条件 $\sum F_y=0$ 求得结构的许可荷载，则 $[F]=[F_{N1}]\cos 45^\circ+[F_{N2}]\cos 30^\circ$。试问结论是否正确？为什么？



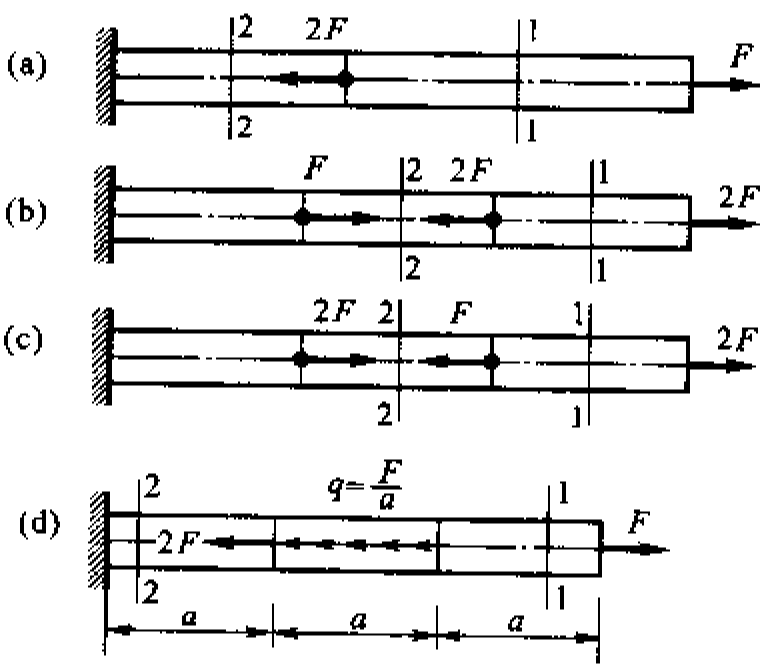
思考题 2－10 图

2－11　由脆性材料制成的受轴向拉伸的矩形截面杆，若有平行于轴线方向的裂纹，杆的强度是否会降低？若裂纹的方向与杆的轴线相垂直，杆的强度是否受影响？

2－12　试论述：为什么轴向拉(压)杆斜截面上的应力是均匀分布的？

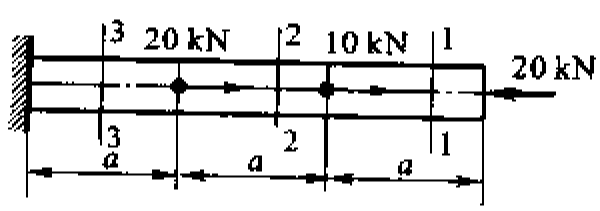
习　　题

2－1　试求图示各杆1－1和2－2横截面上的轴力，并作轴力图。

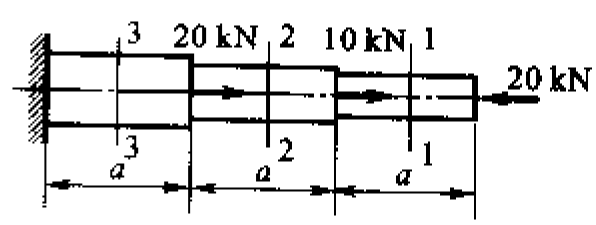


习题 2－1 图

2－2　试求图示等直杆横截面1－1，2－2和3－3上的轴力，并作轴力图。若横截面面积 $A=400\ \text{mm}^2$，试求各横截面上的应力。



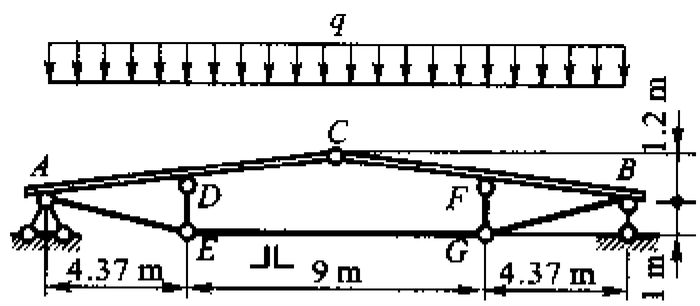
习题 2－2 图



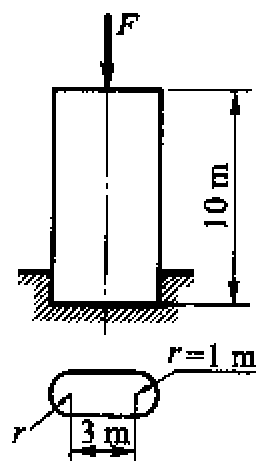
习题 2－3 图

2－3　试求图示阶梯状直杆横截面1－1，2－2和3－3上的轴力，并作轴力图。若横截面面积 $A_1=200\ mm^2$，$A_2=300\ mm^2$，$A_3=400\ mm^2$，并求各横截面上的应力。

2－4　图示一混合屋架结构的计算简图。屋架的上弦用钢筋混凝土制成。下面的拉杆和中间竖向撑杆用角钢构成，其截面均为两个75 mm×8 mm的等边角钢。已知屋面承受集度为 $q=20$ kN/m的竖直均布荷载。试求拉杆 AE 和 EG 横截面上的应力。



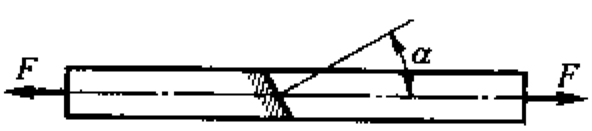
习题2－4图



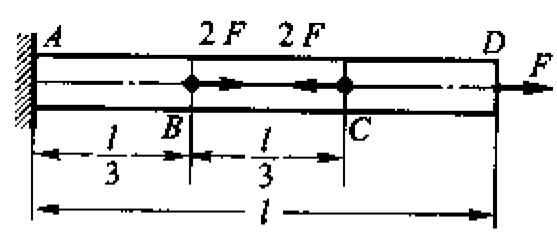
习题2－5图

2－5　石砌桥墩的墩身高 $l=10$ m，其横截面尺寸如图所示。如荷载 $F=1\ 000$ kN，材料的密度 $\rho=2.35\ kg/m^3$，试求墩身底部横截面上的压应力。

2－6　图示拉杆承受轴向拉力 $F=10$ kN，杆的横截面面积 $A=100\ mm^2$。如以 α 表示斜截面与横截面的夹角，试求当 $\alpha=0°,30°,45°,60°,90°$时各斜截面上的正应力和切应力，并用图表示其方向。



习题2－6图



习题2－7图

2－7　一根等直杆受力如图所示。已知杆的横截面面积 A 和材料的弹性模量 E。试作轴力图，并求杆端点 D 的位移。

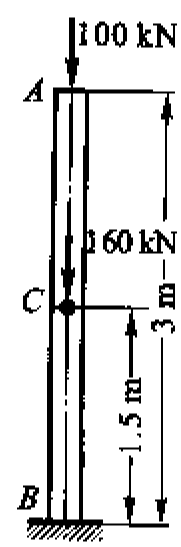
2－8　一木桩受力如图所示。柱的横截面为边长200 mm的正方形，材料可认为符合胡克定律，其弹性模量 $E=10$ GPa。如不计柱的自重，试求：

(1) 作轴力图；

(2) 各段柱横截面上的应力；

(3) 各段柱的纵向线应变；

(4) 柱的总变形



习题2－8图

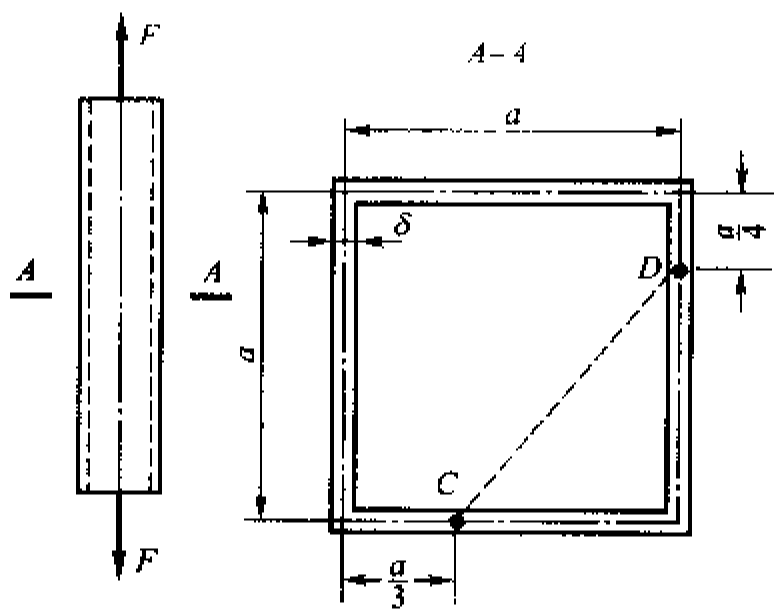
2－9　一根直径 $d=16$ mm、长 $l=3$ m的圆截面杆，承受轴向拉力 $F=30$ kN，其伸长为 $\Delta l=2.2$ mm。试求杆横截面上的应力与材料的弹性模量 E。

2－10 (1) 试证明受轴向拉伸(压缩)的圆截面杆横截面沿圆周方向的线应变 ε_s 等于直径方向的线应变 ε_d。

(2) 一根直径为 $d=10$ mm 的圆截面杆，在轴向拉力 F 作用下，直径减小 0.002 5 mm。如材料的弹性模量 $E=210$ GPa，泊松比 $\nu=0.3$，试求轴向拉力 F。

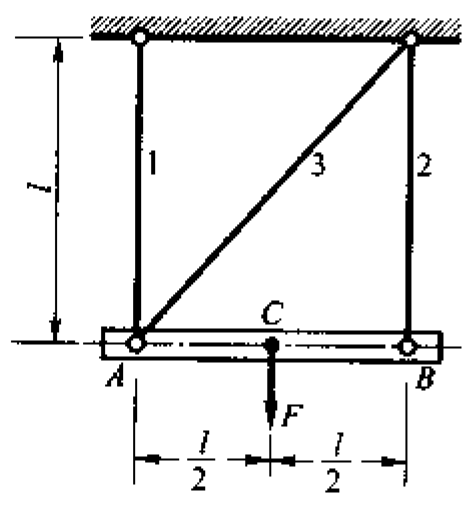
(3) 空心圆截面钢杆，外直径 $D=120$ mm，内直径 $d=60$ mm，材料的泊松比 $\nu=0.3$。当其受轴向拉伸时，已知纵向线应变 $\varepsilon=0.001$，试求其壁厚 δ。

2－11 受轴向拉力 F 作用的箱形薄壁杆如图所示。已知该杆材料的弹性常数为 E,ν，试求 C 与 D 两点间的距离改变量 Δ_{CD}。

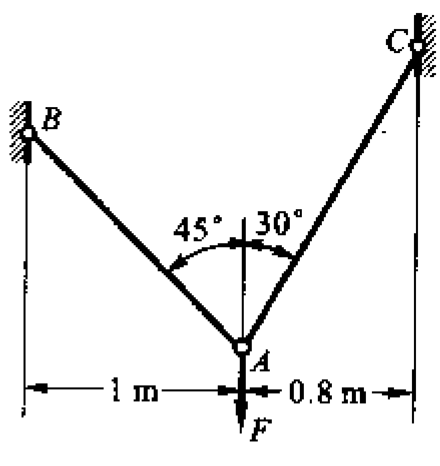


习题 2－11 图

2－12 图示结构中，AB 为水平放置的刚性杆，杆 1,2,3 材料相同，其弹性模量 $E=210$ GPa，已知 $l=1$ m，$A_1=A_2=100\ \text{mm}^2$，$A_3=150\ \text{mm}^2$，$F=20$ kN。试求 C 点的水平位移和铅垂位移。



习题 2－12 图



习题 2－13 图

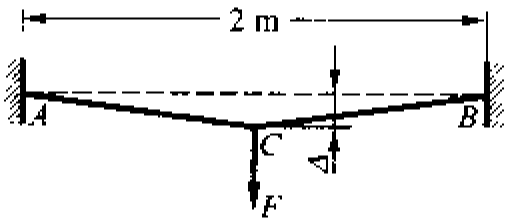
2－13 图示实心圆钢杆 AB 和 AC 在 A 点以铰相连接，在 A 点作用有铅垂向下的力 $F=35$ kN。已知杆 AB 和 AC 的直径分别为 $d_1=12$ mm 和 $d_2=15$ mm，钢的弹性模量 $E=210$ GPa。试求 A 点在铅垂方向的位移。

2－14　图示 A 和 B 两点之间原有水平方向的一根直径 $d=1$ mm 的钢丝，在钢丝的中点 C 加一竖直荷载 F。已知钢丝产生的线应变为 $\varepsilon=0.003\ 5$，其材料的弹性模量 $E=210$ GPa，钢丝的自重不计。试求：

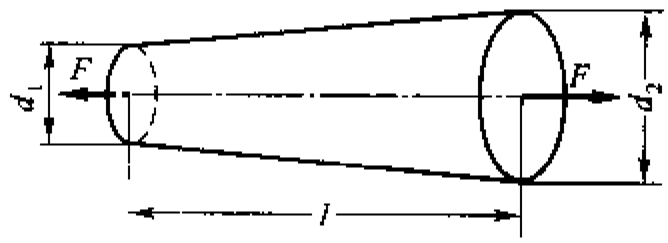
（1）钢丝横截面上的应力（假设钢丝经过冷拉，在断裂前可认为符合胡克定律）；

（2）钢丝在 C 点下降的距离 Δ；

（3）荷载 F 的值。



习题 2－14 图

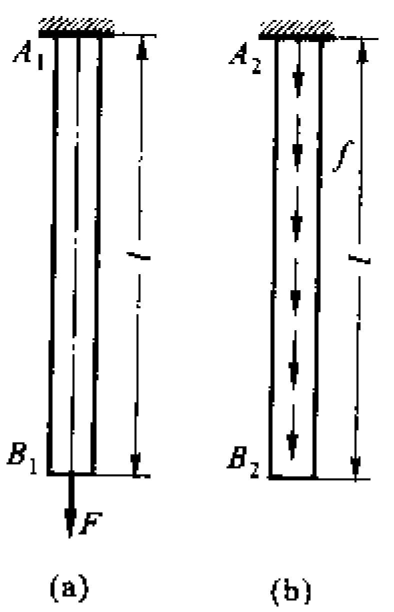


习题 2－15 图

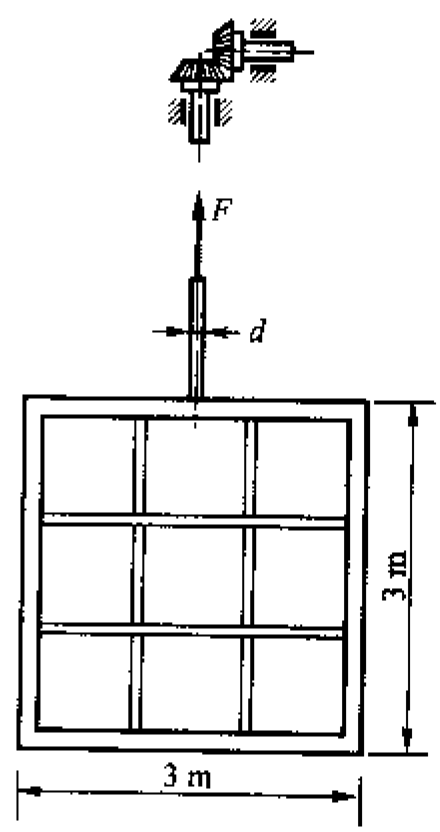
2－15　图示圆锥形杆受轴向拉力作用，试求杆的伸长。

2－16　有一长度为 300 mm 的等截面钢杆承受轴向拉力 $F=30$ kN。已知杆的横截面面积 $A=2\ 500\ \text{mm}^2$，材料的弹性模量 $E=210$ GPa。试求杆中所积蓄的应变能。

2－17　两根杆 A_1B_1 和 A_2B_2 的材料相同，其长度和横截面面积也相同。杆 A_1B_1 承受作用在端点的集中荷载 F；杆 A_2B_2 承受沿杆长均匀分布的荷载，其集度为 $f=\dfrac{F}{l}$。试比较这两根杆内积蓄的应变能。



习题 2－17 图

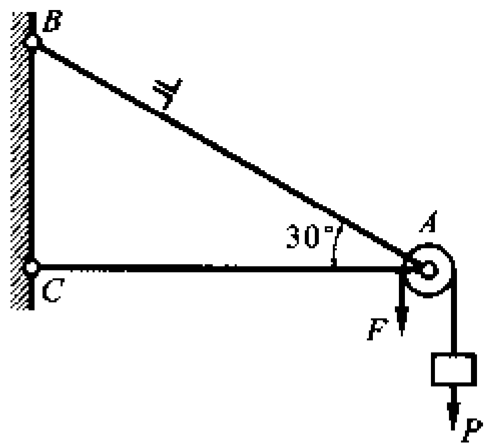


习题 2－18 图

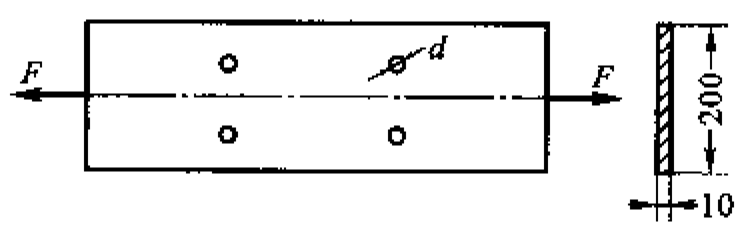
2－18　图示一钢筋混凝土平面闸门，其最大启门力为 $F=140$ kN。如提升闸门的钢质丝杠内径 $d=40$ mm，钢的许用应力 $[\sigma]=170$ MPa，试校核丝杠的强度。

2－19 简易起重设备的计算简图如图所示。已知斜杆 AB 用两根 63 mm×40 mm×4 mm 不等边角钢组成，钢的许用应力[σ]＝170 MPa。试问在提起重量为 P＝15 kN 的重物时，斜杆 AB 是否满足强度条件？

2－20 一块厚 10 mm、宽 200 mm 的旧钢板，其截面被直径 d＝20 mm 的圆孔所削弱，圆孔的排列对称于杆的轴线，如图所示。钢板承受轴向拉力 F＝200 kN。材料的许用应力[σ]＝170 MPa，试校核钢板的强度。

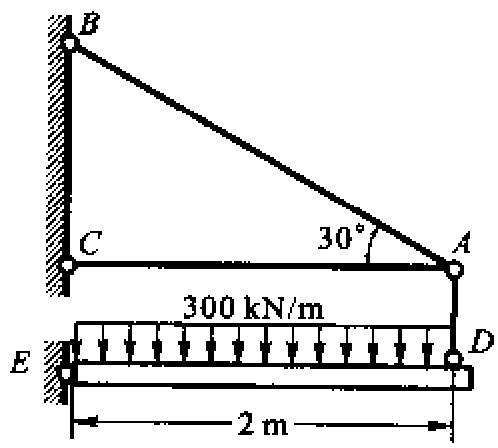


习题 2－19 图

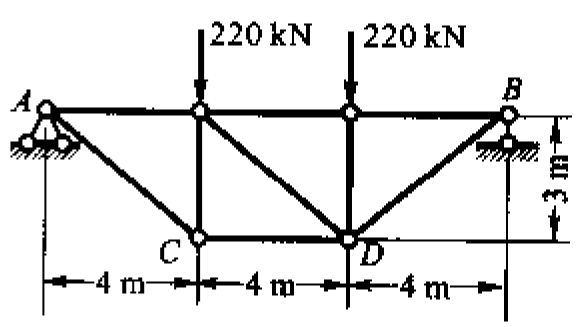


习题 2－20 图

2－21 一结构受力如图所示，杆件 AB，AD 均由两根等边角钢组成。已知材料的许用应力[σ]＝170 MPa，试选择杆 AB、AD 的角钢型号。



习题 2－21 图

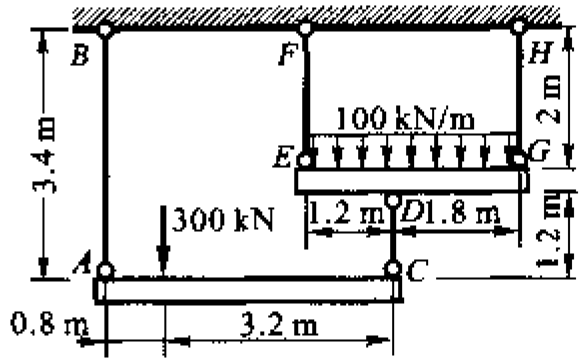


习题 2－22 图

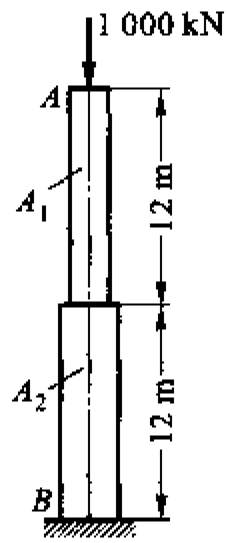
2－22 一桁架受力如图所示。各杆都由两个等边角钢组成。已知材料的许用应力[σ]＝170 MPa，试选择杆 AC 和 CD 的角钢型号。

2－23 一结构受力如图所示，杆件 AB，CD，EF，GH 都由两根不等边角钢组成。已知材料的许用应力[σ]＝170 MPa，材料的弹性模量 E＝210 GPa，杆 AC 及 EG 可视为刚性的。试选择各杆的角钢型号，并分别求点 D、C、A 处的位移 Δ_D，Δ_C，Δ_A。

2－24 已知混凝土的密度 ρ＝2.25 kg/m^3，许用压应力[σ]＝2 MPa。试按强度条件确定图示混凝土柱所需的横截面面积 A_1 和 A_2。若混凝土的弹性模量 E＝20 GPa，试求柱顶 A 的位移。



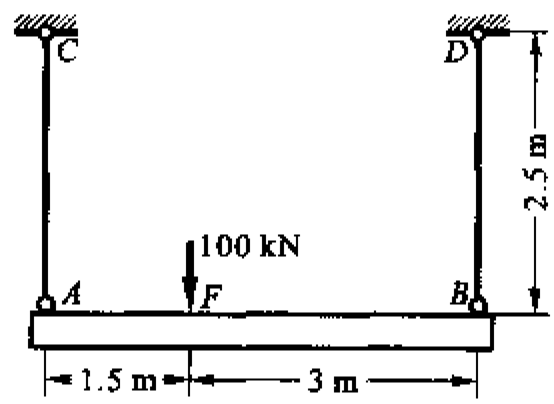
习题 2－23 图



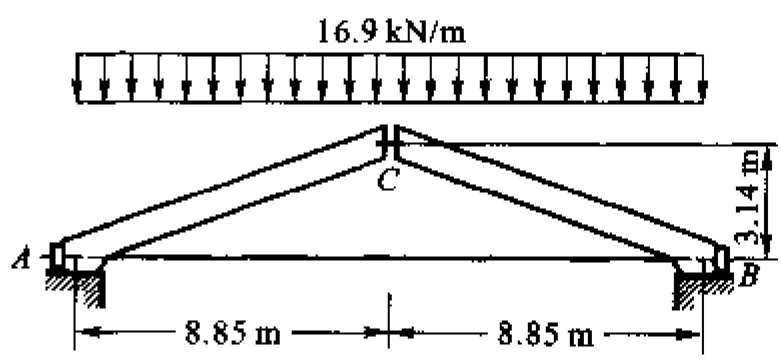
习题 2－24 图

2－25　(1) 刚性梁 AB 用两根钢杆 AC，BD 悬挂着，受力如图所示。已知钢杆 AC 和 BD 的直径分别为 $d_1=25$ mm 和 $d_2=18$ mm，钢的许用应力$[\sigma]=170$ MPa，弹性模量 $E=210$ GPa。试校核钢杆的强度，并计算钢杆的变形 Δl_{AC}，Δl_{DB} 及 A，B 两点的竖直位移 Δ_A，Δ_B。

(2) 若荷载 $F=100$ kN 作用于 A 点处，试求 F 点的竖直位移 Δ_F。(计算结果表明，$\Delta_F=\Delta_A$，事实上这是线性弹性体中普遍存在的关系，称为位移互等定理。)



习题 2－25 图



习题 2－26 图

2－26　图示三铰拱屋架的拉杆用 16 锰钢杆制成。已知此材料的许用应力$[\sigma]=210$ MPa，弹性模量 $E=210$ GPa。试按强度条件选择钢杆的直径，并计算钢杆的伸长。

2－27　简单桁架及其受力如图所示，水平杆 BC 的长度 l 保持不变，斜杆 AB 的长度可随夹角 θ 的变化而改变。两杆由同一材料制造，且材料的许用拉应力与许用压应力相等。要求两杆内的应力同时达到许用应力，且结构的总重量为最小时，试求：

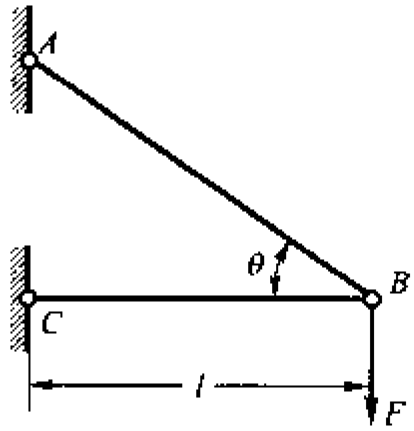
(1) 两杆的夹角 θ 值；

(2) 两杆横截面面积的比值。

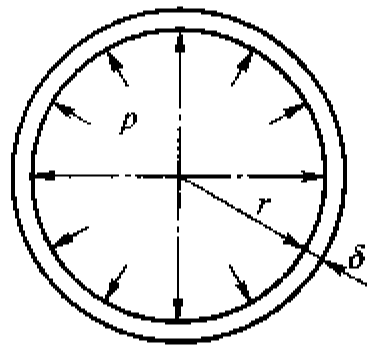
2－28　一内半径为 r，厚度为 $\delta\left(\delta\leqslant\frac{r}{10}\right)$，宽度为 b 的薄壁圆环。在圆环的内表面承受均匀分布的压力 p(如图)，试求：

(1) 由内压力引起的圆环径向截面上的应力；

(2) 由内压力引起的圆环半径的伸长。



习题 2-27 图



习题 2-28 图

第三章　扭　　转

§3-1　概　　述

工程中有一类等直杆，它所受到的外力是作用在垂直于杆轴线的平面内的力偶，这时，杆发生扭转变形。单纯发生扭转的杆件不多，但扭转为其主要变形之一的则不少，如机器中的传动轴(图 3-1a)、水轮发电机的主轴(图 3-1b)、石油钻机中的钻杆、桥梁及厂房等空间结构中的某些构件等等。若这些构件的变形是以扭转为主，其它变形为次而可忽略不计的，则可按扭转变形对其进行强度和刚度计算。有些构件除扭转外还伴随着其他的主要变形(如传动轴还有弯曲，钻杆还受压等)，这类问题将在第八章组合变形中讨论。

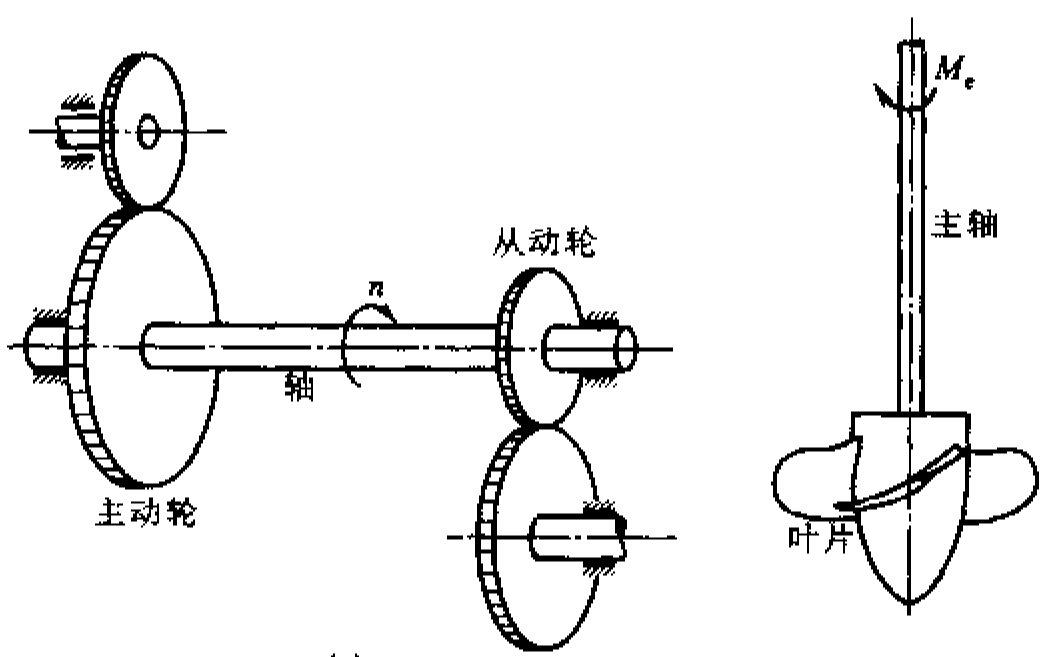


图 3-1

使直杆发生扭转的外力，是作用面垂直于杆件轴线的外力偶系，最简单的计算简图如图 3-2所示。在这种外力偶作用下，杆表面的纵向线将变成螺旋线，即发生扭转变形。

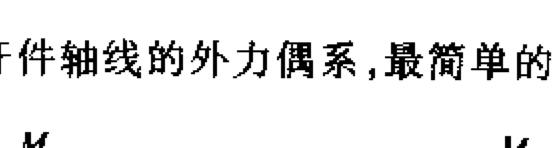


图 3-2

当发生扭转的杆是等直圆杆时，由于杆的物性和横截面几何形状的极对称性，就可用材料力学的方法来求解。对于非圆截面杆，由于横截面不存在极对称性，其变

形和横截面上的应力都比较复杂，就不能用材料力学的方法求解，在§3－7中将简单地介绍一些按弹性力学方法求得的结果。

在开始求解等直圆杆扭转时的应力和变形前，先研究薄壁圆筒的扭转，介绍有关切应力、切应变及其关系等基本概念。

§3－2　薄壁圆筒的扭转

设一薄壁圆筒的壁厚 δ 远小于其平均半径 r_0 $\left(\delta\leqslant\frac{r_0}{10}\right)$，其两端面承受产生扭转变形的外力偶矩 M_e（图 3－3a）。由截面法可知，圆筒任一横截面 $n-n$ 上的内力将是作用在该截面上的力偶（图 3－3b），该内力偶矩称为**扭矩**，并用 T 表示。由截面上的应力与微面积dA之乘积的合成等于截面上的扭矩可知，横截

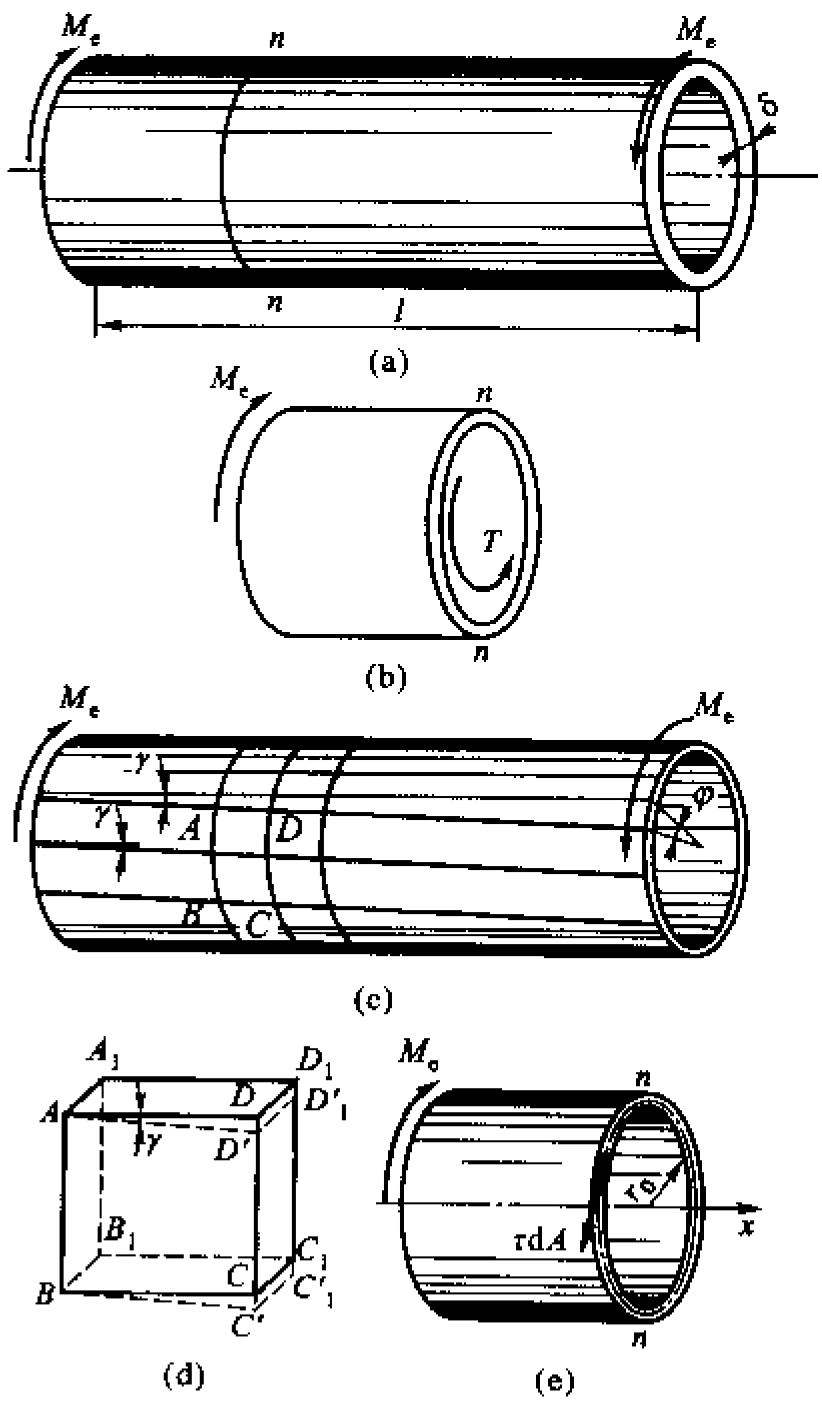


图 3－3

面上的应力只能是切应力。

为得到沿横截面圆周上各点处切应力的变化规律，可预先在圆筒表面画上等间距的圆周线和纵向线，从而形成一系列的正方格子。在圆筒两端施加外力偶矩 M_e 以后，可以发现圆周线保持不变，而纵向线发生倾斜，在小变形时仍保持为直线。于是可设想，薄壁圆筒扭转变形后，横截面保持为形状、大小均无改变的平面，相邻两横截面只是绕圆筒轴线发生相对转动。因此，横截面上各点处切应力的方向必与圆周相切。圆筒两端截面之间相对转动的角位移，称为**相对扭转角**，并用 φ 表示(图 3-3c)。而圆筒表面上每个格子的直角都改变了相同的角度 γ(图 3-3c,d)，这种直角的改变量 γ 称为**切应变**。这个切应变和横截面上沿圆周切线方向的切应力是相对应的。由于相邻两圆周线间每个格子的直角改变量相等，并根据材料均匀连续的假设，可以推知，沿圆周各点处切应力的方向与圆周相切，且其数值相等。至于切应力沿壁厚方向的变化规律，由于壁厚 δ 远小于其平均半径 r_0，故可近似地认为沿壁厚方向各点处切应力的数值无变化①。

根据上述分析，可得薄壁圆筒扭转时，横截面上任一点处的切应力 τ 都相等，其方向与圆周相切。于是，由横截面上内力与应力间的静力关系，得

$$\int_A \tau \mathrm{d}A \cdot r = T$$

由于 τ 为常量，且对于薄壁圆筒，r 可用其平均半径 r_0 代替，而积分 $\int_A \mathrm{d}A = A = 2\pi r_0 \delta$ 为圆筒横截面面积，将其代入式(a)，并引进 $A_0 = \pi r_0^2$，从而得

$$\tau = \frac{T}{2A_0 t} \qquad (3-1)$$

由图 3-3c 所示的几何关系，可得薄壁圆筒表面上的切应变 γ 和相距为 l 的两端面间的相对扭转角 φ 之间的关系式：

$$\gamma = \varphi r / l \qquad (3-2)$$

式中，r 为薄壁圆筒的外半径。

通过薄壁圆筒的扭转实验可以发现，当外力偶矩在某一范围内时，相对扭转角 φ 与外力偶矩 M_e(在数值上等于扭矩 T)之间成正比，如图 3-4a 所示。利用式(3-1)和(3-2)，即得 τ 与 γ 间的线性关系(图 3-4b)为

$$\tau = G\gamma \qquad (3-3)$$

上式称为材料的**剪切胡克定律**，式中的比例常数 G 称为材料的**切变模量**，其量

---

① 精确解见§3-4，可以证明当筒壁厚度不超过平均直径的 5%时，近似解与精确解间的误差不超过 5%。

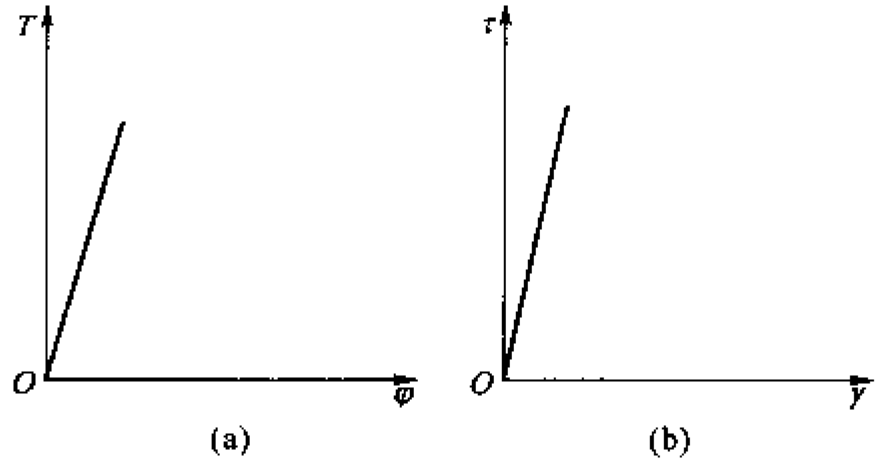


图 3-4

纲与弹性模量 E 的量纲相同，单位为 Pa。钢材切变模量的约值为 $G=80$ GPa。

应当注意，剪切胡克定律式(3-3)只有在切应力不超过材料的某一极限值时才是适用的。该极限值称为材料的剪切比例极限 τ_p。即适用于切应力不超过材料剪切比例极限的线弹性范围。

§3-3 传动轴的外力偶矩·扭矩及扭矩图

I. 传动轴的外力偶矩

工程中常用的传动轴(见图 3-1)，往往是只知道它所传递的功率和转速。为此，需根据所传递的功率和转速，求出使轴发生扭转的外力偶矩。

设一传动轴，其转速为 n，轴传递的功率由主动轮输入，然后通过从动轮分配出去(图 3-5)。设通过某一轮所传递的功率为 P，在工程实际中，其常用单位为 kW①。当轴在稳定转动时，外力偶在 t 秒种内所作的功等于其矩 M_e 与轮在 t 秒种内的转角 α(图 3-6)之乘积。因此，外力偶每秒钟所作的功即功率 P 为

$$\{P\}_{kW}=\{M_e\}_{N\cdot m}\frac{\{\alpha\}_{rad}}{\{t\}_s}\times 10^{-3}$$

$$=\{M_e\}_{N\cdot m}\{\omega\}_{rad/s}\times 10^{-3}$$

$$=\{M_e\}_{N\cdot m}\times 2\pi\times\frac{\{n\}_{r/min}}{60}\times 10^{-3}$$

于是，即得作用在该轮上的外力偶矩为

① 1 kW = 1 000 W; 1 W = 1 J/s, 1 J = 1 N·m。

$$\{M_e\}_{N\cdot m}=\frac{\{P\}_{kW}\times10^3\times60}{2\pi\{n\}_{r/min}}=9.55\times10^3\frac{\{P\}_{kW}}{\{n\}_{r/min}} \tag{3-4}$$

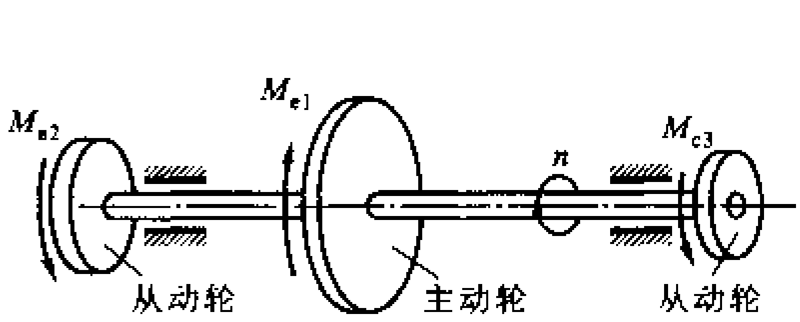


图 3-5

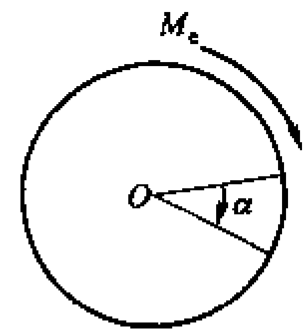


图 3-6

对于外力偶的转向，主动轮上的外力偶的转向与轴的转动方向相同，而从动轮上的外力偶的转向则与轴的转动方向相反，如图 3-5 所示。

II. 扭矩及扭矩图

作用在传动轴上的外力偶往往有多个，因此，不同轴段上的扭矩也各不相同，可用截面法来计算轴横截面上的扭矩。

设一等直圆杆如图 3-7a 所示，作用在杆上的外力偶矩分别为：$M_1=6M_e$，$M_2=M_e$，$M_3=2M_e$，$M_4=3M_e$。先求杆中间 BC 段中任一横截面 1-1 上的扭矩，用截面法将杆沿横截面 1-1 处假想地截分为二，并研究其左半段杆(图 3-7b)的平衡。由平衡方程

$$\sum M_x=0,\quad T_1-M_1+M_2=0$$

得

$$T_1=M_1-M_2=6M_e-M_e=5M_e$$

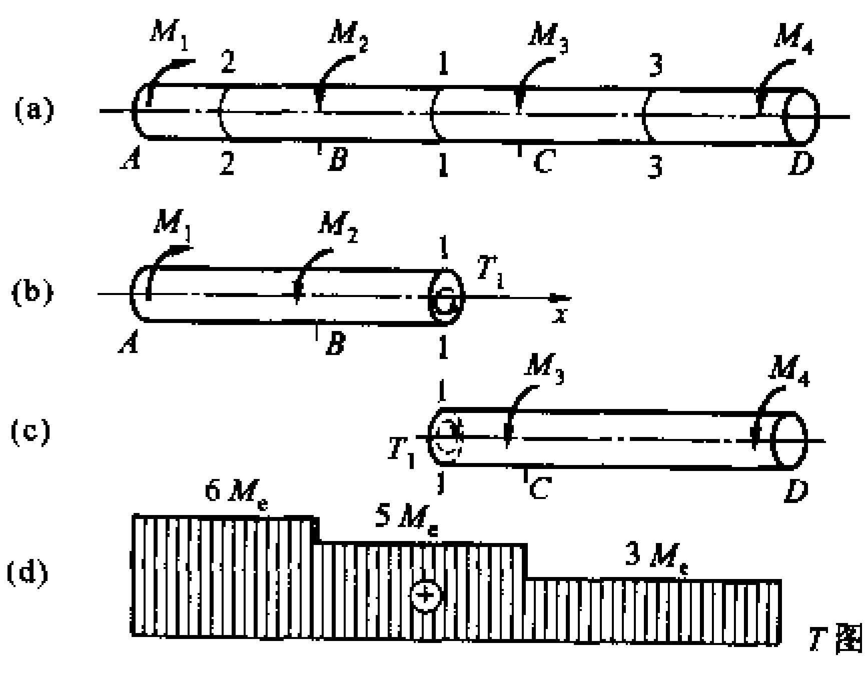


图 3-7

扭矩 T_1 的转向如图 3－7b 所示。

如果研究其右半段杆的平衡，则在同一横截面上可求得扭矩的数值相等而转向相反(图 3－7c)。为使从两段杆所求得的同一横截面上的扭矩在正负号上一致，按杆的变形情况，规定杆因扭转而使其纵向线在某一段内有变成右手螺旋线的趋势时，则该段杆横截面上的扭矩为正，反之为负。也可将扭矩按右手螺旋法则用力偶矢来表示，并规定当力偶矢的指向离开截面时扭矩为正，反之为负。两者对扭矩正负号的规定是一致的。按上述规定，横截面 1－1 上的扭矩 T_1 应为正号。

同理，用截面法求得图 3－7a 中 2－2 和 3－3 两横截面上的扭矩均为正，其数值分别为

$$T_2 = M_1 = 6M_e$$

和

$$T_3 = M_4 = 3M_e$$

在本例中，每一段杆内各横截面上的扭矩分别等于 T_1，T_2 和 T_3。

为了表明沿杆轴线各横截面上的扭矩的变化情况，从而确定最大扭矩及其所在横截面的位置，可仿照轴力图的作法绘制**扭矩图**。图 3－7a 所示的杆的扭矩图，如图 3－7d。由该图可见，最大扭矩 T_{max} 在杆 AB 段内任一横截面上，其值为 $6M_B$。

例题 3－1　一传动轴如图 a 所示，其转速 $n = 300$ r/min，主动轮输入的功率 $P_1 = 500$ kW。若不计轴承摩擦所耗的功率，三个从动轮输出的功率分别为 $P_2 = 150$ kW，$P_3 = 150$ kW 及 $P_4 = 200$ kW。试作轴的扭矩图。

解：首先计算外力偶矩(图 a)。

$$M_1 = \left(9.55 \times 10^3 \times \frac{500}{300}\right) \text{N·m} = 15.9 \times 10^3 \text{ N·m}$$
$$= 15.9 \text{ kN·m}$$

$$M_2 = M_3 = \left(9.55 \times 10^3 \times \frac{150}{300}\right) \text{N·m} = 4.78 \times 10^3 \text{ N·m}$$
$$= 4.78 \text{ kN·m}$$

$$M_4 = \left(9.55 \times 10^3 \times \frac{200}{300}\right) \text{N·m} = 6.37 \times 10^3 \text{ N·m}$$
$$= 6.37 \text{ kN·m}$$

然后，由轴的计算简图(图 b)，计算各段轴内的扭矩。先计算 CA 段内任一横截面 2－2(图 b)上的扭矩。沿横截面 2－2 将轴截开，并研究左边一段轴的平衡，假设 T_2 为正值扭矩，由平衡方程

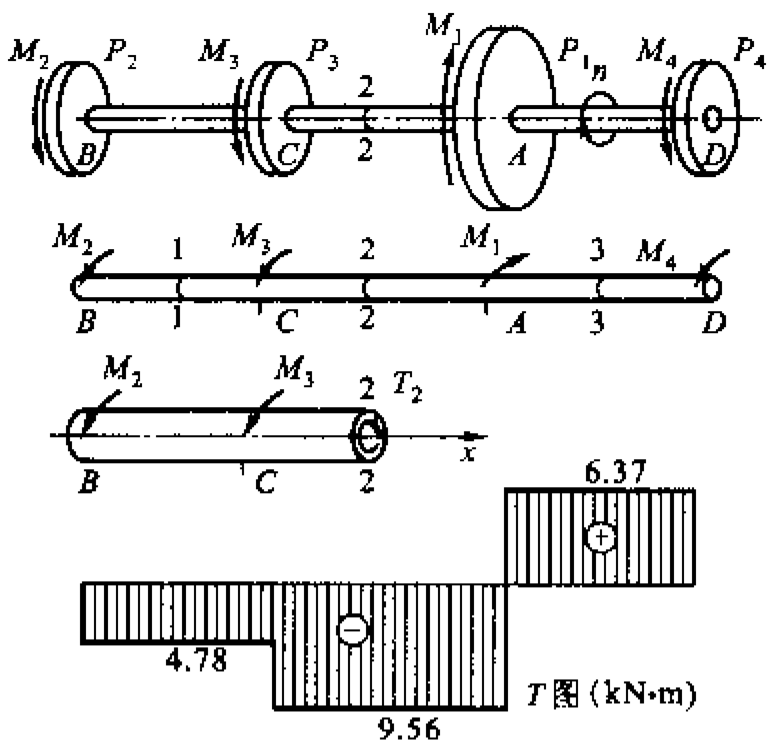
$$\sum M_x = 0,\quad M_2 + M_3 + T_2 = 0$$

得

$$T_2 = -M_2 - M_1 = -9.56\ \mathrm{kN \cdot m}$$

结果为负号，说明 T_2 为负值扭矩（图 c）。

同理，在 BC 段内　$T_1 = -M_2 = -4.78\ \mathrm{kN \cdot m}$



例题 3-1 图

在 AD 段内　　　　$T_3 = M_4 = 6.37\ \mathrm{kN \cdot m}$

根据这些扭矩即可作出扭矩图（图 d）。从图可见，最大扭矩 T_{max} 发生在 CA 段内，其值为 9.56 kN·m。

§3-4　等直圆杆扭转时的应力·强度条件

I. 横截面上的应力

与薄壁圆筒相仿，在小变形条件下，等直圆杆在扭转时横截面上也只有切应力。为求得圆杆在扭转时横截面上的切应力计算公式，先从变形几何方面和物理关系方面求得切应力在横截面上的变化规律，然后再考虑静力学方面来求解。

几何方面　为研究横截面上任一点处切应变随点的位置而变化的规律，在等直圆杆的表面上作出任意两个相邻的圆周线和纵向线（图 3-8a）。当杆的两端施加一对其矩为 M_e 的外力偶后，可以发现：两圆周线绕杆轴线相对旋转了一个角度，圆周线的大小和形状均未改变；在变形微小的情况下，圆周线的间距也未变化，纵向线则倾斜了一个角度 γ（图 3-8b）。根据所观察到的现象，可假设

横截面如同刚性平面般绕杆的轴线转动，即平面假设。实验指出，在杆扭转变形后只有等直圆杆的圆周线才仍在垂直于杆轴的平面内，所以上述假设只适用于等直圆杆。

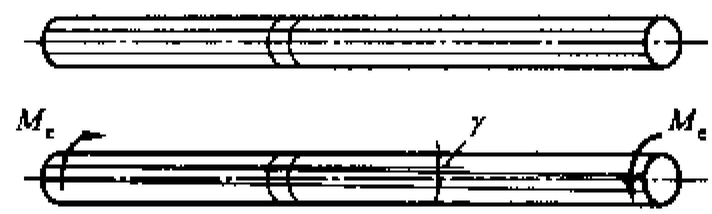


图 3-8

为确定横截面上任一点处的切应变随点的位置而变化的规律，假想地截取长为 $\mathrm{d}x$ 的杆段进行分析。由平面假设可知，杆段变形后的情况如图 3-9a 所示。截面 $b-b$ 相对于截面 $a-a$ 绕杆轴转动了一个角度 $\mathrm{d}\varphi$，因此其上的任意半径 O_2D 也转动了同一角度 $\mathrm{d}\varphi$。由于截面转动，杆表面上的纵向线 AD 倾斜了一个角度 γ（图 3-9a）。纵向线的倾斜角 γ 就是横截面周边上任一点 A 处的切应变（参看 § 3-2）。同时，经过半径 O_2D 上任意点 G 的纵向线 EG 在杆变形后也倾斜了一个角度 γ_ρ，即为横截面半径上任一点 E 处的切应变。应该注意，上述切应变均在垂直于半径的平面内。设 G 点至横截面圆心的距离为 ρ，由图 3-9a 所示的几何关系可得

$$\gamma_\rho \approx \tan \gamma_\rho = \frac{\overline{GG'}}{\overline{EG}} = \frac{\rho \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

即

$$\gamma_\rho = \rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{a}$$

上式表示等直圆杆横截面上任一点处的切应变随该点在横截面上的位置而变化的规律。式中的 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ 表示相对扭转角 φ 沿杆长度的变化率，对于给定的横截面是个常量。因此，在同一半径 ρ 的圆周上各点处的切应变 γ_ρ 均相同，且与 ρ 成正比。

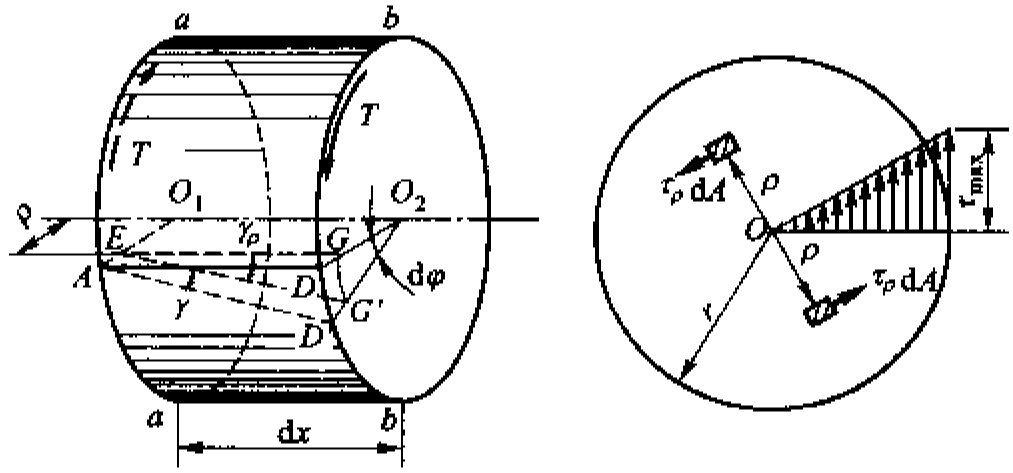
物理方面 由剪切胡克定律可知，在线弹性范围内，切应力与切应变成正比，即

$$\tau = G\gamma \tag{b}$$

将式(a)代入式(b)，并令相应点处的切应力为 τ_ρ，即得横截面上切应力变化规律的表达式

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{c}$$

由上式可知，在同一半径 ρ 的圆周上各点处的切应力 τ_ρ 均相同，其值与 ρ 成正比。τ_ρ 的方向应垂直于半径，因 γ_ρ 为垂直于半径平面内的切应变。切应力沿任一半径的变化情况如图 3－9b 所示。



(a)　(b)

图 3－9

静力学方面　横截面上切应力变化规律表达式(c)中的 $d\varphi/dx$ 是个待定参数，为确定该参数，考虑静力学方面。由于在横截面任一直径上距圆心等远的两点处的内力元素 $\tau_\rho dA$ 等值而反向(图 3－9b)，因此，整个截面上的内力元素 $\tau_\rho dA$ 的合力必等于零，并组成一个力偶，即为横截面上的扭矩 T。因为 τ_ρ 的方向垂直于半径，故内力元素 $\tau_\rho dA$ 对圆心的力矩为 $\rho\tau_\rho dA$。于是，由静力学中的合力矩原理可得

$$\int_A \rho\tau_\rho dA = T \tag{d}$$

将式(c)代入式(d)，经整理后即得

$$G\frac{d\varphi}{dx}\int_A \rho^2 dA = T \tag{e}$$

上式中的积分 $\int_A \rho^2 dA$ 仅与横截面的几何量有关，称为横截面的**极惯性矩**，并用 I_p 表示，即

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \tag{f}$$

其单位为 m^4。将式(f)代入式(e)，即得

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \tag{3-5}$$

将其代入式(c)，即得

$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p} \tag{3-6}$$

上式即等直圆杆在扭转时横截面上任一点处切应力的计算公式。

由式(3-6)及图 3-9b 可见，当 ρ 等于横截面的半径 r 时，即在横截面周边上的各点处，切应力将达到其最大值 τ_{max}，其值为

$$\tau_{max}=\frac{Tr}{I_p}$$

在上式中若用 W_p 代表 I_p/r，则有

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_p} \tag{3-7}$$

式中，W_p 称为**扭转截面系数**，其单位为 m^3。

推导切应力计算公式的主要依据为平面假设，且材料符合胡克定律。因此公式仅适用于在线弹性范围内等直圆杆。

为计算极惯性矩 I_p 和扭转截面系数 W_p 在圆截面上距圆心为 ρ 处取厚度为 $d\rho$ 的环形面积作为面积元素(图 3-10a)，并由式(f)可得圆截面的极惯性矩为

$$I_p=\int_A\rho^2\mathrm{d}A=\int_0^{\frac{d}{2}}2\pi\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi d^4}{32} \tag{3-8}$$

圆截面的扭转截面系数为

$$W_p=\frac{I_p}{r}=\frac{I_p}{d/2}=\frac{\pi d^3}{16} \tag{3-9}$$

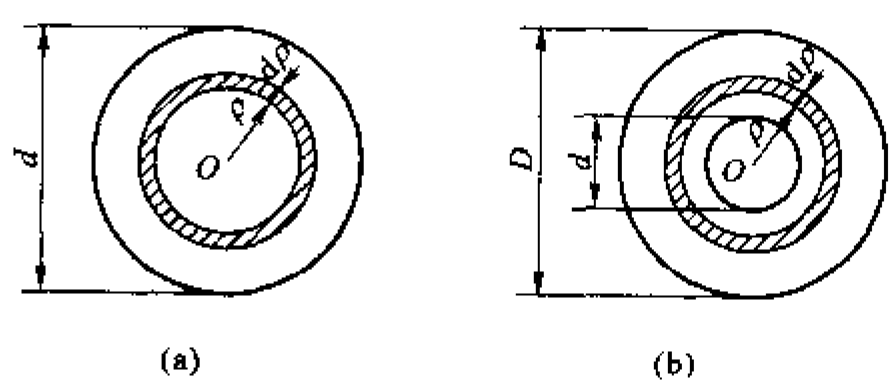


图 3-10

由于平面假设同样适用于空心圆截面杆，因此，切应力公式也适用于空心圆截面杆。设空心圆截面的内、外直径分别为 d 和 D(图 3-10b)，其比值 $\alpha=\frac{d}{D}$，则从式(f)可得空心圆截面的极惯性矩为

$$I_p=\int_A\rho^2\mathrm{d}A=\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}}2\pi\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$$

$$=\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \tag{3-10}$$

扭转截面系数为

$$W_p=\frac{I_p}{D/2}=\frac{\pi(D^4-d^4)}{16D}=\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) \tag{3-11}$$

II. 斜截面上的应力

已知等直圆杆扭转时横截面上周边各点处的切应力最大，为全面了解杆内的应力情况，进一步讨论这些点处斜截面上的应力。为此，在圆杆的表面处用横截面、径向截面以及与表面平行的面截取一微小的正六面体，称为单元体(图 3－11a)。在其左、右两侧面(即杆的横截面)上只有切应力 τ，其方向与 y 轴平行，在其前、后两平面(即与杆表面平行的面)上无任何应力。由于单元体处于平衡状态，故由平衡方程 $\sum F_y=0$ 可知，单元体在左、右两侧面上的内力元素 $\tau\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 应是大小相等、指向相反的一对力，并组成一个力偶，其矩为 $(\tau\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\mathrm{d}x$。为满足另两个平衡条件 $\sum F_x=0$ 和 $\sum M_z=0$，在单元体的上、下两平面上将有大小相等、指向相反的一对内力元素 $\tau'\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，并组成其矩为 $(\tau'\mathrm{d}x\mathrm{d}z)\mathrm{d}y$ 的力偶。该力偶矩与前一力偶矩数量相等而转向相反，从而可得

$$\tau'=\tau \tag{3-12}$$

上式表明，两相互垂直平面上的切应力 τ 和 τ' 数值相等，且均指向(或背离)该两平面的交线，称为**切应力互等定理**。该定理具有普遍意义，在同时有正应力的情况下同样成立。单元体(图 3－11a)在其两对互相垂直的平面上只有切应力而无正应力的这种状态，称为**纯剪切应力状态**。等直圆杆和薄壁圆筒在发生扭转时，其中的单元体均处于纯剪切应力状态。由于这种单元体的前、后两面上无任何应力，故可将其改用平面图(图 3－11b)表示。

现分析在单元体内垂直于前、后两平面的任一斜截面 ef 上的应力，斜截面的外向法线 n 与 x 轴间的夹角为 α，并规定从 x 轴至截面外向法线逆时针转动时 α 为正值，反之为负值。应用截面法，研究其左边部分(图 3－11c)的平衡。设斜截面 ef 的面积为 $\mathrm{d}A$，则 eb 面和 bf 面的面积分别为 $\mathrm{d}A\cos\alpha$ 和 $\mathrm{d}A\sin\alpha$。选择参考轴 ξ 和 η 分别与斜截面 ef 平行和垂直(图 3－11c)，由平衡方程

$$\sum F_\eta=0,\quad \sigma_\alpha\mathrm{d}A+(\tau\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha+(\tau'\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

和

$$\sum F_\xi=0,\quad \tau_\alpha\mathrm{d}A-(\tau\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha+(\tau'\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha=0$$

利用切应力互等定理公式，经整理后，即得任一斜截面 ef 上的正应力和切应力的计算公式分别为

$$\sigma_\alpha=-\tau\sin 2\alpha \tag{a}$$

和

$$\tau_\alpha = \tau\cos 2\alpha \tag{b}$$

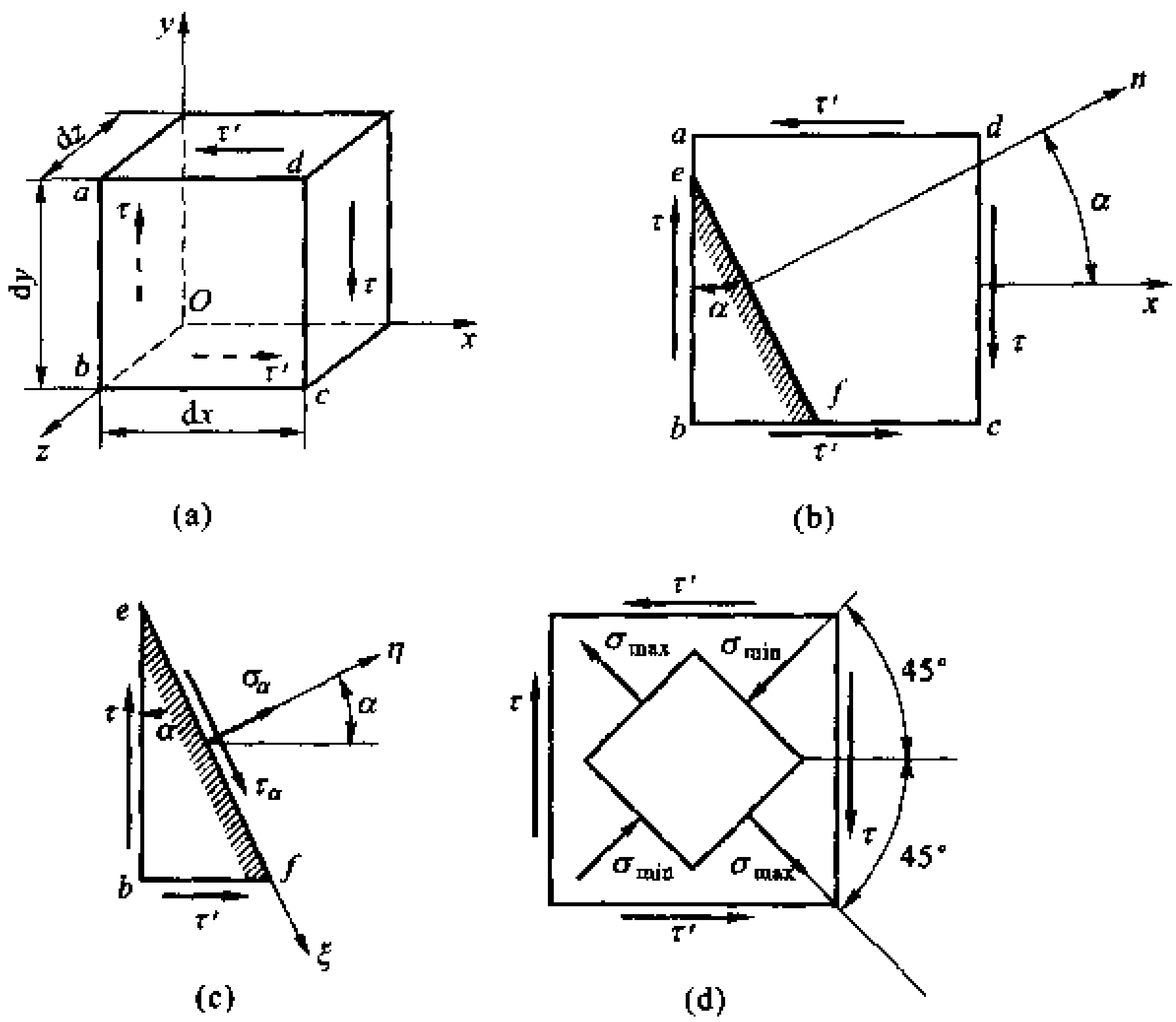


图 3-11

由式(b)可知,单元体的四个侧面(分别为 $\alpha=0°$和 $\alpha=90°$)上的切应力绝对值最大,均等于 τ。而由式(a)可知,在 $\alpha=-45°$和 $\alpha=45°$两斜截面上的正应力分别为

$$\sigma_{-45°} = \sigma_{\max} = +\tau$$

和

$$\sigma_{45°} = \sigma_{\min} = -\tau$$

即该两截面上的正应力分别为 σ_α 中的最大值和最小值,即一为拉应力,另一为压应力,其绝对值都等于 τ,且最大、最小正应力的作用面与最大切应力的作用面之间互成 45°,如图 3-11d。附带指出,这些结论是纯剪切应力状态的特点,并不限于等直圆杆在扭转时这一特殊情况。

在圆杆的扭转试验中,对于剪切强度低于拉伸强度的材料(例如低碳钢),破坏是从杆的最外层沿横截面发生剪断产生的(图 3-12a),而对于拉伸强度低于剪切强度的材料(例如铸铁),其破坏是由杆的最外层沿与杆轴线约成 45°倾角的螺旋形曲面发生拉断而产生的(图 3-12b)。

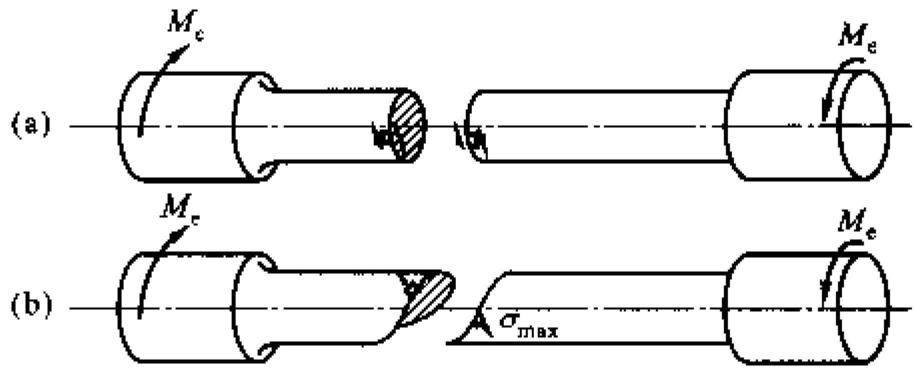
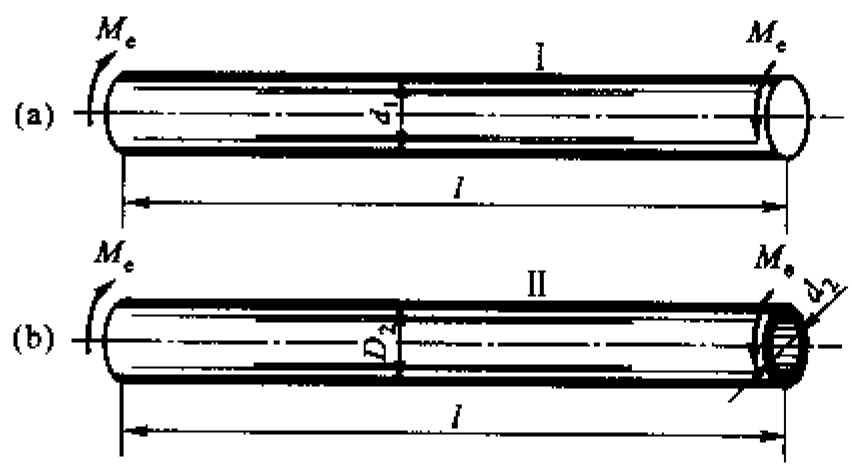


图 3-12

例题 3-2 实心圆截面轴 I 和空心圆截面轴 II(图 a,b)的材料、扭转力偶矩 M_e 和长度 l 均相同,最大切应力也相等。若空心圆截面内、外直径之比为 $\alpha=0.8$,试求空心圆截面的外径与实心圆截面直径之比及两轴的重量比。

解: 设实心圆截面直径和空心圆截面内、外直径分别为 d_1 和 d_2,D_2。



例题 3-2 图

利用最大切应力相等的条件,先求比值 D_2/d_1。I,II 两轴横截面的扭转截面系数分别为

$$W_{p1}=\frac{\pi d_1^3}{16}$$

和

$$W_{p2}=\frac{\pi D_2^3}{16}(1-\alpha^4)$$

分别代入式(3-7),即得两轴的最大切应力为

$$\tau_{1,\max}=\frac{T_1}{W_{p1}}=\frac{16T_1}{\pi d_1^3}$$

和

$$\tau_{2,\max}=\frac{T_2}{W_{p2}}=\frac{16T_2}{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}$$

以 $\alpha=0.8$ 和 $T_1=T_2=M_e$ 代入以上两式，并引用已知条件 $\tau_{1,\max}=\tau_{2,\max}$ 即得

$$\frac{16M_e}{\pi d_1^3}=\frac{16M_e}{\pi D_2^3(1-0.8^4)}$$

由此得

$$\frac{D_2}{d_1}=\sqrt[3]{\frac{1}{1-0.8^4}}=1.194$$

由于两轴的长度和材料均相同，故轴 II 与轴 I 的重量比等于其横截面面积 A_2 和 A_1 之比，于是有

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{\frac{\pi}{4}(D_2^2-d_2^2)}{\frac{\pi}{4}d_1^2}=\frac{D_2^2(1-\alpha^2)}{d_1^2}$$

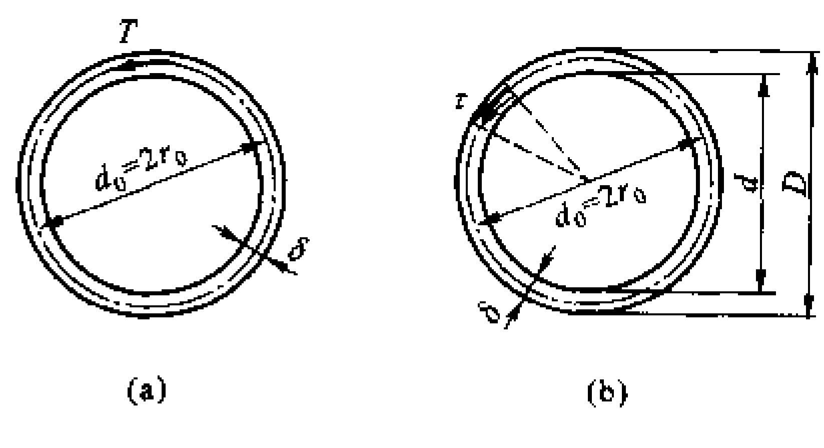
$$=1.194^2(1-0.8^2)=0.512$$

由此可见，在最大切应力相等的情况下，空心圆轴的自重比实心圆轴轻，即比较节省材料。当然，在设计轴时，还应全面地考虑加工等因素，不能在任何情况下都采用空心圆轴。

例题 3－3 试验算薄壁圆筒横截面上切应力公式(3－1)的精确度。已知圆筒的壁厚 δ 和平均直径 d_0(图 a)。

解：按精确公式(3－6)，切应力沿空心圆截面壁厚 δ 的变化情况如图 b 所示，最大切应力 $\tau_{\max}$ 在截面最外层，其算式为

$$\tau_{\max}=\frac{TD/2}{I_p}$$



例题 3－3 图

由近似公式(3－1)，薄壁圆筒横截面上的切应力沿壁厚不变，其算式为

$$\tau=\frac{T}{2A_0\delta} \qquad (1)$$

现以 τ_{max}为基准分析误差的大小。由

$$\tau_{max}=\frac{TD/2}{\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)}=\frac{TD}{\frac{\pi}{16}(D^2+d^2)(D+d)(D-d)}$$

将 $D=d_0+\delta$ 和 $d=d_0-\delta$(参看图 b)代入上式,经整理后,得

$$\tau_{max}=\frac{T(1+\beta)}{2A_0\delta(1+\beta^2)} \tag{2}$$

式中,$\beta=\frac{\delta}{d_0}$;$A_0=\frac{\pi}{4}d_0^2$。从式(1)和(2)即可求得以 τ_{max}为基准的误差为

$$\Delta=\frac{\tau_{max}-\tau}{\tau_{max}}=1-\frac{\tau}{\tau_{max}}$$

$$=1-\frac{\frac{T}{2A_0\delta}}{\frac{T(1+\beta)}{2A_0\delta(1+\beta^2)}}=1-\frac{1+\beta^2}{1+\beta}=\frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta}$$

用百分率表示,则得

$$\Delta=\frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta}\times 100\%$$

由此可见,当 $\beta=\frac{\delta}{d_0}$越小,即筒壁越薄时,误差 Δ 越小,由式(3-1)计算的结果越接近精确值。例如,当 $\beta=5\%$时,Δ 仅为 4.52%。因此,在筒壁很薄时,认为切应力沿壁厚不变是合理的。但应注意,壁厚过薄的圆筒受扭时,会因筒壁内存在压应力而使筒壁发生局部折皱,以致失去承载能力。

III. 强度条件

等直圆杆在扭转时,杆内各点均处于纯剪切应力状态。其强度条件应该是横截面上的最大工作切应力 τ_{max}不超过材料的许用切应力$[\tau]$,即

$$\tau_{max}\leqslant[\tau] \tag{3-13}$$

由于等直圆杆的最大工作应力 τ_{max}存在于最大扭矩所在横截面即危险截面的周边上任一点处,故强度条件公式(3-13)中应以这些点即**危险点**处的切应力为依据。于是,上述强度条件可写作

$$\frac{T_{max}}{W_p}\leqslant[\tau] \tag{3-14}$$

将式(3-9)和(3-11)中的 W_p 代入强度条件公式(3-14),就可对实心或空心圆截面的传动轴进行强度计算,即校核强度、选择截面或计算许可荷载。

实验指出,在静荷载作用下,同一种材料在纯剪切和拉伸时的力学性能之间

存在着一定的关系，因而通常可以从材料的许用拉应力[σ]值来确定其许用切应力[τ]值。但对于像传动轴这类构件，由于在计算最大工作应力中往往略去了次要的弯曲影响和其它一些因素，故强度条件中所采用的[τ]应取较静荷载作用下的[τ]略低的值。

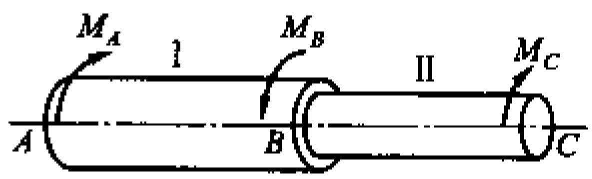
对于用铸铁一类脆性材料制成的杆件，在扭转时，其破坏形式是沿斜截面发生脆性断裂。按理应按斜截面上的最大拉应力（见本节 II）建立强度条件，但由于斜截面上的最大拉应力与横截面上的最大切应力间有固定的关系，所以，习惯上仍按式(3－13)进行强度计算。这虽从形式上掩盖了材料强度破坏的实质，但实际上是一致的。

例题 3－4 图 a 所示阶梯状圆轴，AB 段直径 $d_1=120\ \text{mm}$，BC 段直径 $d_2=100\ \text{mm}$。扭转力偶矩为 $M_A=22\ \text{kN·m}$，$M_B=36\ \text{kN·m}$，$M_C=14\ \text{kN·m}$。已知材料的许用切应力[τ]＝80 MPa，试校核该轴的强度。

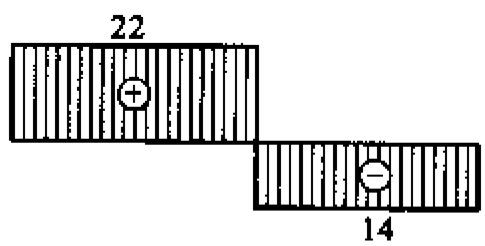
解：用截面法求得 AB、BC 段的扭矩，并绘出扭矩图如图 b 所示。

由扭矩图可见 AB 段之扭矩比 BC 段之扭矩大，但两段轴的直径不同，因此需分别校核两段轴的强度。

(a)



(b)



T图 (kN·m)

例题 3－4 图

$$AB\text{ 段内}\quad \tau_{1,\max}=\frac{T_1}{W_{t1}}=\frac{22\times10^3\ \text{N·m}}{\frac{\pi}{16}(0.12\ \text{m})^3}=64.84\times10^6\ \text{Pa}=64.84\ \text{MPa}<[\tau]$$

$$BC\text{ 段内}\quad \tau_{2,\max}=\frac{T_2}{W_{t2}}=\frac{14\times10^3\ \text{N·m}}{\frac{\pi}{16}(0.1\ \text{m})^3}=71.3\times10^6\ \text{Pa}=71.3\ \text{MPa}<[\tau]$$

因此，该轴满足强度条件的要求。

§3－5　等直圆杆扭转时的变形・刚度条件

Ⅰ．扭转时的变形

等直圆杆的扭转变形，是用两个横截面绕杆轴转动的相对角位移即相对扭转角 φ 来度量的。

式(3－5)是计算等直圆杆相对扭转角的依据。其中 $d\varphi$ 为相距 dx 的两横截面间的相对扭转角。因此，长为 l 的一段杆两端面间的相对扭转角 φ 为

$$\varphi = \int_l d\varphi = \int_0^l \frac{T}{GI_p} dx$$

当等直圆杆仅在两端受一对外力偶作用时，则所有横截面上的扭矩 T 均相同，且等于杆端的外力偶矩 M_e。此外，对于用同一材料制成的等直圆杆，G 及 I_p 亦为常量。于是由上式可得

$$\varphi = \frac{M_e l}{GI_p} \tag{3－15a}$$

或

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \tag{3－15b}$$

φ 的单位为 rad。由上式可见，相对扭转角 φ 与 GI_p 成反比，GI_p 称为等直圆杆的**扭转刚度**。

由于杆在扭转时各横截面上的扭矩可能并不相同，且杆的长度也各不相同，因此，在工程中，对于扭转杆的刚度通常用相对扭转角沿杆长度的变化率 $d\varphi/dx$ 来度量。用 φ' 来表示这个量，称为**单位长度扭转角**。由式(3－5)可得

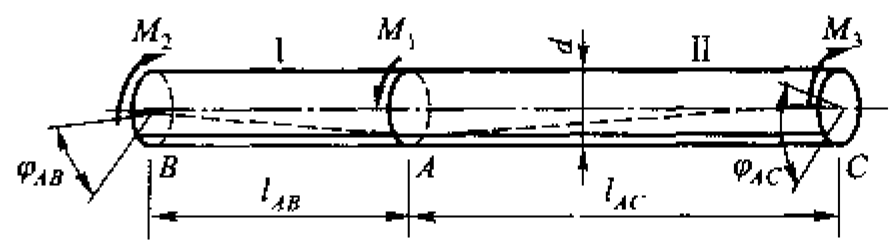
$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \tag{3－16}$$

显然，以上计算公式都只适用于材料在线弹性范围内的等直圆杆，因为作为计算依据的式(3－5)，在这样的条件下导出的。

例题 3－5　图示传动轴系钢制实心圆截面轴。已知：$M_1 = 1\,592$ N・m，$M_2 = 955$ N・m，$M_3 = 637$ N・m。截面 A 与截面 B，C 之间的距离分别为 $l_{AB} = 300$ mm 和 $l_{AC} = 500$ mm。轴的直径 $d = 70$ mm，钢的切变模量 $G = 80$ GPa。试求截面 C 相对于 B 的扭转角。

解：由截面法求得轴Ⅰ,Ⅱ两段内的扭矩分别为 $T_1 = 955$ N・m，$T_2 = -637$ N・m。

分别计算截面 B，C 相对于截面 A 的扭转角 φ_{AB}，φ_{AC}。为此，可假想截面 A



例题 3－5 图

固定不动。由式(3－15b)可得

$$\varphi_{AB}=\frac{T_1 l_{AB}}{GI_p}$$

和

$$\varphi_{AC}=\frac{T_2 l_{AC}}{GI_p}$$

式中，$I_p=\frac{\pi d^4}{32}$。将有关数据代入以上两式，即得

$$\varphi_{AB}=\frac{(955\ \mathrm{N\cdot m})(0.3\ \mathrm{m})}{(80\times10^9\ \mathrm{Pa})\frac{\pi}{32}(7\times10^{-2}\ \mathrm{m})^4}=1.52\times10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

和

$$\varphi_{AC}=\frac{(637\ \mathrm{N\cdot m})(0.5\ \mathrm{m})}{(80\times10^9\ \mathrm{Pa})\frac{\pi}{32}(7\times10^{-2}\ \mathrm{m})^4}=1.69\times10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

由于假想截面 A 固定不动，故截面 B，C 相对于截面 A 的相对转动应分别与扭转力偶矩 M_2，M_3 的转向相同，(见图)。由此，截面 C 相对于 B 的扭转角 φ_{BC} 为

$$\varphi_{BC}=\varphi_{AC}-\varphi_{AB}=1.7\times10^{-4}\ \mathrm{rad}$$

其转向与扭转力偶 M_3 相同。

II. 刚度条件

等直圆杆扭转时，除需满足强度条件外，有时还需满足刚度条件。例如机器的传动轴如扭转角过大，将会使机器在运转时产生较大的振动；精密机床的轴若变形过大，则将影响机床的加工精度等。刚度要求通常是限制其单位长度扭转角 φ' 中的最大值 φ'_{max} 不超过某一规定的允许值 $[\varphi']$，即

$$\varphi'_{max}\leqslant[\varphi'] \tag{3－17}$$

式中，$[\varphi']$ 称为许可单位长度扭转角，其常用单位是(°)/m。式(3－17)即为等直圆杆在扭转时的**刚度条件**。

由于按式(3－16)计算所得结果的单位是 rad/m，故须先将其单位换算为

(°)/m，再代入上式，于是可得

$$\frac{T_{\max}}{GI_p}\times\frac{180}{\pi}\leqslant[\varphi'] \tag{3-18}$$

式中，$T_{\max}$，G，I_p 的单位分别为 N·m，Pa 和 m^4。将式(3－8)或(3－10)中的 I_p 代入上式，即可对实心或空心圆截面的等直杆进行扭转刚度计算，例如选择截面、计算许可荷载或进行刚度校核。

许可单位长度扭转角$[\varphi']$，是根据作用在轴上的荷载性质及轴的工作条件等因素决定的。对于精密机器的轴，其$[\varphi']$常取在 0.15～0.30(°)/m 之间；对于一般的传动轴，则可放宽到 2(°)/m 左右。各种轴的许可单位长度扭转角$[\varphi']$的具体数值可由有关的机械设计手册中查出。

例题 3－6　例题 3－1 中的传动轴(例题 3－1 图 a)是由 45 号钢制成的空心圆截面轴，其内、外直径之比 $\alpha=\frac{1}{2}$。钢的许用切应力$[\tau]$为 40 MPa，切变模量 G 为 80 GPa。许可单位长度扭转角$[\varphi']$为 0.3(°)/m。试按强度条件和刚度条件选择轴的直径。

解：例题 3－1 中已求得 $T_{\max}=9.56$ kN·m。由

$$W_p=\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)=\frac{\pi D^3}{16}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]=\frac{\pi D^3}{16}\times\frac{15}{16}$$

$$I_p=\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)=\frac{\pi D^4}{32}\times\frac{15}{16}$$

将 W_p 式代入式(3－14)，可得空心圆轴按强度条件所需的外直径为

$$D=\sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16(9.56\times10^3\ \text{N·m})\times16}{15\pi(40\times10^6\ \text{Pa})}}=109\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$=109\ \text{mm}$$

将上面的 I_p 代入式(3－18)，即得按刚度条件所必需的外直径为

$$D=\sqrt[4]{\frac{T_{\max}}{G\times\frac{\pi}{32}(1-\alpha^4)}\times\frac{180}{\pi}\times\frac{1}{[\varphi']}}$$

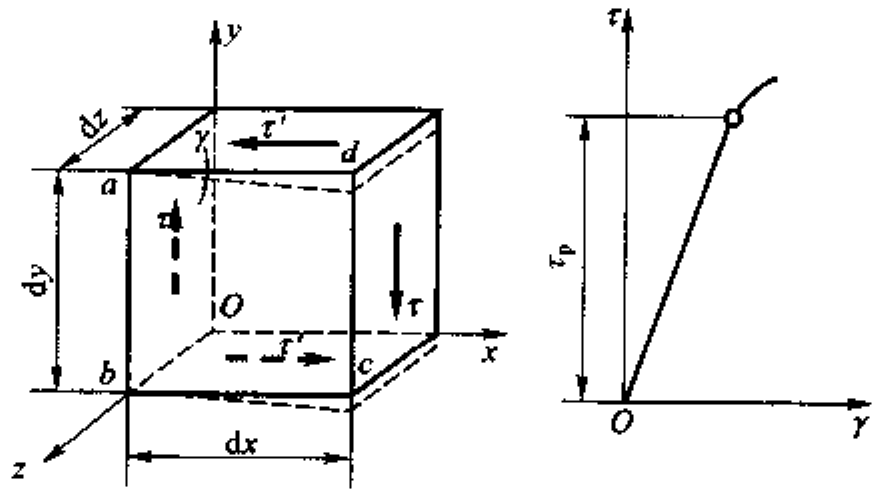
$$=\sqrt[4]{\frac{32(9.56\times10^3\ \text{Pa})\times16}{(80\times10^9\ \text{Pa})\pi\times15}\times\frac{180}{\pi}\times\frac{1}{0.3\ (°)/\text{m}}}$$

$$=125.5\times10^{-3}\ \text{m}=125.5\ \text{mm}$$

故空心圆轴的外径不应小于 125.5 mm，内径不能小于 62.75 mm。

§3-6 等直圆杆扭转时的应变能

当圆杆扭转时，杆内将积蓄应变能。由于杆件各横截面上的扭矩可能变化，同时，横截面上各点处的切应力也随该点到圆心的距离面改变，因此对于杆内应变能的计算，应先求出纯剪切应力状态下的应变能密度，然后，再计算全杆内所积蓄的应变能。



(a) (b)

图 3-13

图 3-13 所示单元体，处于纯剪切应力状态，设其左侧面固定，则单元体在变形后右侧面将向下移动 γdx。由于切应变 γ 值很小，因此，在变形过程中，上、下两面上的外力将不作功，只有右侧面上的外力 $\tau dydz$ 对相应的位移 γdx 作功。当材料在线弹性范围内工作时，单元体上外力所作的功为

$$dW = \frac{1}{2}(\tau dydz)(\gamma dx) = \frac{1}{2}\tau\gamma(dxdydz) \tag{a}$$

由于单元体内所积蓄的应变能 dV_ε 数值上等于 dW，于是，可得单位体积内的应变能即应变能密度 v_ε 为

$$v_\varepsilon = \frac{dV_\varepsilon}{dV} = \frac{dW}{dxdydz} = \frac{1}{2}\tau\gamma \tag{b}$$

由剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$，上式可改写为

$$v_\varepsilon = \frac{\tau^2}{2G} \tag{3-19a}$$

或

$$v_\varepsilon = \frac{G}{2}\gamma^2 \tag{3-19b}$$

求得纯剪切应力状态下的应变能密度 v_ε 后，等直圆杆在扭转时积蓄在杆中

的应变能 V_ε 即可由积分计算：

$$V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V = \int_l \int_A v_\varepsilon \mathrm{d}A \mathrm{d}x \tag{3-20}$$

式中，V 为杆的体积；A 为杆的横截面面积；l 为杆长。

若等直圆杆的两端受外力偶矩 M_e 作用而发生扭转(图 3-14a)，则可将式(3-19a)代入式(3-20)，其中的切应力 $\tau = \frac{T\rho}{I_p}$。由于杆任一横截面上的扭矩 T 均相同，因此，杆内的应变能为

$$V_\varepsilon = \int_l \int_A \frac{\tau^2}{2G} \mathrm{d}A \mathrm{d}x = \frac{l}{2G}\left(\frac{T}{I_p}\right)^2 \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \frac{T^2 l}{2GI_p} \tag{3-21a}$$

由于 $T = M_e$，上式又可写作

$$V_\varepsilon = \frac{M_e^2 l}{2GI_p} \tag{3-21b}$$

又由式(3-15b)可知 $\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$，杆的应变能 V_ε 也可改写成用相对扭转角 φ 表达的形式：

$$V_\varepsilon = \frac{GI_p}{2l}\varphi^2 \tag{3-21c}$$

以上应变能表达式也可利用外力功与应变能数值上相等的关系，直接从作用在杆端的外力偶矩 M_e 在杆发生扭转过程中所作的功 W 算得。当杆在线弹性范围内工作时，截面 B 相对于 A 的相对扭转角 φ 与外力偶矩 M_e 在加载过程中成正比关系，见图 3-14b。仿照§2-5 中所用方法，即可推导出以上应变能表达式。

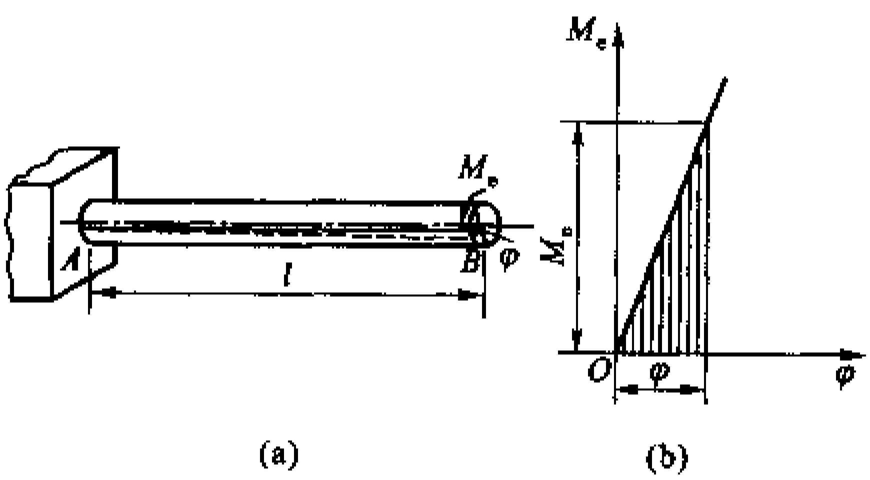


图 3-14

例题 3-7　图 a 表示工程中常用来起缓冲、减振或控制作用的圆柱形密圈螺旋弹簧承受轴向压(拉)力作用。设弹簧圈的平均半径为 R，簧杆的直径为 d，弹簧的有效圈数(即除去两端与平面接触部分不计的圈数)为 n，簧杆材料的切

变模量为 G。试在簧杆的斜度 α 小于 5°，且簧圈的平均直径 D 比簧杆直径 d 大得多的情况下，推导弹簧的应力和变形计算公式。

解：首先用截面法求出簧杆横截面上的内力。为此，沿簧杆的任一横截面假想地截取其上半部分(图 b)并研究其平衡。由于簧杆斜度 α 小于 5°，为分析方便，可视为零度，于是簧杆的横截面就在包含弹簧轴线(即外力 F 作用线)的纵向平面内。由平衡方程求得截面上的内力分量为通过截面形心的剪力 $F_S = F$ 和扭矩 $T = FR$。

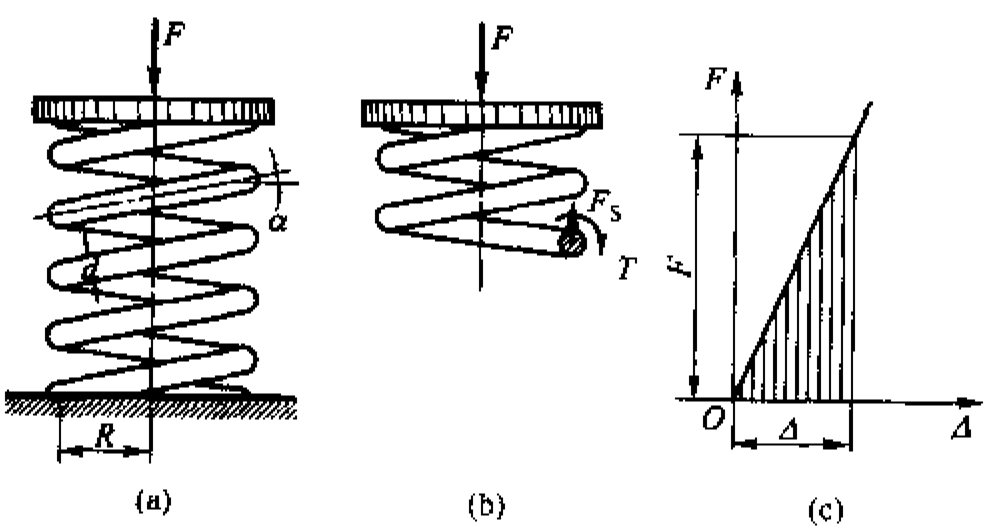
作为近似解，通常可略去与剪力 F_S 相应的切应力，且当簧圈的平均直径 D 与簧杆直径 d 的比值 $\frac{D}{d}$ 很大时，还可略去簧圈的曲率影响，面用扭转应力公式(3－7)计算簧杆横截面上的最大扭转切应力 τ_{max}，即

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{FR}{\frac{\pi}{16}d^3} = \frac{16FR}{\pi d^3} \tag{1}$$

由上式算出的最大切应力是偏低的近似值。在弹簧的设计计算中，常将该式乘以考虑簧杆曲率和剪力影响的修正因数。

下面利用能量原理来研究弹簧受轴向压(拉)力作用时的缩短(伸长)变形 Δ。根据试验结果可知，当弹簧所受外力不超过一定限度时，其变形 Δ 与外力 F 成正比，如图 c 所示。由此，可得外力所作功为

$$W = \frac{1}{2}F\Delta$$



例题 3－7 图

若只考虑簧杆扭转的影响，则由等直圆杆扭转时的应变能公式(3－21a)，可得簧杆内的应变能 V_ε 为

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{T^2 l}{GI_p} = \frac{(FR)^2 2\pi Rn}{2GI_p}$$

式中，$l = 2\pi Rn$ 代表簧杆中心线的全长；I_p 为簧杆横截面的极惯性矩。令外力

所作的功 W 与簧杆内的应变能 V_ε 相等，并引用 $I_p=\frac{\pi d^4}{32}$，即得

$$\Delta=\frac{2\pi RnFR^2}{G\frac{\pi d^4}{32}}=\frac{64FR^3n}{Gd^4} \tag{2}$$

由于在计算应变能 V_ε 时，略去了切力的影响，并应用直杆扭转的公式，故所得的 V_ε 值是近似的，且比实际值为小，因而，算出的变形 Δ 也较实际值略小，但其相对误差小于簧杆横截面的应力计算式(1)。

若令
$$k=\frac{Gd^4}{64R^3n} \tag{3}$$
代表弹簧的刚度系数，其单位为 N/m，则可将式(2)改写为

$$\Delta=\frac{F}{k} \tag{4}$$

§3-7　等直非圆杆自由扭转时的应力和变形

在等直圆杆的扭转问题中，分析杆横截面上应力的主要依据为平面假设。对于等直非圆杆，其横截面在杆扭转后并不符合平面假设。例如，取一矩形截面杆，事先在其表面绘出横截面的周线，则在杆扭转后可看到这些周线变成曲线(图 3-15)，从而可推知，其横截面在杆变形后将发生**翘曲**而不再保持平面。因此，等直圆杆在扭转时的计算公式不适用于非圆截面杆的扭转问题。对于这类问题，只能用弹性力学方法求解。

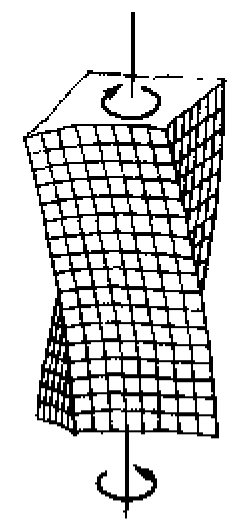


图 3-15

等直非圆杆在扭转时横截面虽将发生翘曲，但当等直杆在两端受外力偶作用，且端面可以自由翘曲时，称为**纯扭转**或**自由扭转**，其相邻两横截面的翘曲程度完全相同，横截面上仍然是只有切应力而没有正应力。若杆的两端受到约束而不能自由翘曲，称为**约束扭转**，则其相邻两横截面的翘曲程度不同，将在横截面上引起附加的正应力。由约束扭转所引起的附加正应力，在一般实体截面杆中通常均很小，可略去不计。但在薄壁杆件中，这一附加正应力则成为不能忽略的量[①]。本节仅简单介绍矩形及狭长矩形截面的等直杆在自由扭转时弹性力学解的结果。

为了对矩形截面杆进行强度和刚度计算，下面给出用以计算横截面上最大

① 对于薄壁杆件在约束扭转时其横截面上附加正应力的分析，可参看有关参考书，例如，刘鸿文主编《高等材料力学》，高等教育出版社，1985 年。

切应力和单位长度扭转角的计算公式

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_t} \tag{3-22}$$

$$\varphi'=\frac{T}{GI_t} \tag{3-23}$$

式中，W_t 仍称为扭转截面系数；I_t 称为截面的**相当极惯性矩**；而 GI_t 称为非圆截面杆的扭转刚度。这里的 I_t 和 W_t 除了在量纲上与圆截面的 I_p 和 W_p 相同外，在几何意义上截然不同。

矩形截面的 I_t 和 W_t 与截面尺寸的关系如下：

$$I_t=\alpha b^4 \tag{3-24a}$$

$$W_t=\beta b^3 \tag{3-24b}$$

式中，因数 α，β 可从表 3－1 中查出，其值均随矩形截面的长、短边尺寸 h 和 b 的比值 $m=\frac{h}{b}$ 而变化。横截面上的最大切应力 τ_{max} 发生在长边中点即在截面周边上距形心最近的点处；而在短边中点处的切应力则为该边上各点处切应力中的最大值，可根据 τ_{max} 和表 3－1 中的因数 ν，按下式计算：

$$\tau=\nu\tau_{max} \tag{3-25}$$

矩形截面周边上各点处的切应力方向必与周边相切(图 3－16a)，因为在杆表面上没有切应力，故由切应力互等定理可知，在横截面周边上各点处不可能有垂直于周边的切应力分量。同理，在矩形截面的顶点处切应力必等于零。矩形截面上切应力的变化情况如图 3－16a。

表 3－1 矩形截面杆在自由扭转时的因数 α，β 和 ν

$m=\frac{h}{b}$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0
α	0.140	0.199	0.294	0.457	0.622	0.790	1.123	1.789	2.456	3.123
β	0.208	0.263	0.346	0.493	0.645	0.801	1.150	1.789	2.456	3.123
ν	1.000	—	0.858	0.796	—	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743

附注：1. 当 $m>4$ 时，亦可按下列近似公式计算 α，β 和 ν：

$$\alpha=\beta\approx\frac{1}{3}(m-0.63),\quad \nu\approx0.74$$

2. 当 $m>10$ 时，$\alpha=\beta\approx\frac{m}{3}$，$\nu=0.74$

根据表 3－1 的附注 2，可得狭长矩形截面(图 3－16b)的 I_t 和 W_t 与截面尺寸间的关系为

$$I_t=\frac{1}{3}h\delta^3 \tag{3-26a}$$

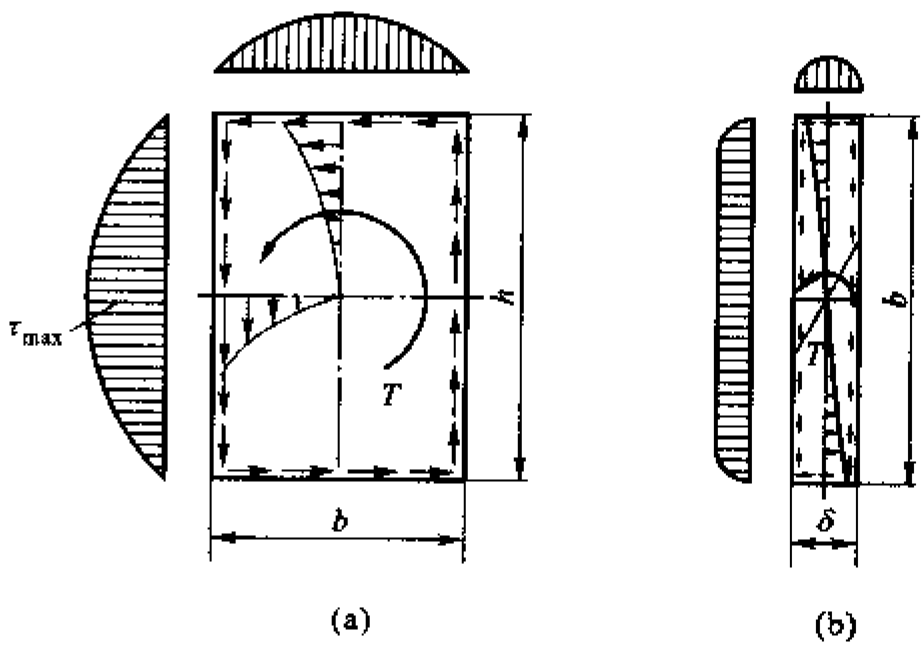


图 3-16

$$W_t = \frac{1}{3}h\delta^2 = \frac{I_t}{\delta} \tag{3-26b}$$

为了与一般矩形相区别,在上式中已将狭长矩形的短边尺寸 b 改写为 δ。狭长矩形截面上切应力的变化情况如图 3-16b。切应力在沿长边各点处的方向均与长边相切,其数值除在靠近顶点处以外均相等。

例题 3-8 一矩形截面等直钢杆,其横截面尺寸为 $h=100$ mm, $b=50$ mm,长度 $l=2$ m,在杆两端作用一对矩为 $M_e=4\,000$ N·m 的扭转力偶。钢的许用切应力 $[\tau]=100$ MPa,切变模量 $G=80$ GPa,许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1$ (°)/m。试校核杆的强度和刚度。

解: 由截面法求得 $T=M_e=4\,000$ N·m。由 $m=\dfrac{h}{b}=\dfrac{100}{50}=2$,由表 3-1 查得 $\beta=0.493$ 和 $\alpha=0.457$。于是由式(3-24b)和(3-24a)分别求得

$$W_t = \beta b^3 = 0.493\times(50\times10^{-3}\ \text{m})^3 = 61.6\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

和

$$I_t = \alpha b^4 = 0.457\times(50\times10^{-3}\ \text{m})^4 = 286\times10^{-8}\ \text{m}^4$$

根据有关数据及式(3-22)和(3-23)分别得

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{4\,000\ \text{N·m}}{61.6\times10^{-6}\ \text{m}^3} = 65\times10^6\ \text{Pa} = 65\ \text{MPa} < [\tau]$$

$$\varphi' = \frac{T}{GI_t} = \frac{4\,000\ \text{N·m}}{(80\times10^9\ \text{Pa})(286\times10^{-8}\ \text{m}^4)} = 0.017\,45\ \text{rad/m}$$
$$= 1\ (°)/\text{m} = [\varphi']$$

以上结果表明,杆满足强度条件和刚度条件的要求。

*§3-8 开口和闭口薄壁截面杆自由扭转时的应力和变形

I. 开口薄壁截面杆

在土建工程中常采用一些薄壁截面的构件。若薄壁截面的壁厚中线是一条不封闭的折线或曲线，则称为开口薄壁截面，如各种轧制型钢（工字钢、槽钢、角钢等）或工字形、槽形、T字形截面（图3-17）等。这类截面的杆件在外力作用下常会发生扭转变形，本节只讨论在自由扭转时应力和变形的近似计算。

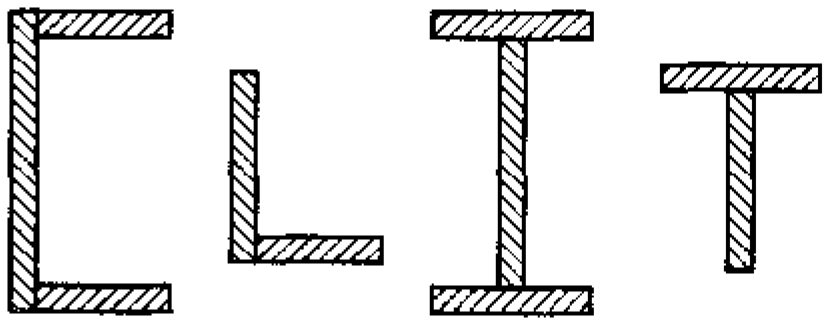


图 3-17

对某些开口薄壁截面杆，例如各种轧制型钢，其横截面可以看成是由若干狭长矩形所组成的组合截面（图3-17）。根据杆在自由扭转时横截面的变形情况，可作出如下假设：杆扭转后，横截面周线虽然在杆表面上变成曲线，但在其变形前的平面上的投影形状仍保持不变。当开口薄壁杆沿杆长每隔一定距离有加劲板时，上述假设基本上和实际变形情况符合。由假设得知，在杆扭转后，组合截面的各组成部分所转动的单位长度扭转角与整个截面的单位长度扭转角 φ' 相同，于是，有变形相容条件

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \cdots = \varphi_n' = \varphi' \tag{a}$$

式中，$\varphi_i'(i=1,2,\cdots,n)$ 代表组合截面中组成部分 i 的单位长度扭转角。由式(3-23)，可得补充方程

$$\frac{T_1}{GI_{t1}} = \frac{T_2}{GI_{t2}} = \cdots = \frac{T_n}{GI_{tn}} = \frac{T}{GI_t} \tag{b}$$

式中，$I_{ti}(i=1,2,\cdots,n)$ 和 T_i 分别代表组合截面中组成部分 i 的相当极惯性矩和其上的扭矩，而 I_t 和 T 则分别代表整个组合截面的相当极惯性矩和扭矩。由合力矩和分力矩的静力关系，可得

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n \tag{c}$$

联立式(b)和(c)，消去 T，G 后，即得整个截面的相当极惯性矩为

$$I_t = \sum_{i=1}^{n} I_{ti} \tag{d}$$

对于开口薄壁截面，当其每一组成部分 i 的狭长矩形厚度 δ_i 与宽度 h_i 之比很小时，就可利用近似公式(3－26a)将式(d)改写为

$$I_t = \sum_{i=1}^{n} I_{ti} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i\delta_i^3 \tag{3－27a}$$

为了求得整个截面上的最大切应力 τ_{max}，须先研究其每一组成部分 i 上的最大切应力 τ_{maxi}。矩形截面杆在扭转时的最大切应力由式(3－22)并利用狭长矩形截面的 W_t 表达式(3－26b)和上述式(b)的关系，可得

$$\tau_{maxi} = \frac{T_i}{W_{ti}} = \frac{T_i}{I_{ti}}\delta_i = \frac{T}{I_t}\delta_i \tag{e}$$

由式(e)可见，该组合截面上的最大切应力将发生在厚度为 δ_{max} 的组成部分的长边处，其值为

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_t}\delta_{max} = \frac{T\delta_{max}}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i\delta_i^3} \tag{3－28}$$

式中，δ_{max} 为组合截面的所有组成部分中厚度的最大值。

在计算用型钢制成的等直杆的扭转变形时，由于实际型钢截面的翼缘部分是变厚度的，且在连接处有过渡圆角，这就增加了杆的刚度，故应对 I_t 表达式(3－27a)作如下修正，并将修正后的 I_t 改写为 I_t'：

$$I_t' = \eta \cdot \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i\delta_i^3 \tag{3－27b}$$

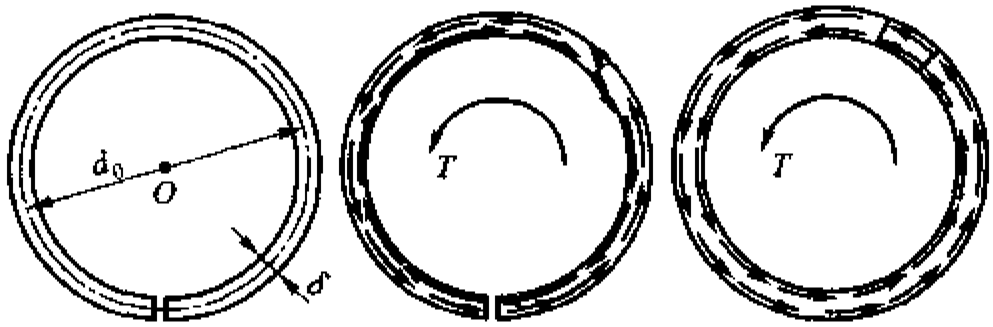
式中，η 为修正因数。对于角钢截面，可以取 $\eta = 1.00$；槽钢截面 $\eta = 1.12$；T 形钢截面 $\eta = 1.15$；工字钢截面 $\eta = 1.20$。在计算单位长度扭转角时，仍采用式(3－23)，并以 I_t' 代替式中的 I_t。

例题 3－9 一钢制环形截面薄壁杆沿纵向切开一缝，其横截面如图 a 所示。杆在两端受一对矩为 $M_e = 30\ \text{N·m}$ 的扭转力偶作用。已知环形的平均直径 $d_0 = 40\ \text{mm}$，壁厚 $\delta = 2\ \text{mm}$；钢的切变模量 $G = 80\ \text{GPa}$。试计算杆横截面上的最大切应力和单位长度扭转角。若杆无纵向切缝，再作应力和变形计算，并比较两种情况下的结果。

解：杆有纵向切缝时为一开口环形薄壁截面杆。在计算其横截面上的最大切应力 τ_{max}、单位长度扭转角 φ' 以及横截面的 I_t 和 W_t 时，可将它展开为一狭长矩形截面来处理。

由截面法可知

$$T = M_e = 30\ \text{N·m}$$



(a) (b) (c)

例题 3-9 图

从式(3-26a)和(3-26b)分别求得

$$I_t = \frac{1}{3}h\delta^3 = \frac{1}{3}(\pi d_0)\delta^3 = \frac{1}{3}(\pi \times 40 \times 10^3\ \mathrm{m})(2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})^3$$
$$= 335 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}^4$$

和

$$W_t = \frac{I_t}{\delta} = \frac{335 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}^4}{2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 167.5 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}^3$$

将 T, W_t 代入式(3-22), T, I_t, G 代入式(3-23),分别得

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{30\ \mathrm{N\cdot m}}{167.5 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}^3} = 180\ \mathrm{MPa}$$

和

$$\varphi' = \frac{T}{GI_t} = \frac{30\ \mathrm{N\cdot m}}{(80 \times 10^9\ \mathrm{Pa})(335 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}^4)} = 1.12\ \mathrm{rad/m}$$

没有纵向切缝时的横截面为环形截面(图 c),由式(3-1)计算其切应力为

$$\tau = \frac{T}{2A_0\delta} = \frac{30\ \mathrm{N\cdot m}}{2 \times \frac{\pi}{4}(40 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 \times (2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})} = 6 \times 10^6\ \mathrm{Pa}$$
$$= 6\ \mathrm{MPa}$$

再由式(3-2),求得

$$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{\gamma}{r_0} = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{2}{d_0}$$
$$= \frac{(6 \times 10^6\ \mathrm{Pa}) \times 2}{(8 \times 10^9\ \mathrm{Pa})(40 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})} = 3.75 \times 10^{-3}\ \mathrm{rad/m}$$

与前面的结果比较可知,环形截面杆若沿其纵向有一切缝,则应力和变形的数值将显著增加。在本例题中,切应力和单位长度扭转角因有纵向切缝而分别增大 30 倍和 300 倍。两种情况下切应力沿壁厚的变化规律和指向也各不相同,分别表示于图 b 和图 c 中。

II. 闭口薄壁截面杆

在工程中有一类薄壁截面的壁厚中线是一条封闭的折线或曲线，这类截面称为闭口薄壁截面，例如环形薄壁截面和箱形薄壁截面。在桥梁中经常采用箱形截面梁，在外力作用下也可能出现扭转变形。本节只讨论这类杆件在自由扭转时的应力和变形计算。

设一横截面为任意形状、变厚度的闭口薄壁截面等直杆，在两自由端承受一对扭转外力偶作用，如图 3-18a 所示。由于杆横截面上的内力为扭矩，因此，其横截面上将只有切应力。又因是闭口薄壁截面，故可假设切应力沿壁厚无变化，且其方向与壁厚的中线相切(图 3-18b)。在杆的壁厚远小于其横截面尺寸时，由假设所引起的误差在工程计算中是允许的。

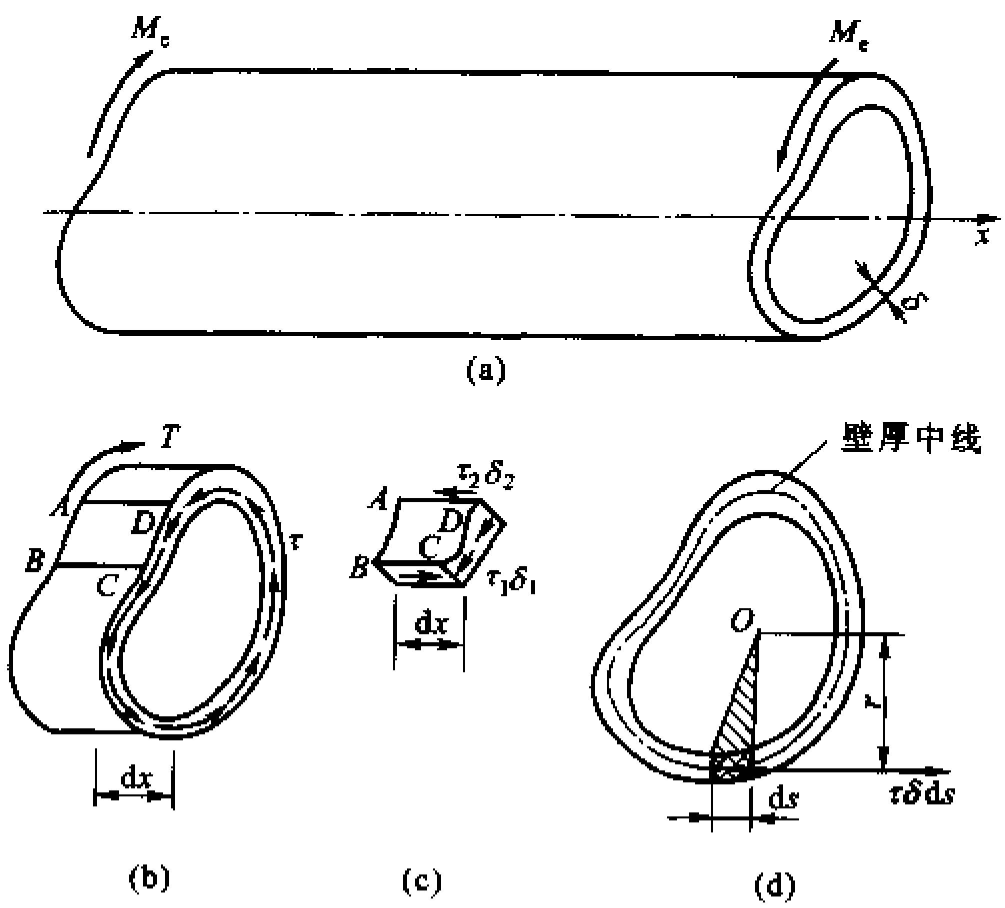


图 3-18

取长为 dx 的杆段，用两个与壁厚中线正交的纵截面从杆壁中取出小块 $ABCD$，如图 3-18c 所示。设横截面上 C 和 D 两点处的切应力分别为 τ_1 和 τ_2，而壁厚则分别为 δ_1 和 δ_2。根据切应力互等定理，在上、下两纵截面上应分别有切应力 τ_1 和 τ_2(图 3-18c)。由平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad \tau_1\delta_1 dx = \tau_2\delta_2 dx$$

可得

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2 \tag{a}$$

由于所取的两纵截面是任意选择的，故上式表明，横截面沿其周边任一点处的切应力 τ 与该点处的壁厚 δ 之乘积为一常数，即

$$\tau\delta = 常数 \tag{b}$$

为找出横截面上的切应力 τ 与扭矩 T 之间的关系，沿壁厚中线取出长为 $\mathrm{d}s$ 的一段，在该段上的内力元素为 $\tau\delta\mathrm{d}s$（图 3－18d），其方向与壁厚中线相切。其对横截面平面内任一点 O 的矩为

$$\mathrm{d}T = (\tau\delta\mathrm{d}s)r$$

式中，r 是从矩心 O 到内力元素 $\tau\delta\mathrm{d}s$ 作用线的垂直距离。由力矩合成原理可知，截面上扭矩应为 $\mathrm{d}T$ 沿壁厚中线全长 s 的积分。注意到式(b)，即得

$$T = \int_s \mathrm{d}T = \int_s \tau\delta r\mathrm{d}s = \tau\delta\int_s r\mathrm{d}s$$

由图 3－18d 可知，$r\mathrm{d}s$ 为图中阴影线三角形面积的两倍，故其沿壁厚中线全长 s 的积分应是该中线所围面积 A_0 的两倍。于是可得

$$T = \tau\delta\cdot 2A_0$$

或

$$\tau = \frac{T}{2A_0\delta} \tag{3-29}$$

上式即为闭合薄壁截面等直杆在自由扭转时横截面上任一点处切应力的计算公式。上式与式(3－1)在形式上相同，但在应用上则具有普遍性。

由式(b)可知，壁厚 δ 最薄处横截面上的切应力 τ 为最大。于是，由式(3－29)可得杆横截面上的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2A_0\delta_{\min}} \tag{3-30}$$

式中，$\delta_{\min}$为薄壁截面的最小壁厚。

闭口薄壁截面等直杆的单位长度扭转角 φ' 可按应变能在数值上等于外力功的原理来求得。

由纯剪切应力状态下的应变能密度 v_ε 的表达式(3－19a)及式(3－29)，可得杆内任一点处的应变能密度为

$$v_\varepsilon = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2G}\left(\frac{T}{2A_0\delta}\right)^2 = \frac{T^2}{8GA_0^2\delta^2} \tag{c}$$

又根据应变能密度 v_ε 计算扭转时杆内应变能的表达式(3－20)，可得单位长度杆内的应变能为

$$V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V = \frac{T^2}{8GA_0^2}\int_V \frac{\mathrm{d}V}{\delta^2}$$

式中，V 为单位长度杆壁的体积，$\mathrm{d}V = 1\cdot\delta\cdot\mathrm{d}s = \delta\mathrm{d}s$。将 $\mathrm{d}V$ 代入上式，并沿壁

厚中线的全长 s 积分，即得

$$V_\varepsilon = \frac{T^2}{8GA_0^2}\int_s \frac{ds}{\delta} \tag{d}$$

然后，计算单位长度杆两端截面上的扭矩对杆段的相对扭转角 φ' 所作的功。由于杆在线弹性范围内工作，因此，所作的功应为

$$W = \frac{T\varphi'}{2} \tag{e}$$

(d)和(e)两式中的 V_ε 和 W 在数值上相等，从而解得

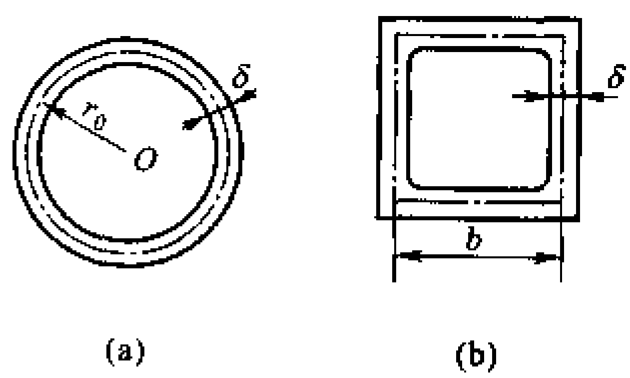
$$\varphi' = \frac{T}{4GA_0^2}\int_s \frac{ds}{\delta} \tag{3-31}$$

即得所要求的单位长度扭转角。式中的积分取决于杆的壁厚 δ 沿壁厚中线 s 的变化规律。当壁厚 δ 为常数时，则得

$$\varphi = \frac{Ts}{4GA_0^2\delta} \tag{3-32}$$

式中，s 为壁厚中线的全长。

例题 3-10 一环形薄壁截面杆和一正方的箱形薄壁截面杆(图 a,b)，两杆的材料相同，长度 l、壁厚 δ 和横截面面积亦均相同。若作用在杆端的扭转力偶也相同，试求两杆切应力之比和单位长度扭转角之比。



例题 3-10 图

解：由式(3-29)及(3-32)可见，这类截面的切应力和单位长度扭转角都与壁厚中线所围成的面积有关。设环形和箱形薄壁截面的面积分别为 A_1 和 A_2，其壁厚中线围成的面积分别为 A_{01} 和 A_{02}。

显然 $$A_1 = 2\pi r_0\delta, \quad A_2 = 4b\delta$$

因为 $A_1 = A_2$，所以

$$2\pi r_0\delta = 4b\delta$$

从而有

$$b = \frac{\pi r_0}{2} \tag{1}$$

再将 A_{01} 和 A_{02} 均用 r_0 表示：

$$A_{01} = \pi r_0^2$$

$$A_{02} = b^2 = \left(\frac{\pi r_0}{2}\right)^2$$

由此得

$$\frac{A_{01}}{A_{02}} = \frac{4}{\pi} \tag{2}$$

从式(3－29)可得环形与箱形薄壁截面上的切应力 τ_1,τ_2 之比为

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\dfrac{T}{2A_{01}\delta}}{\dfrac{T}{2A_{02}\delta}} = \frac{A_{02}}{A_{01}} = \frac{\pi}{4} = 0.785 \tag{3}$$

再利用式(3－32)求环形与箱形薄壁截面杆的单位长度扭转角 φ_1' 与 φ_2' 之比：

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} = \frac{Ts_1}{4GA_{01}^2\delta}\bigg/\frac{Ts_2}{4GA_{02}^2\delta} = \left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^2\frac{s_1}{s_2}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{2\pi r_0}{4b} = 0.617 \tag{4}$$

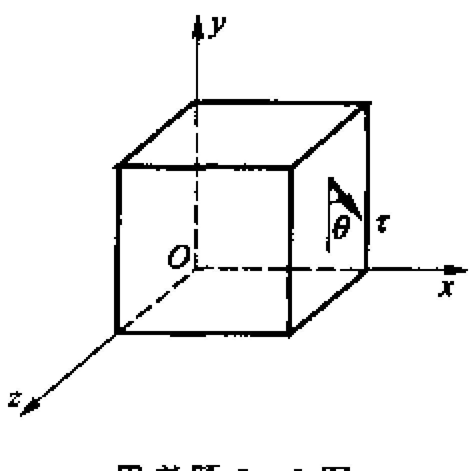
式中，s_1,s_2 分别为环形和箱形薄壁截面壁厚中线的全长。

计算结果表明，在本例题规定的条件下，环形截面杆的切应力和单位长度扭转角均低很多，其抗扭性能较好。此外，箱形截面在内角处还有应力集中，因而环形截面较为有利。

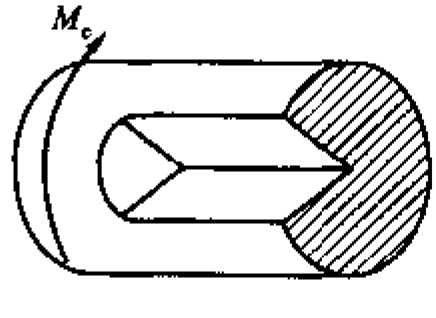
思　考　题

3－1　薄壁圆筒纯扭转时，如果在其横截面及径向截面上存在有正应力，那么取出的分离体能否平衡？

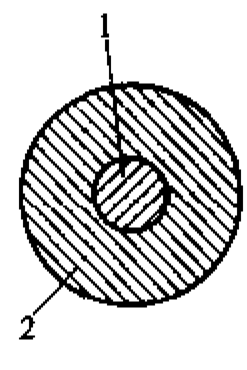
3－2　图示单元体，已知右侧面上有与 y 方向成 θ 角的切应力 τ，试根据切应力互等定理，画出其他面上的切应力。



思考题 3－2 图



思考题 3－3 图



思考题 3－4 图

3－3　试绘出图示圆轴的横截面及径向截面上的切应力变化情况。

3－4　由实心圆杆 1 及空心圆杆 2 组成的受扭圆轴如图所示。假设在扭转过程中两杆无相对滑动，若(a)两杆材料相同，即 $G_1=G_2$；(b)两杆材料不同，$G_1=2G_2$，试绘出横截面上切应力沿水平直径的变化情况。

3－5 长为 l、直径为 d 的两根由不同材料制成的圆轴，在其两端作用相同的扭转力偶矩 M_e，试问：

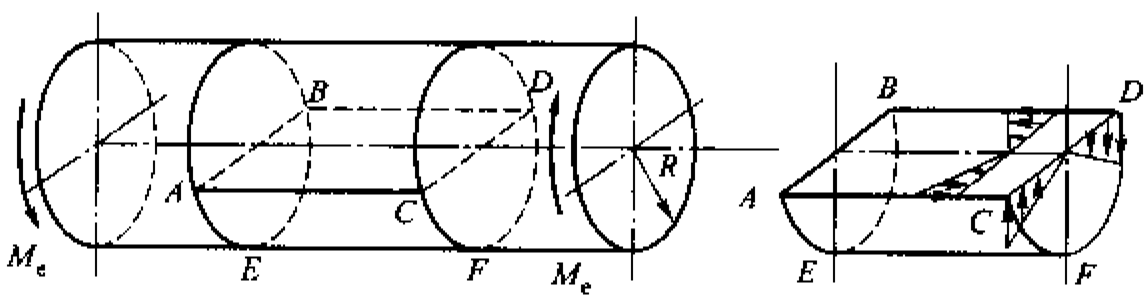
（1）最大切应力 τ_{max} 是否相同？为什么？

（2）相对扭转角 φ 是否相同？为什么？

3－6 图 a 所示受扭圆杆，由两个横截面 ABE、CDF 和一个通过杆轴的纵截面 $ABCD$ 截取的一隔离体，由横截面上的切应力分布规律和切应力互等定理，可得隔离体各截面上的切应力分布如图 b 所示，试问：

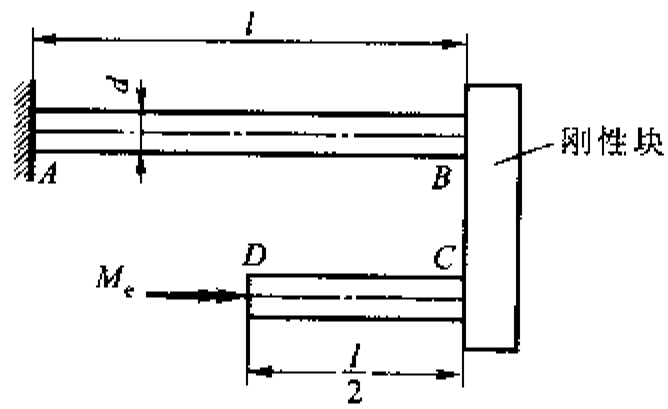
（1）纵截面 $ABCD$ 上切应力所构成的合力偶矩为多大？

（2）该合力偶矩是如何去平衡的？



思考题 3－6 图

3－7 AB 和 CD 为材料及直径均分别相同的圆截面杆，其切变模量为 G，直径为 d。它们均固结于刚性块 BC 上，A 端固定，在截面 D 上作用外力偶矩 M_e，如图所示。试利用外力偶矩所作的功，在数值上等于储存在杆内的应变能这一关系，求截面 D 的扭转角 φ_D。



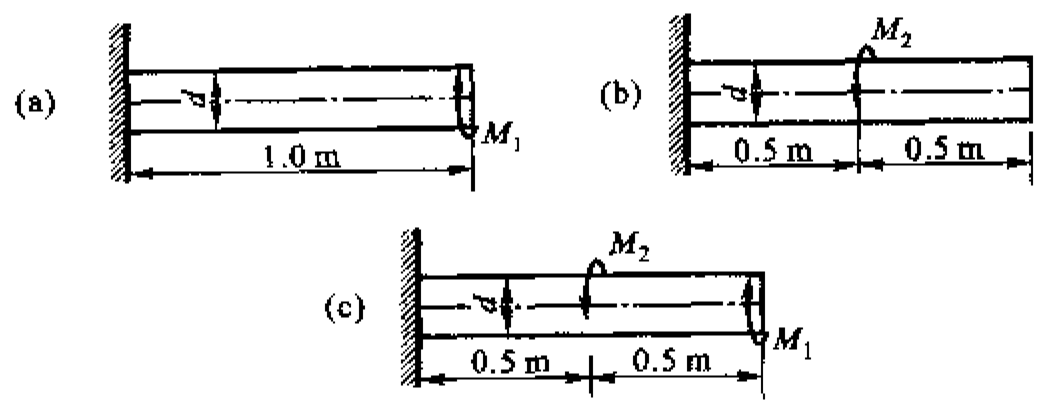
思考题 3－7 图

3－8 同一圆杆在图 a,b,c 三种不同加载情况下，在线弹性范围内工作，且变形微小，试问：

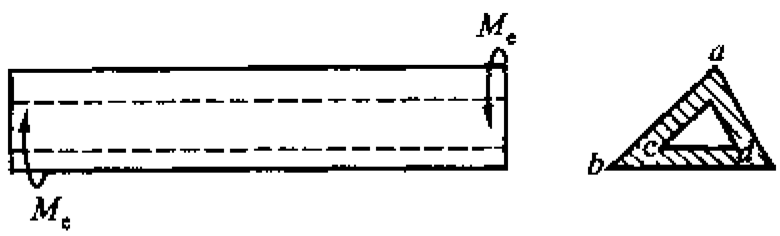
（1）图 c 受力情况下的应力是否等于图 a 和 b 情况下应力的叠加？变形是否也如此？

（2）图 c 受力情况下的应变能 V_ε 是否等于前两种情况下的应变能 $V_{\varepsilon a}$ 和 $V_{\varepsilon b}$ 的叠加？为什么？已知 $d = 100$ mm，$M_1 = 5$ kN·m，$M_2 = 10$ kN·m

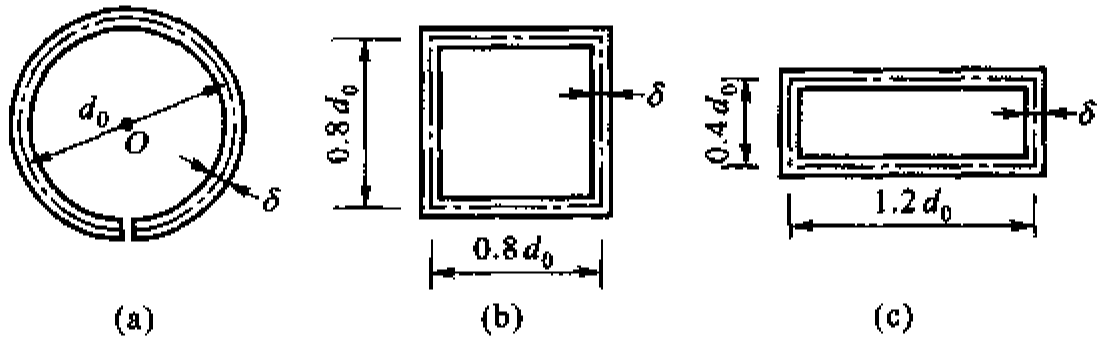
3－9 图示空心三角形截面杆的两端受扭转力偶矩 M_e 作用，试问其横截面上 a,b,c,d 四个点处是否存在切应力？为什么？



思考题 3-8 图



思考题 3-9 图



思考题 3-10 图

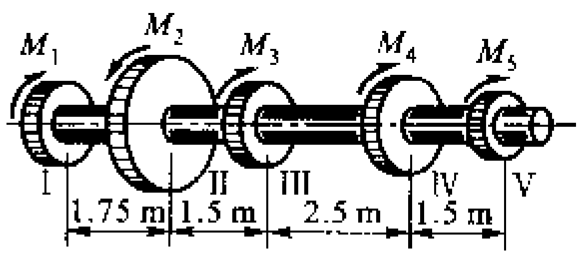
3-10 长度相同、壁厚均为 $\delta=\dfrac{d_0}{20}$ 的三根薄壁截面杆的横截面如图所示。若三杆的两端都受到相同的一对矩为 M_e 的扭转力偶作用，且杆在弹性范围内工作，试问其横截面上的切应力哪个大，哪个小？

习 题

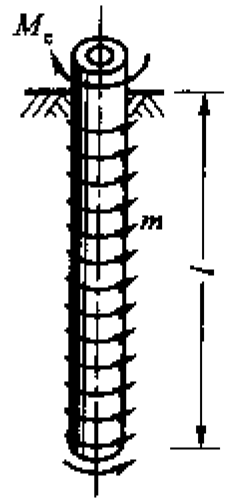
3-1 一传动轴作匀速转动，转速 $n=200$ r/min，轴上装有五个轮子，主动轮 II 输入的功率为 60 kW，从动轮，I，III，IV，V 依次输出 18 kW，12 kW，22 kW 和 8 kW。试作轴的扭矩图。

3-2 一钻探机的功率为 10 kW，转速 $n=180$ r/min。钻杆钻入土层的深度 $l=40$ m。如土壤对钻杆的阻力可看作是均匀分布的力偶，试求分布力偶的集度 m，并作钻杆的扭矩图。

3-3 圆轴的直径 $d=50$ mm，转速为 120 r/min。若该轴横截面上的最大切应力等于 60 MPa，试问所传递的功率为多大？



习题 3－1 图



习题 3－2 图

3－4 空心钢轴的外径 $D=100$ mm，内径 $d=50$ mm。已知间距为 $l=2.7$ m 的两横截面的相对扭转角 $\varphi=1.8°$，材料的切变模量 $G=80$ GPa。试求：

（1）轴内的最大切应力；

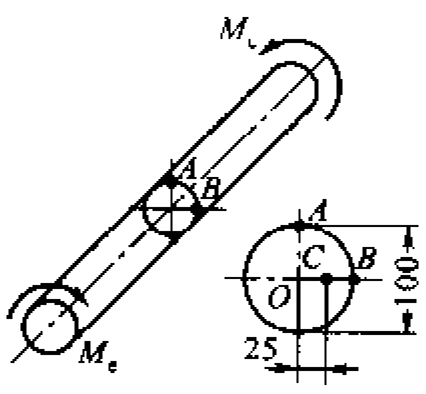
（2）当轴以 $n=80$ r/min 的速度旋转时，轴所传递的功率。

3－5 实心圆轴的直径 $d=100$ mm，长 $l=1$ m，其两端所受外力偶矩 $M_e=14$ kN·m，材料的切变模量 $G=80$ GPa。试求：

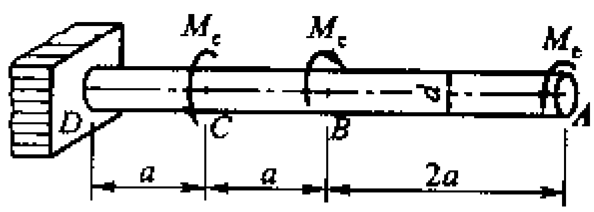
（1）最大切应力及两端截面间的相对扭转角；

（2）图示截面上 A，B，C 三点处切应力的数值及方向；

（3）C 点处的切应变。



习题 3－5 图



习题 3－6 图

3－6 图示一等直圆杆，已知 $d=40$ mm，$a=400$ mm，$G=80$ GPa，$\varphi_{DB}=1°$。试求：

（1）最大切应力；

（2）截面 A 相对于截面 C 的扭转角。

3－7 某小型水电站的水轮机容量为 50 kW，转速为 300 r/min，钢轴直径为 75 mm，若在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力 $[\tau]=20$ MPa。试校核轴的强度。

3－8 已知钻探机钻杆（参看题 3－2 图）的外径 $D=60$ mm，内径 $d=50$ mm，功率 $P=7.355$ kW，转速 $n=180$ r/min，钻杆入土深度 $l=40$ m，钻杆材料的 $G=80$ GPa，许用切应力 $[\tau]=40$ MPa。假设土壤对钻杆的阻力是沿长度均匀分布的，试求：

（1）单位长度上土壤对钻杆的阻力矩集度 m；

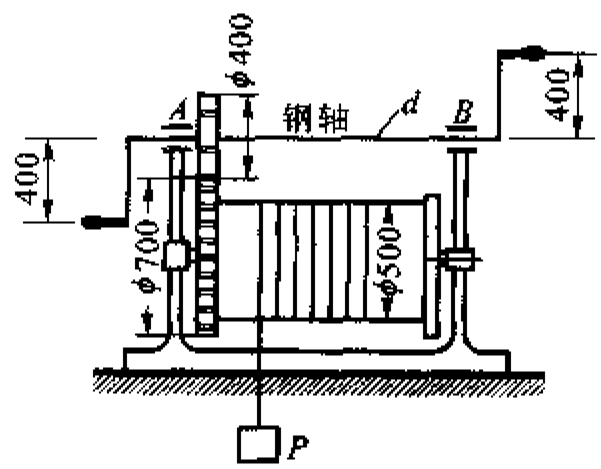
（2）作钻杆的扭矩图，并进行强度校核；

(3) 两端截面的相对扭转角。

3-9　图示绞车由两人同时操作，若每人在手柄上沿旋转的切向作用力 F 均为 0.2 kN，已知轴材料的许用切应力 $[\tau]=40$ MPa，试求：

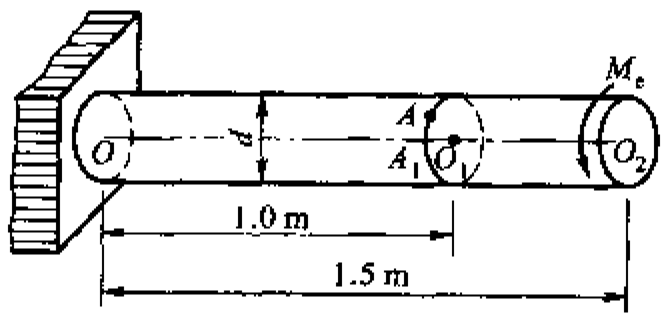
(1) AB 轴的直径；

(2) 绞车所能吊起的最大重量。



习题 3-9 图

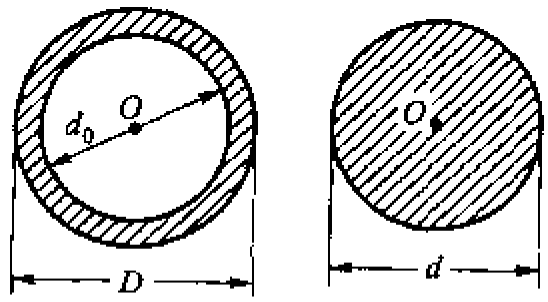
3-10　直径 $d=50$ mm 的等直圆杆，在自由端截面上承受外力偶矩 $M_e=12$ kN·m，而在圆杆表面上的 A 点将移动到 A_1 点，如图所示。已知 $\Delta s=\overset{\frown}{AA_1}=6.3$ mm，圆杆材料的弹性模量 $E=200$ GPa，试求泊松比 ν。（提示：各向同性体材料的三个弹性常数 E,G,ν 间存在 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ 的关系。



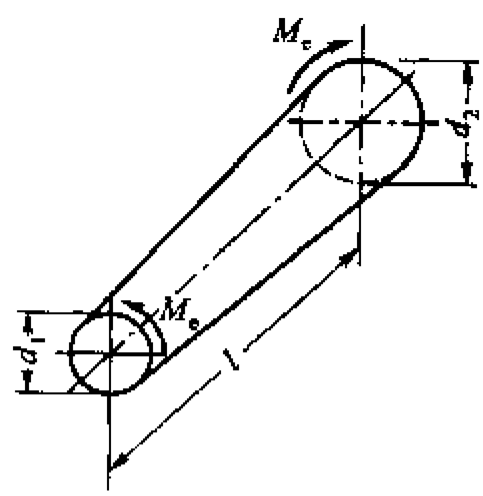
习题 3-10 图

3-11　直径 $d=25$ mm 的钢圆杆，受轴向拉力 60 kN 作用时，在标距为 200 mm 的长度内伸长了 0.113 mm。当其承受一对扭转外力偶矩 $M_e=0.2$ kN·m 时，在标距为 200 mm 的长度内相对扭转了 0.732°的角度。试求钢材的弹性常数 E,G 和 ν。

3-12　长度相等的两根受扭圆轴，一为空心圆轴，一为实心圆轴，两者材料相同，受力情况也一样。实心轴直径为 d；空心轴外径为 D，内径为 d_0，且 $\dfrac{d_0}{D}=0.8$。试求当空心轴与实心轴的最大切应力均达到材料的许用切应力（$\tau_{max}=[\tau]$），扭矩 T 相等时的重量比和刚度比。



习题 3-12 图

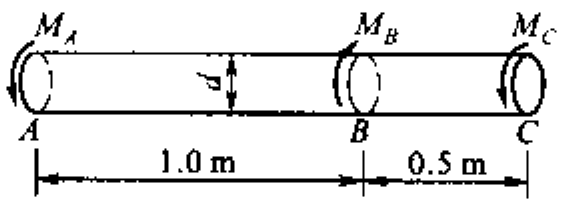


习题 3-13 图

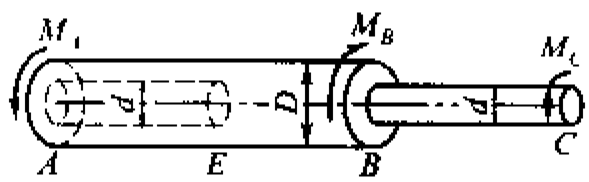
3－13　全长为 l、两端面直径分别为 d_1，d_2 的圆锥形杆，在两端各承受一外力偶矩 M_e，如图所示。试求杆两端面间的相对扭转角。

3－14　已知实心圆轴的转速 $n=300$ r/min，传递的功率 $P=330$ kW，轴材料的许用切应力 $[\tau]=60$ MPa，切变模量 $G=80$ GPa。若要求在 2 m 长度的相对扭转角不超过 1°，试求该轴的直径。

3－15　图示等直圆杆，已知外力偶矩 $M_A=2.99$ kN·m，$M_B=7.20$ kN·m，$M_C=4.21$ kN·m，许用切应力 $[\tau]=70$ MPa，许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1(°)/\text{m}$，切变模量 $G=80$ GPa。试确定该轴的直径 d。



习题 3－15 图

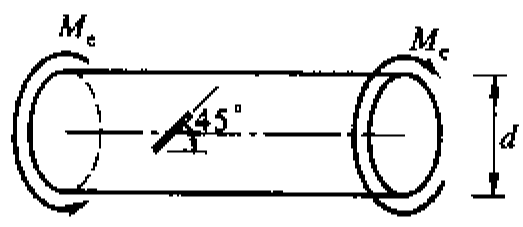


习题 3－16 图

3－16　阶梯形圆杆，AE 段为空心，外径 $D=140$ mm，内径 $d=100$ mm；BC 段为实心，直径 $d=100$ mm。外力偶矩 $M_A=18$ kN·m，$M_B=32$ kN·m，$M_C=14$ kN·m。已知：$[\tau]=80$ MPa，$[\varphi']=1.2(°)/\text{m}$，$G=80$ GPa。试校核该轴的强度和刚度。

3－17　习题 3－1 中所示的轴，材料为钢，其许用切应力 $[\tau]=20$ MPa，切变模量 $G=80$ GPa，许可单位长度扭转角 $[\varphi']=0.25\ (°)/\text{m}$。试按强度及刚度条件选择圆轴的直径。

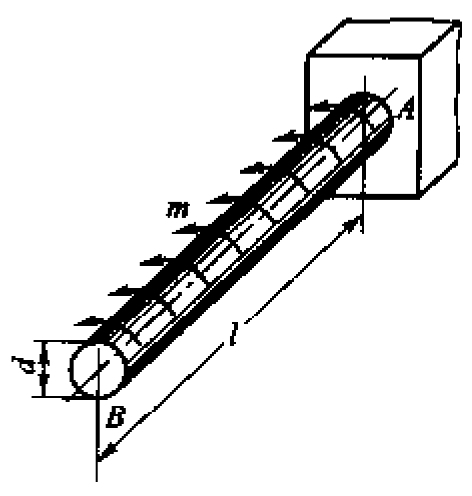
3－18　一直径为 d 的实心圆杆如图，在承受扭转力偶矩 M_e 后，测得圆杆表面与纵向线成 45°方向上的线应变为 ε。试导出以 M_e，d 和 ε 表示的切变模量 G 的表达式。



习题 3－18 图

3－19　有一壁厚为 25 mm、内径为 250 mm 的空心薄壁圆管，其长度为 1 m，作用在轴两端面内的外力偶矩为 180 kN·m。试确定管中的最大切应力，并求管内的应变能。已知材料的切变模量 $G=80$ GPa。

3－20　一端固定的圆截面杆 AB，承受集度为 m 的均布外力偶作用，如图所示。试求杆内积蓄的应变能。已知材料的切变模量为 G。



习题 3－20 图

3－21　簧杆直径 $d=18$ mm 的圆柱形密圈螺旋弹簧，受拉力 $F=0.5$ kN 作用，弹簧的平均直径为 $D=125$ mm，材料的切变模量 $G=80$ GPa。试求：

(1) 簧杆内的最大切应力；

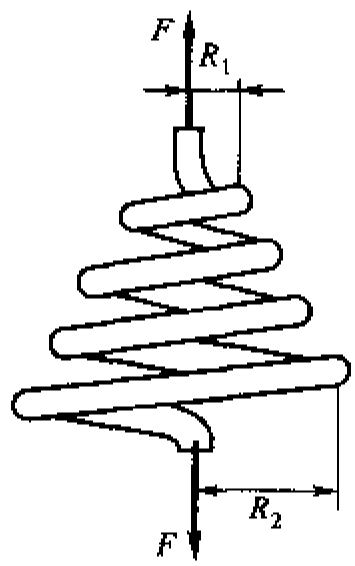
(2) 为使其伸长量等于 6 mm 所需的弹簧有效圈数。

3－22　一圆锥形密圈螺旋弹簧承受轴向拉力 F 如图，簧丝直径 $d=10$ mm，上端面平均半径 $R_1=5$ cm，下端面平均半径 $R_2=10$ cm，材料的许用切应力 $[\tau]=500$ MPa，切变模量为 G，弹簧的有效圈数

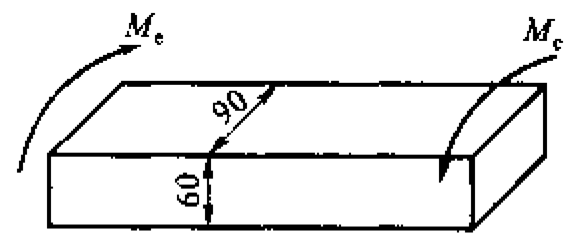
为 n。试求：

(1) 弹簧的许可拉力；

(2) 证明弹簧的伸长 $\Delta l=\frac{16Fn}{Gd^4}(R_1+R_2)(R_1^2+R_2^2)$。



习题 3-22 图



习题 3-23 图

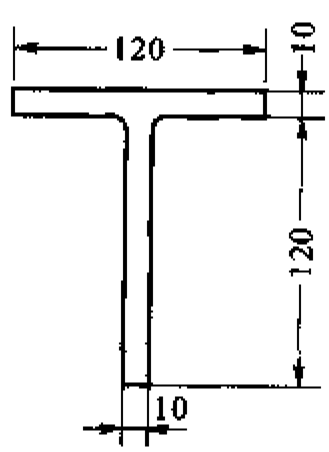
3-23 图示矩形截面钢杆承受一对外力偶矩 $M_e=3\ \mathrm{kN\cdot m}$。已知材料的切变模量 $G=80\ \mathrm{GPa}$，试求：

(1) 杆内最大切应力的大小、位置和方向；

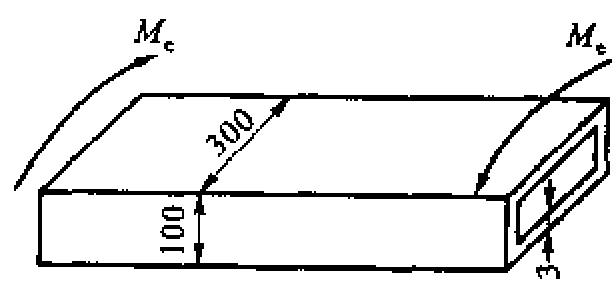
(2) 横截面矩边中点处的切应力；

(3) 杆的单位长度扭转角。

3-24 图示 T 形薄壁截面杆的长度 $l=2\ \mathrm{m}$，在两端受扭转力偶矩作用，材料的切变模量 $G=80\ \mathrm{GPa}$，杆的横截面上的扭矩为 $T=0.2\ \mathrm{kN\cdot m}$。试求杆在纯扭转时的最大切应力及单位长度扭转角。



习题 3-24 图



习题 3-25 图

3-25 图示为一闭口薄壁截面杆的横截面，杆在两端承受一对外力偶矩 M_e。材料的许用切应力 $[\tau]=60\ \mathrm{MPa}$。试求：

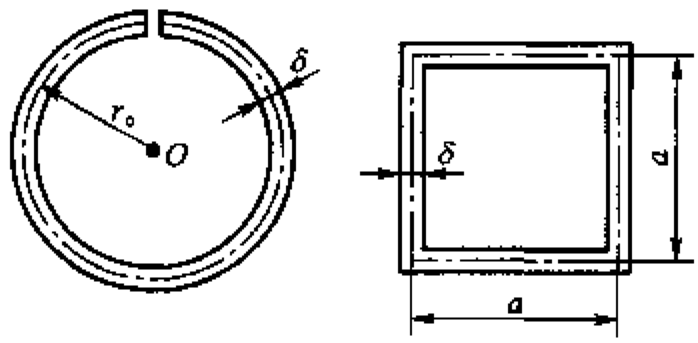
(1) 按强度条件确定其许可扭转力偶矩 $[M_e]$；

(2) 若在杆上沿母线切开一条缝，则其许可扭转力偶矩$[M_e]$将减至多少？

3-26　图示为薄壁杆的两种不同形状的横截面，其壁厚及管壁中线的周长均相同。两杆的长度和材料也相同，当在两端承受相同的一对扭转外力偶矩时，试求：

(1) 最大切应力之比；

(2) 相对扭转角之比。



开口环形截面　　　闭口箱形截面

习题 3-26 图

第四章 弯 曲 应 力

§4－1 对称弯曲的概念及梁的计算简图

Ⅰ. 弯曲的概念

等直杆在其包含杆轴线的纵向平面内，承受垂直于杆轴线的横向外力或外力偶的作用下，杆的轴线在变形后成为曲线，这种变形称为**弯曲**。凡是以弯曲为主要变形的杆件，通称为**梁**。梁是一类常用的构件，几乎在各类工程中都占有重要地位。

工程中最常见的梁，例如图 4－1a，b，c 中的梁 AB，其横截面都具有对称轴，同时，梁上所有的外力(或外力的合力)均作用在包含该对称轴的纵向平面(称为纵对称面)内。由于梁的几何、物性和外力均对称于梁的纵对称面，因此，梁变形后的轴线必定是一条在该纵对称面内的平面曲线(图 4－2)，这种弯曲称为**对称**

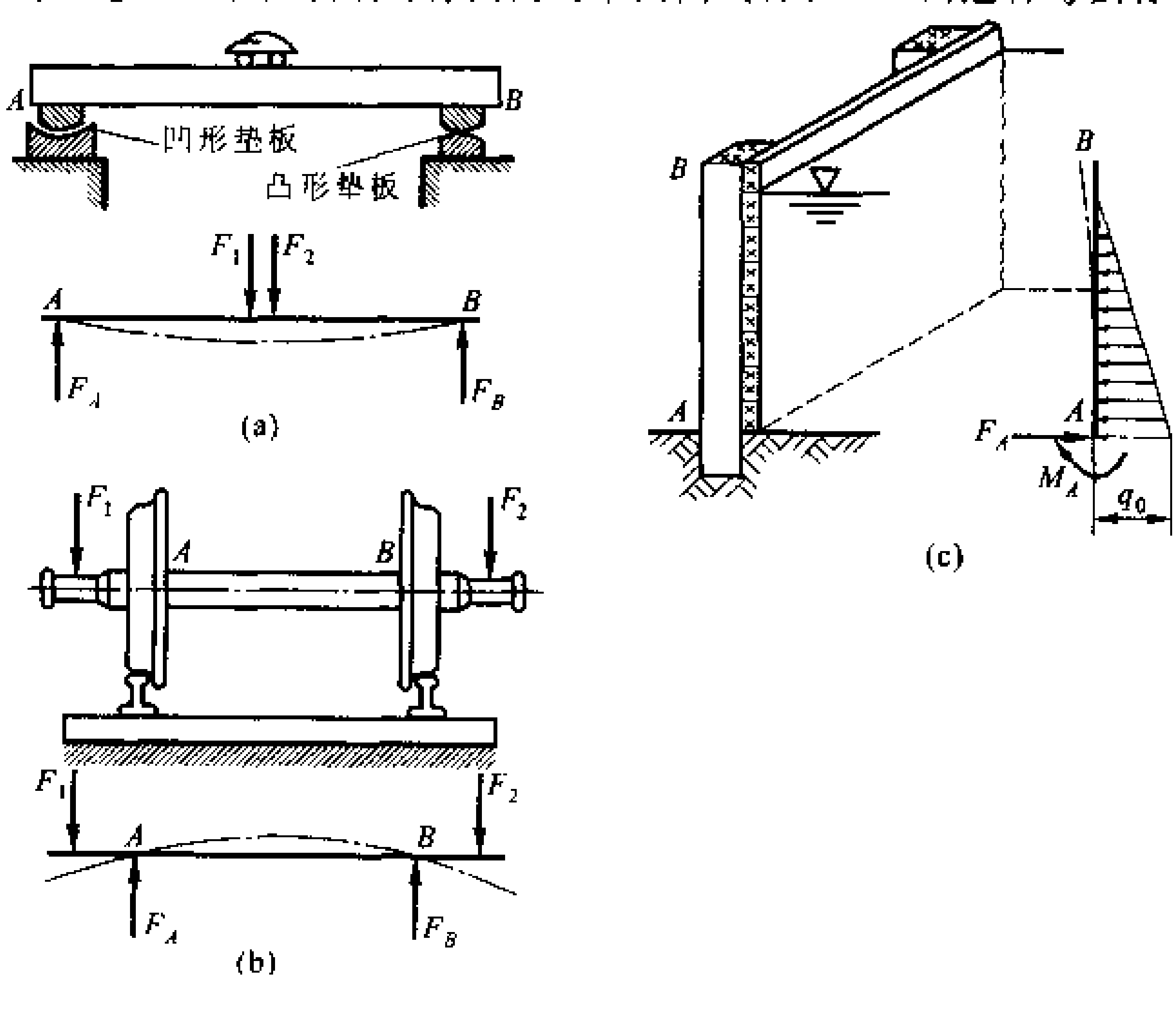


图 4－1

弯曲。对称弯曲时，由于梁变形后的轴线所在平面与外力所在平面相重合，因此也称为**平面弯曲**。若梁不具有纵对称面，或者，梁虽具有纵对称面但外力并不作用在纵对称面内，这种弯曲则统称为**非对称弯曲**。对称弯曲是弯曲问题中最简单和最常见的情况，这里以对称弯曲为主，讨论梁的应力和变形计算。关于非对称弯曲问题，将在《材料力学(Ⅱ)》的第一章中介绍。

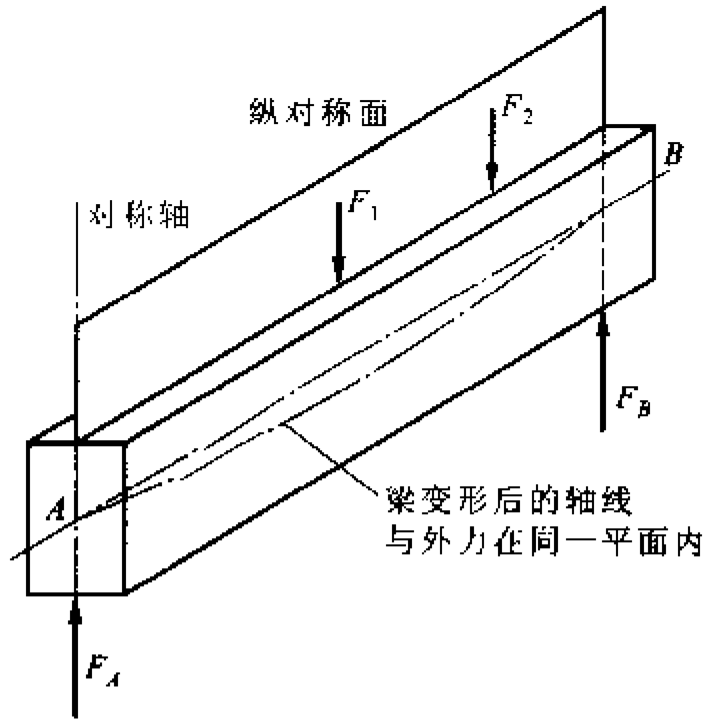


图4－2

II. 梁的计算简图

由于所研究的是等截面的直梁，而且外力为作用在梁纵对称面内的平面力系，因此，在梁的计算简图中就用梁的轴线代表梁。梁的支座按其对梁在荷载作用平面的约束情况，可简化为以下三种基本形式。

1. 固定端　固定端的简化形式如图 4－3a 所示。这种支座使梁的端截面既不能移动，也不能转动。因此，对梁的端截面有 3 个约束，相应地，就有 3 个支反力，即水平支反力 F_{Rx}，铅垂支反力 F_{Ry} 和矩为 M_R 的支反力偶(图 4－3d)。例如图 4－1c 中木桩下端的支座和止推长轴承等，一般都可简化为固定端。

2. 固定铰支座　固定铰支座的简化形式如图 4－3b 所示。这种支座限制

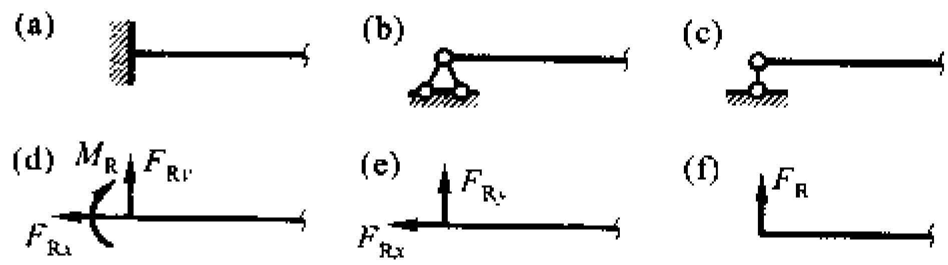


图 4－3

梁在支座处沿水平方向和铅垂方向移动，但并不限制梁绕铰中心转动。因此，固定铰支座对梁在支座处有2个约束，相应地就有2个支反力，即水平支反力 F_{Rx} 和铅垂支反力 F_{Ry}（图4－3e）。例如图4－1a中的凹形垫板支座、桥梁下的固定支座和止推滚柱轴承等，均可简化为固定铰支座。

3. 可动铰支座 可动铰支座的简化形式如图4－3c所示。这种支座只限制梁在支座处沿垂直于支承面方向移动。因此，它对梁在支座处仅有1个约束，相应地也只有1个支反力，即垂直于支承面的支反力 F_R（图4－3f）。例如图4－1a中的凸形垫板支座、桥梁下的辊轴支座和滚珠轴承等，均可简化为可动铰支座。

梁的实际支座根据其约束情况，通常可简化为上述三种基本形式。但是，支座的简化往往与对计算的精度要求，或与所有支座对整个梁的约束情况有关。例如，图4－4a所示插入砖墙内的过梁，由于插入端较短，因而梁端在墙内有微小转动的可能；此外当梁有可能发生水平移动时，其一端与砖墙接触后，砖墙就限制了梁的水平移动。因此，两个支座中的一个应简化为固定铰支座，而另一个则简化为可动铰支座（图4－4b）。图4－1b中的车辆轴的支座也具有类似的情况，读者可自行分析。

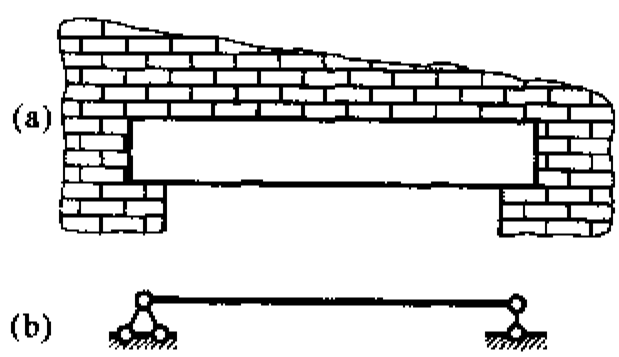


图4－4

从以上的分析可知，如果梁具有1个固定端，或具有1个固定铰支座和1个可动铰支座，则其3个支反力可由平面力系的3个独立的平衡方程求出。这种梁称为**静定梁**。图4－5a,b,c所示为工程上常用的三种基本形式的静定梁，分别称为**悬臂梁**、**简支梁**和**外伸梁**。图4－1a,b,c所示梁即为这三种梁的实例。有时为了工程上的需要，对一个梁设置较多的支座（图4－5d,e），因而梁的支反力数目多于独立的平衡方程的数目，此时仅用平衡方程就无法确定其所有的支反力，这种梁称为**超静定梁**。关于超静定梁的解法将在第六章中介绍。

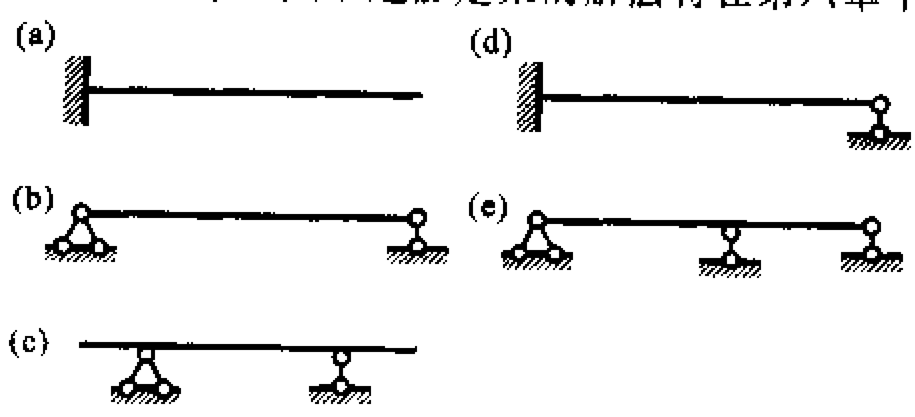


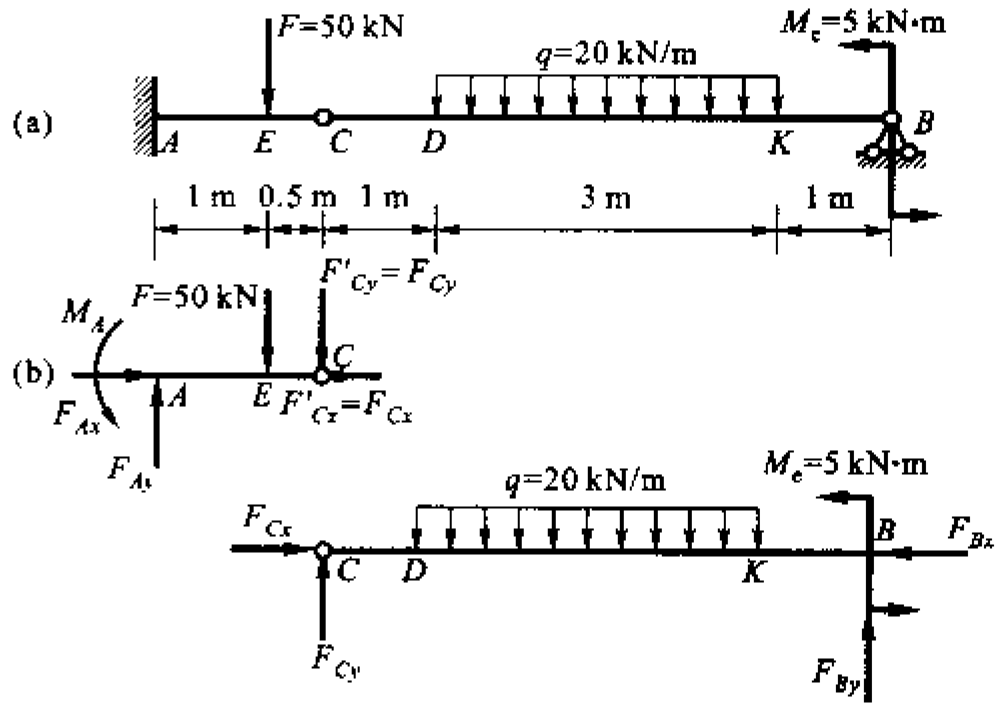
图4－5

梁在两支座间的部分称为**跨**，其长度则称为梁的**跨长**。常见的静定梁大多是单跨的。

例题 4-1 求图 a 所示多跨静定梁的支反力。

解： 组合梁的 AC 段为基本梁或主梁，CB 段为副梁。

求支反力时，可将中间铰 C 拆开（图 b），通过平衡方程求出副梁 CB 的支反力。然后，再将副梁 CB 的两个支反力 F_{Cx}，F_{Cy} 反向，加在主梁 AC 的 C 点处，求出主梁 AC 的支反力。



例题 4-1 图

(1) 研究梁 CB，梁上的均布荷载以其合力代替，合力的作用线通过均布荷载图形面积的形心。由平衡方程

$\sum F_x=0,\quad F_{Cx}=0$

$\sum M_B=0,\quad -F_{Cy}\times 5\ \mathrm{m}+(20\times 10^3\ \mathrm{N/m}\times 3\ \mathrm{m}\times 2.5\ \mathrm{m})+5\times 10^3\ \mathrm{N\cdot m}=0$

$$F_{Cy}=31\times 10^3\ \mathrm{N}=31\ \mathrm{kN}$$

$\sum F_y=0,\quad F_{By}=(20\times 10^3\ \mathrm{N/m}\times 3\ \mathrm{m})-31\times 10^3\ \mathrm{N}=29\times 10^3\ \mathrm{N}=29\ \mathrm{kN}$

(2) 研究梁 AC，由平衡方程

$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}=0$

$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}=50\ \mathrm{kN}+31\ \mathrm{kN}=81\ \mathrm{kN}$

$\sum M_A=0,$

$M_A=31\times 10^3\ \mathrm{N}\times 1.5\ \mathrm{m}+50\times 10^3\ \mathrm{N}\times 1\ \mathrm{m}=96.5\times 10^3\ \mathrm{N\cdot m}=96.5\ \mathrm{kN\cdot m}$

为了校核所得反力是否正确，读者可检验整个梁系是否满足平衡条件。

§4-2 梁的剪力和弯矩 · 剪力图和弯矩图

I. 梁的剪力和弯矩

为了计算梁的应力和位移,应先确定梁在外力作用下任一横截面上的内力。当作用在梁上的全部外力(包括荷载和支反力)均为已知时,用截面法即可求出其内力。

设简支梁承受集中力 F(图 4-6a),已求得支反力为 F_A 和 F_B。取 A 点为坐标轴 x 的原点,为计算坐标为 x 的任一横截面 $m-m$ 上的内力,应用截面法沿横截面 $m-m$ 假想地把梁截分为两段(图 4-6b,c)。分析梁的左段(图 4-6b),因在这段梁上作用有向上的外力 F_A,为满足沿 y 轴方向力的平衡条件,故在横截面 $m-m$ 上必有一作用线与 F_A 平行而指向相反的内力。设内力为 F_S,则由平衡方程

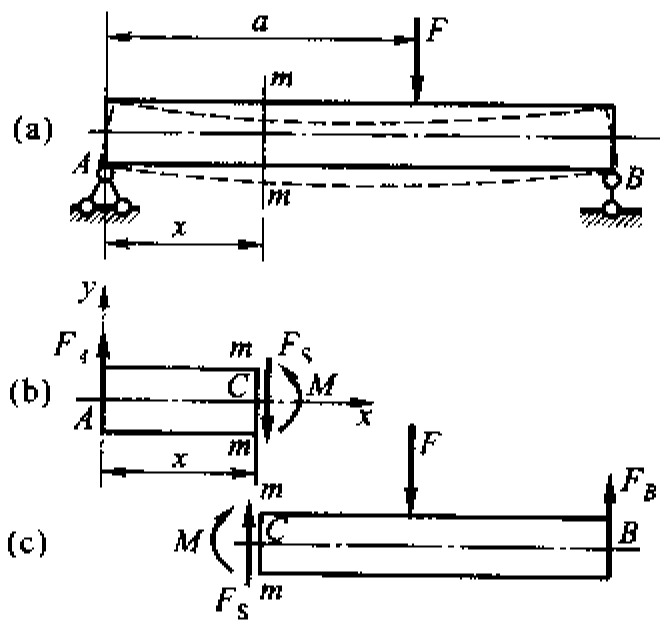


图 4-6

$$\sum F_y = 0,\quad F_A - F_S = 0$$

可得

$$F_S = F_A \tag{a}$$

F_S 称为**剪力**。由于外力 F_A 与剪力 F_S 组成一力偶,因而,根据左段梁的平衡可知,横截面上必有一与其相平衡的内力偶。设内力偶的矩为 M,则由平衡方程

$$\sum M_C = 0,\quad M - F_A x = 0$$

可得

$$M = F_A x \tag{b}$$

矩心 C 为横截面 $m-m$ 的形心。内力偶矩 M 称为**弯矩**。

左段梁横截面 $m-m$ 上的切力和弯矩，实际上是右段梁对左段梁的作用。根据作用与反作用原理可知，右段梁在同一横截面 $m-m$ 上的剪力和弯矩，在数值上应该分别与式(a)，(b)相等，但指向和转向相反(图 4-6c)。若对右段梁列出平衡方程，所得结果必然相同，读者可自行验证。

为使左、右两段梁上算得的同一横截面 $m-m$ 上的剪力和弯矩在正负号上也相同，联系变形情况对剪力、弯矩的正负号加以规定。为此，在横截面 $m-m$ 处，从梁中取出长为 dx 的微段(图 4-7)，通常规定：dx 微段有左端向上而右端向下的相对错动时(图 4-7a)，横截面 $m-m$ 上的剪力 F_S 为正，反之(图 4-7b)为负；当 dx 微段的弯曲为向下凸，即该段的下半部受拉时(图 4-7c)，横截面上的弯矩为正，反之(图 4-7d)为负。图 4-6b 或 c 中所示的横截面 $m-m$ 上的剪力和弯矩应均为正号。

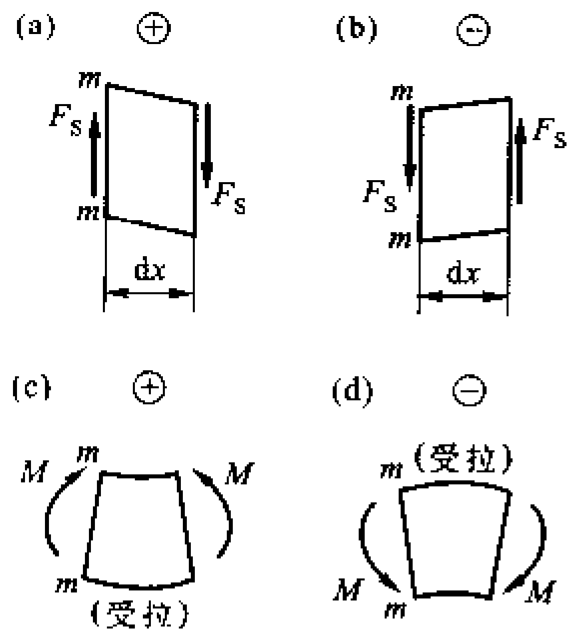


图 4-7

例题 4-2 图 a 为图 4-1a 所示梁的计算简图。已知 F_1，F_2，且 $F_2 > F_1$，以及尺寸 a，b，l，c 和 d。试求梁在 E，F 点处横截面上的剪力和弯矩。

解：为求梁横截面上的内力——剪力和弯矩，首先求出支反力 F_A 和 F_B(图 a)。由平衡方程

$$\sum M_A = 0,\quad F_B l - F_1 a - F_2 b = 0$$

和

$$\sum M_B = 0,\quad -F_A l + F_1(l-a) + F_2(l-b) = 0$$

解得

$$F_A = \frac{F_1(l-a) + F_2(l-b)}{l}$$

和

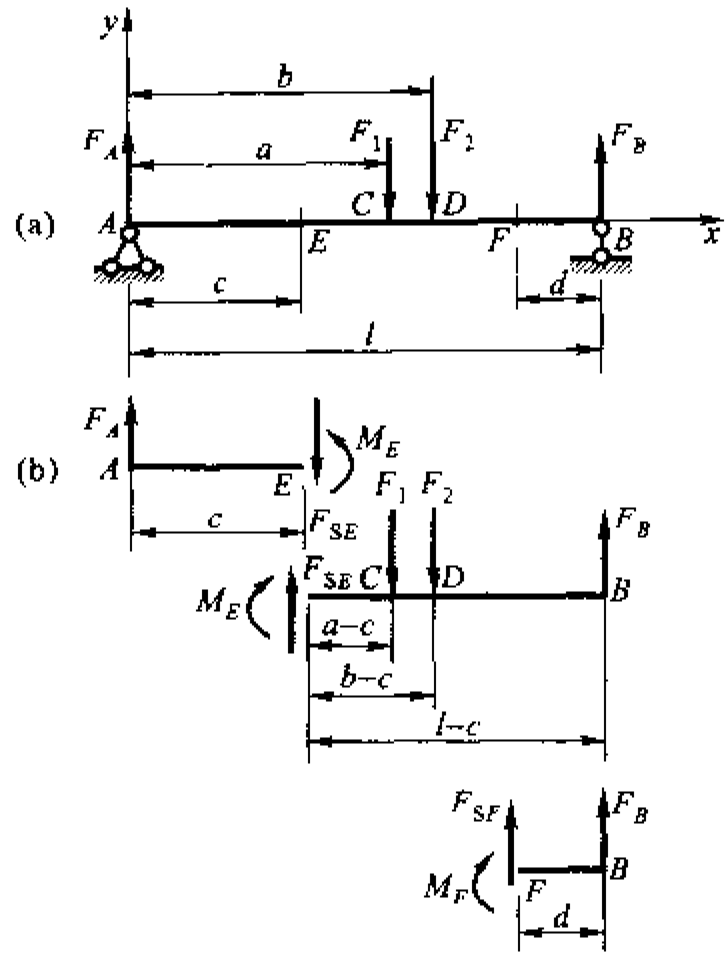
$$F_B = \frac{F_1 a + F_2 b}{l}$$

当计算横截面 E 上的剪力 F_{SE} 和弯矩 M_E 时，将梁沿横截面 E 假想地截开，研究其左段梁，并假定 F_{SE} 和 M_E 均为正向，如图 b 所示。由梁段的平衡方程

$$\sum F_y = 0,\quad F_A - F_{SE} = 0$$

可得

$$F_{SE} = F_A \tag{1}$$



例题 4－2 图

$$\sum M_E = 0, \quad M_E - F_A c = 0$$

可得
$$M_E = F_A c \tag{2}$$

结果为正，说明假定的剪力和弯矩的指向和转向正确，即均为正值。读者可从右段梁（图 c）来计算 F_{SE} 和 M_E 以验算上述结果。

计算横截面 F 上的剪力 F_{SF} 和弯矩 M_F 时，将梁沿横截面 F 假想地截开，研究其右段梁，并假定 F_{SF} 和 M_F 均为正向，如图 d 所示。由平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F_{SF} + F_B = 0$$

可得
$$F_{SF} = -F_B \tag{3}$$

$$\sum M_F = 0, \quad -M_F + F_B d = 0$$

可得
$$M_F = F_B d \tag{4}$$

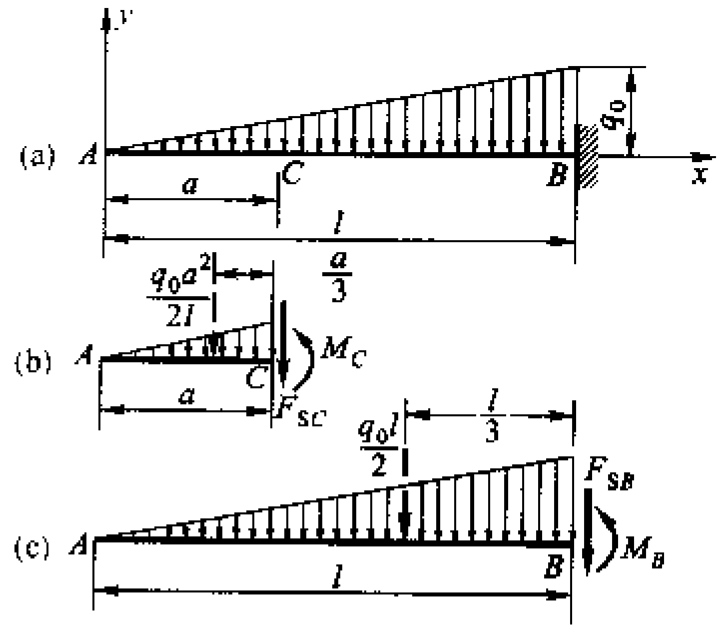
求得的 F_{SF} 为负，说明与假定的指向相反，即应为负值；M_F 的结果为正，说明假定的转向正确，即为正值。

在以上(1)～(4)各式中，本应将求得的支反力 F_A 和 F_B 代入，但为了表达清楚，略去了这一步骤。

例题 4－3 图 4－1c 中挡水墙木桩的计算简图为一在整个长度上受线性分布荷载作用的悬臂梁，如图 a 所示。已知最大荷载集度 $q_0 = 20$ kN/m，梁长

$l=2\ \text{m}, a=1\ \text{m}$。试求 C、B 两点处横截面上的剪力和弯矩。

解：当求悬臂梁横截面上的内力时，若取包含自由端的截面一侧的梁段来计算，则不必求出支反力。



例题 4-3 图

计算横截面 C 上的剪力 F_{SC} 和弯矩 M_C。应用截面法，并取截面左边的梁段（图 b）进行计算。左段梁上分布荷载的合力为 $\frac{q_0a^2}{2l}$。假定 F_{SC} 和 M_C 均为正。由左段梁的平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad -F_{SC}-\frac{q_0a^2}{2l}=0$$

得

$$F_{SC}=-\frac{q_0a^2}{2l}=\frac{(20\times10^3\ \text{N/m})(1\ \text{m})^2}{2\times2\ \text{m}}=-5\times10^3\ \text{N}=-5\ \text{kN} \tag{1}$$

$$\sum M_C=0,\quad M_C+\frac{q_0a^2}{2l}\times\frac{a}{3}=0$$

得

$$M_C=-\frac{q_0a^3}{6l}=\frac{(20\times10^3\ \text{N/m})(1\ \text{m})^3}{6\times2\ \text{m}}=-1.667\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}=-1.667\ \text{kN}\cdot\text{m} \tag{2}$$

计算结果表明，剪力 F_{SC} 和弯矩 M_C 均为负值，即其指向和转向与图中相反。

计算横截面 B 上的剪力 F_{SB} 和弯矩 M_B。同理，应用截面法取截面左侧的梁段（图 c）。由平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad -F_{SB}-\frac{q_0l}{2}=0$$

得

$$F_{SB}=-\frac{q_0l}{2}=-\frac{(20\times10^3\ \text{N/m})\times2\ \text{m}}{2}=-20\times10^3\ \text{N}=-20\ \text{kN} \tag{3}$$

$$\sum M_B=0,\quad M_B+\frac{q_0l}{2}\times\frac{l}{3}=0$$

得

$$M_B=-\frac{q_0l^2}{6}=-\frac{(20\times10^3\ \text{N/m})\times(2\ \text{m})^2}{6}$$

$$= -13.33 \times 10^3\ \text{N·m} = -13.33\ \text{kN·m} \quad (4)$$

计算结果表明，F_{SB}、M_B 亦均为负值。

从上述例题的计算中可以看出，应用截面法计算某一横截面上的剪力和弯矩时，一般并不必将梁假想地截开，而可直接从横截面的任意一侧梁上的外力来求得该截面上的剪力和弯矩：

(1) 横截面上的剪力在数值上等于截面左侧或右侧梁段上外力的代数和。在左侧梁段上向上的外力或右侧梁段上向下的外力将引起正值剪力，反之，则引起负值剪力。

(2) 横截面上的弯矩在数值上等于截面的左侧或右侧梁段上的外力对该截面形心的力矩之代数和。不论在截面的左侧或右侧向上的外力均将引起正值弯矩，而向下的则引起负值弯矩。对于截面左侧梁段上的外力偶，则顺时针转向的引起正值弯矩，逆时针转向的引起负值弯矩；而截面右侧梁段上的外力偶则与其相反。

II. 剪力方程和弯矩方程 · 剪力图和弯矩图

在一般情况下，梁横截面上的剪力和弯矩是随横截面的位置而变化的。设横截面沿梁轴线的位置用坐标 x 表示，则梁的各个横截面上的剪力和弯矩可以表示为坐标 x 的函数，即

$$F_S = F_S(x) \qquad \text{和} \qquad M = M(x)$$

以上两式表示沿梁轴线各横截面上剪力和弯矩的变化规律，分别称为梁的**剪力方程和弯矩方程**。

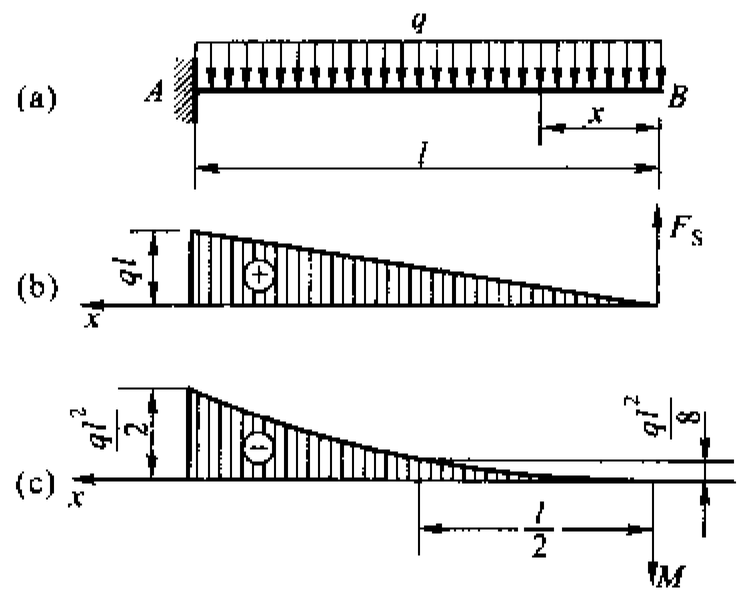
以横截面上的剪力或弯矩为纵坐标，以截面沿梁轴线的位置为横坐标，根据剪力方程或弯矩方程绘出表示 $F_S(x)$ 或 $M(x)$ 的图线，表示沿梁轴线各横截面上剪力或弯矩的变化情况，分别称为梁的**剪力图或弯矩图**。绘图时将正值的剪力画在 x 轴的上侧；至于正值的弯矩则画在梁的受拉侧，也就是画在 x 轴的下侧。

应用剪力图和弯矩图可以确定梁的剪力和弯矩的最大值，及其所在的截面位置。此外，在计算梁的位移时，也需利用弯矩方程或弯矩图。

例题 4－4　图 a 所示的悬臂梁，在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用。试作梁的剪力图和弯矩图。

解：为计算方便，将坐标原点取在梁的右端。取距右端为 x 的任意横截面（图 a），考虑截面右侧的梁段，写出任意横截面上的剪力和弯矩即为梁的剪力和弯矩方程：

$$F_S(x) = qx \qquad (0 \leqslant x < l) \quad (1)$$



例题 4-4 图

$$M(x) = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2} \qquad (0 \leqslant x < l) \tag{2}$$

由式(1)可知,剪力图为在 $0 \leqslant x < l$ 范围内的倾斜直线。只需确定线上两点,例如 $x=0$ 处 $F_S=0$,$x=l$[①] 处 $F_S=ql$,即可绘出其剪力图(图 b)。由式(2)可知,弯矩图为在 $0 \leqslant x < l$ 范围内的二次抛物线,这就至少需确定其上的三个点,例如 $x=0$ 处 $M=0$,$x=\frac{l}{2}$处 $M=-\frac{ql^2}{8}$,$x=l$ 处 $M=-\frac{ql^2}{2}$,才可将其绘出(图 c)。

由图可见,在固定端处右侧横截面上的剪力和弯矩值为最大,分别为 $F_{S,max}=ql$ 和 $M_{max}=\frac{ql^2}{2}$(负值)。

例题 4-5 图 a 所示的简支梁,在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用。试作梁的剪力图和弯矩图。

解:对于简支梁,须先计算其支反力。本例中,由于荷载及支反力均对称于梁跨的中点,因此,两支反力(图 a)相等,由 $\sum F_y=0$,得

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

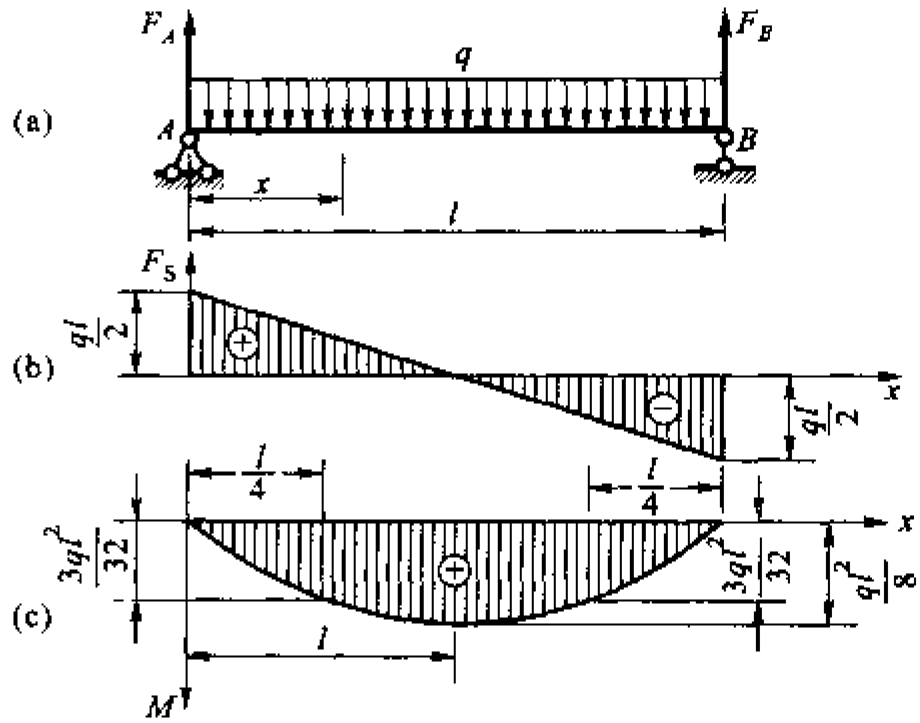
取距左端(坐标原点)为 x 的任意横截面(图 a),则梁的剪力和弯矩方程为

$$F_S(x) = F_A - qx = \frac{ql}{2} - qx \qquad (0 < x < l) \tag{1}$$

$$M(x) = F_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

---

① 这里的 $x=l$ 实际上指的是 x 略小于 l 处的横截面,因为在 $x=l$ 截面处,M,F_S 均为不定值,其值与实际约束情况有关。以后类似的情况也应作相同的理解。

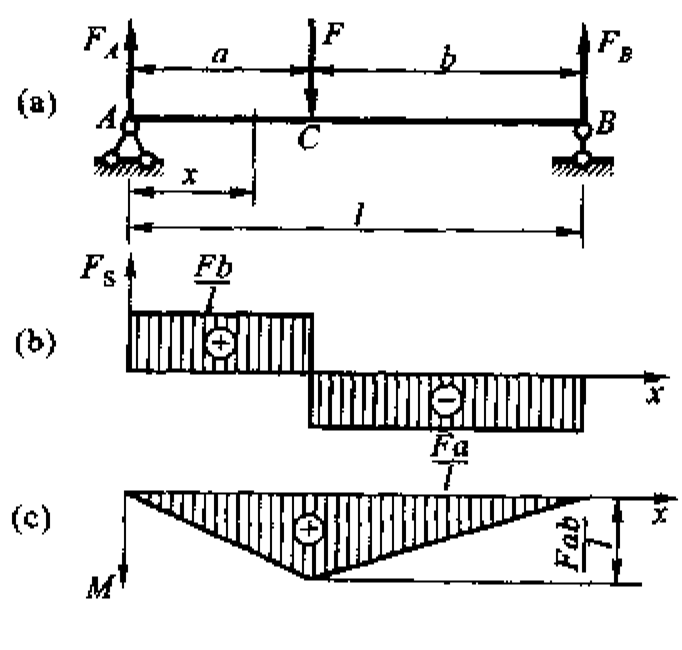


例题 4-5 图

由式(1)可知,剪力图为一倾斜直线,而由式(2)可知,弯矩图为一条二次抛物线。仿照例题 4-4 中的绘图过程,即可绘出剪力图和弯矩图(图 b,c)。

由图可见,梁在梁跨中点横截面上的弯矩值为最大,$M_{max}=\dfrac{ql^2}{8}$,该截面上 $F_S=0$;而两支座内侧横截面上的剪力值为最大,$F_{S,max}=\dfrac{ql}{2}$(正值,负值)。

例题 4-6 图 a 所示的简支梁在 C 点处受集中荷载 F 作用。试作梁的剪力图和弯矩图。



例题 4-6 图

解:由平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum M_A=0$ 分别算得支反力(图 a)为

$$F_A = \frac{Fb}{l}, \qquad F_B = \frac{Fa}{l}$$

由于梁在 C 点处有集中荷载 F 的作用，显然，在集中荷载两侧的梁段，其剪力和弯矩方程均不相同，故需将梁分为 AC 和 CB 两段，分别写出其剪力和弯矩方程。

对于 AC 段梁，其剪力和弯矩方程分别为

$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} \qquad (0 < x < a) \tag{1}$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l}x \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{2}$$

对于 BC 段梁，剪力和弯矩方程为

$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} - F = -\frac{F(l-b)}{l} = -\frac{Fa}{l} \qquad (a < x < l) \tag{3}$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l}x - F(x-a) = \frac{Fa}{l}(l-x) \qquad (a \leqslant x \leqslant l) \tag{4}$$

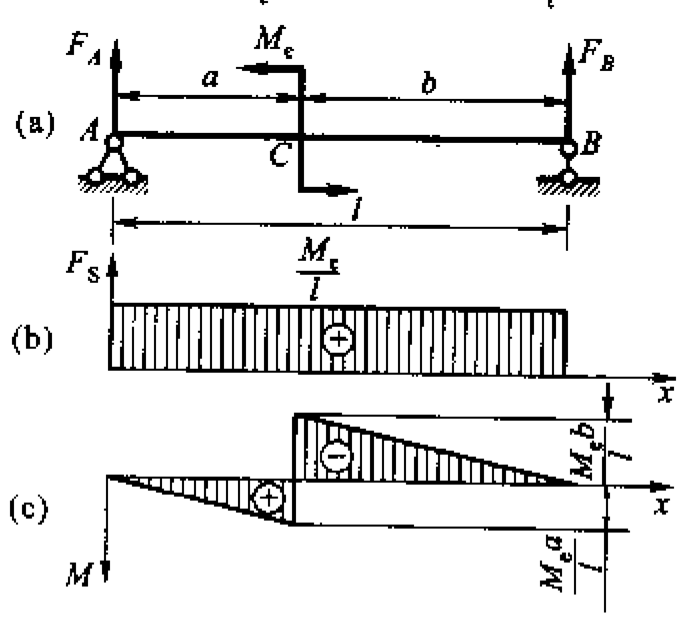
由(1)，(3)两式可知，左、右两梁段的剪力图各为一条平行于 x 轴的直线。由(2)，(4)两式可知，左、右两梁段的弯矩图各为一条斜直线。根据这些方程绘出的剪力图和弯矩图如图 b，c 所示。

由图可见，在 $b > a$ 的情况下，AC 段梁任一横截面上的剪力值为最大，$F_{S,\max} = \frac{Fb}{l}$；而集中荷载作用处横截面上的弯矩值为最大，$M_{\max} = \frac{Fab}{l}$；在集中荷载作用处左、右两侧截面上的剪力值有突变。

例题 4-7 图 a 所示的简支梁在 C 点处受矩为 M_e 的集中力偶作用。试作梁的剪力图和弯矩图。

解：由平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum M_A = 0$，分别算得支反力（图 a）为

$$F_A = \frac{M_e}{l}, \qquad F_B = \frac{M_B}{l}$$



例题 4-7 图

由于简支梁上的荷载只有一个在两支座之间的力偶，故全梁只有一个剪力方程，但 AC 和 CB 两段梁的弯矩方程则不同。这些方程分别为

$$F_s(x)=\frac{M_e}{l}\qquad(0<x<l)\tag{1}$$

AC 段：
$$M(x)=\frac{M_e}{l}x\qquad(0\leqslant x<a)\tag{2}$$

CB 段：
$$M(x)=\frac{M_e}{l}x-M_e=-\frac{M_e}{l}(l-x)\qquad(a<x\leqslant l)\tag{3}$$

由式(1)可知，整个梁的剪力图是一条平行于 x 轴的直线。由(2)，(3)两式可知，左、右两梁段的弯矩图各为一条斜直线。根据各方程的适用范围，就可分别绘出梁的剪力图和弯矩图(图 b,c)。由图可见，在集中力偶作用处左、右两侧截面上的弯矩值有突变。若 $b>a$，则最大弯矩发生在集中力偶作用处的右侧横截面上，$M_{\max}=\frac{M_e b}{l}$（负值）。

由以上各例题所求得的剪力图和弯矩图，可以归纳出如下规律：

(1) 在集中力或集中力偶作用处，梁的弯矩方程应分段列出。推广而言，在梁上外力不连续处(即在集中力、集中力偶作用处和分布荷载开始或结束处)，梁的弯矩方程和弯矩图应该分段。对于剪力方程和剪力图，除去集中力偶作用处以外，也应分段列出或绘制。

(2) 在梁上集中力作用处，剪力图有突变，其左、右两侧横截面上剪力的代数差，即等于集中力值。而在弯矩图上的相应处则形成一个尖角。与此相仿，梁上受集中力偶作用处，弯矩图有突变，其左、右两侧横截面上弯矩的代数差，即等于集中力偶值。但在剪力图上的相应处并无变化。实际上，集中力是作用在很短的一段梁(其长为 Δx)上分布力的简化，若将分布力看作是在长为 Δx 的范围内均匀分布的(图 4-8a)，则在该段梁上实际的剪力图将是按直线规律连续变化的(图 4-8b)。同理，集中力偶实际上也是一种简化的结果，若按其实际分布情况，绘出的弯矩图也是连续变化的。

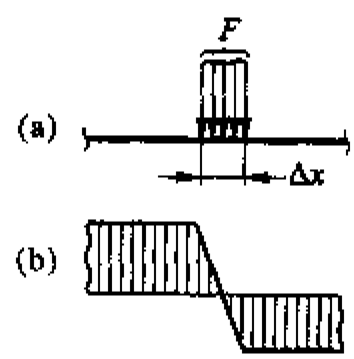


图 4-8

(3) 全梁的最大剪力和最大弯矩可能发生在全梁或各段梁的边界截面，或极值点的截面处。

工程中有时需要求梁在移动荷载作用下荷载的最不利位置，即确定梁内最大弯矩达到极大值时荷载的位置等。现举例说明如下。

例题 4-8 一简支梁受移动荷载 F 的作用如图 a 所示，试求梁的最大弯矩为极大时荷载 F 的位置。

解：设 F 在距左支座 A 为 x_1 的任意位置(图 b)。

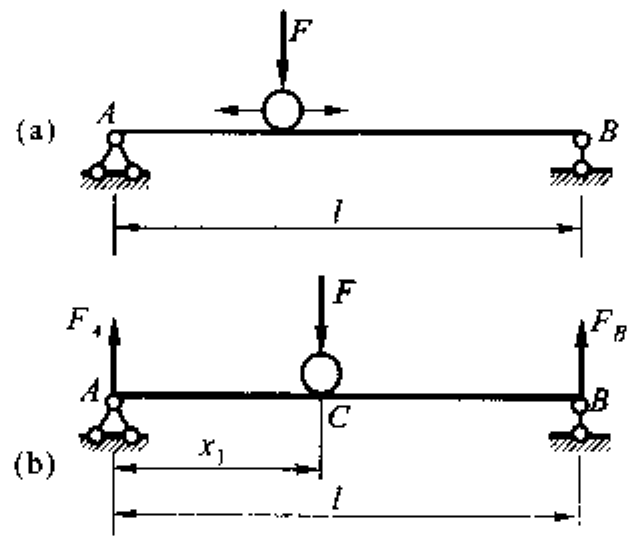
其支反力为

$$F_A = \frac{F(l - x_1)}{l}, \quad F_B = \frac{Fx_1}{l}$$

已知简支梁受一集中荷载作用时，其最大弯矩即在力 F 作用处的横截面上。由此可知，梁的最大弯矩即为 C 点(图 b)处横截面上的弯矩 M_C，其值为

$$M_C = F_A x_1 = \frac{F(l - x_1)}{l} x_1 \quad (1)$$

当 F 在梁上移动，即 x_1 变化时，M_C 也将随之变化。按求函数极值的方法，由 $\frac{dM_C}{dx_1} = 0$ 可得



例题 4-8 图

$$\frac{dM_C}{dx_1} = \frac{F}{l}(l - 2x_1) = 0 \quad (2)$$

即得

$$x_1 = \frac{l}{2} \quad (3)$$

结果表明，当移动荷载 F 在简支梁的跨中时，梁的最大弯矩为极大，且该最大弯矩发生在荷载所在的跨中截面上，其值可由 $x_1 = \frac{l}{2}$ 代入式(1)而得

$$M_{max} = \frac{1}{4} Fl$$

III. 弯矩、剪力与分布荷载集度间的微分关系及其应用

从例题 4-5 可见，将弯矩函数 $M(x)$ 对 x 求导数，即得剪力函数 $F_S(x)$；将剪力函数 $F_S(x)$ 对 x 求导数，则得均布荷载的集度 q[①]。事实上，这些关系在直梁中是普遍存在的。

设梁上作用有任意分布荷载(图 4-9a)，其集度

$$q = q(x)$$

是 x 的连续函数，并规定以向上为正。现将 x 的坐标原点取在梁的左端。用坐标为 x 和 $x + dx$ 处的两横截面，假想地从梁中截出长为 dx 的梁段(图 4-9b)。设坐标为 x 处横截面上的剪力和弯矩分别为 $F_S(x)$ 和 $M(x)$，该处的荷载集度

① 在该例中所得结果为 $-q$，这是因为均布荷载是向下的。

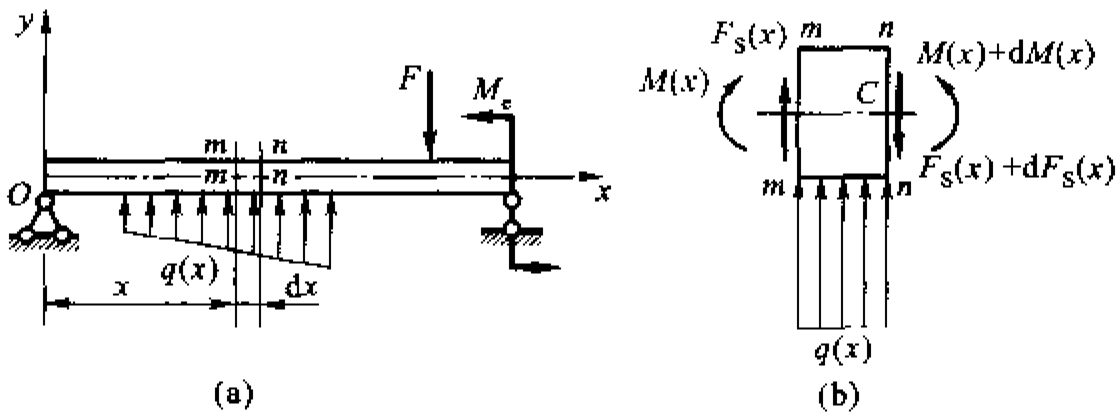


图4-9

为 $q(x)$，并均设为正值，则在坐标为 $x+dx$ 处横截面上的剪力和弯矩将分别为 $F_S(x)+dF_S(x)$ 和 $M(x)+dM(x)$。梁段在以上所有外力作用下应处于平衡。由于 dx 很小，可略去荷载集度沿 dx 长度的变化，于是，由梁段的平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad F_S(x)-[F_S(x)+dF_S(x)]+q(x)dx=0$$

从而得到

$$\frac{dF_S(x)}{dx}=q(x) \tag{4-1}$$

以及　$\sum M_C=0$，

$$[M(x)+dM(x)]-M(x)-F_S(x)dx-q(x)dx\cdot\frac{dx}{2}=0$$

略去二阶无穷小项，即得

$$\frac{dM(x)}{dx}=F_S(x) \tag{4-2}$$

从(4-1)和(4-2)两式又可得

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x) \tag{4-3}$$

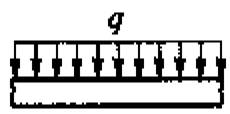
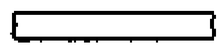
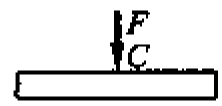
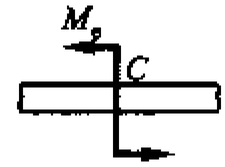
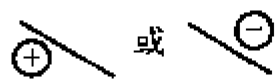
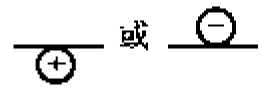
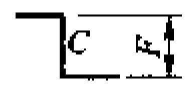
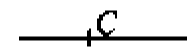
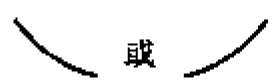
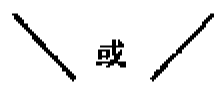
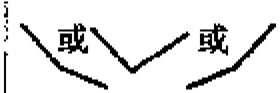
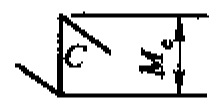
以上三式就是弯矩 $M(x)$、剪力 $F_S(x)$和荷载集度 $q(x)$三函数间的关系式①。

式(4-1)和(4-2)的几何意义分别为：剪力图上某点处的切线斜率等于该点处荷载集度的大小；弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小。

应用这些关系，以及有关剪力图和弯矩图的规律，可检验所作剪力图或弯矩图的正确性，或直接作梁的剪力图和弯矩图。现将有关弯矩、剪力与荷载间的关系以及剪力图和弯矩图的一些特征汇总整理为表4-1，以供参考。

① 若将坐标 x 的原点取在梁的右端，且 x 坐标以指向左为正，则(4-1)和(4-2)两关系式的右端应各加一负号，在例题4-4中即属于此情况。至于关系式(4-3)，则不因坐标指向的改动而影响其正负号。

表 4-1　在几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

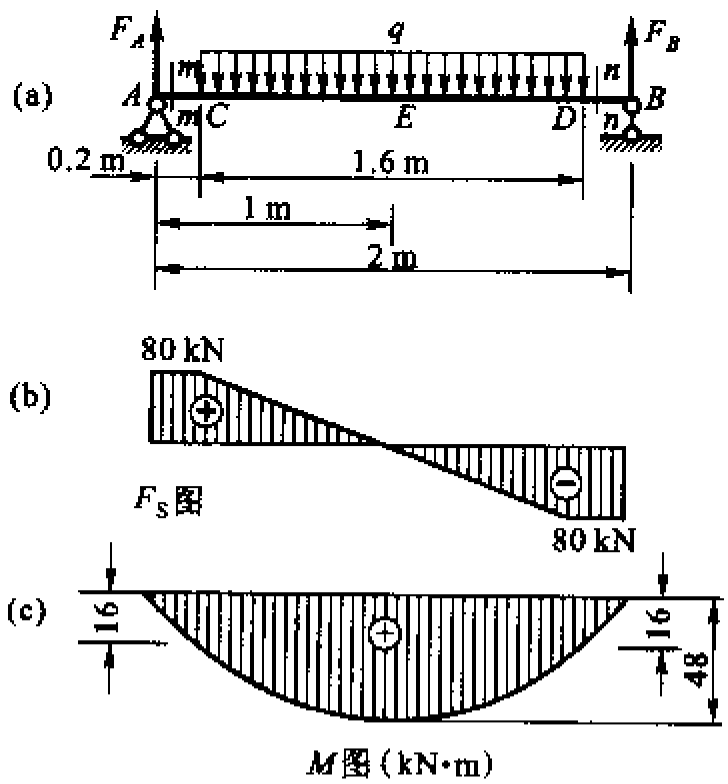
一段梁上的外力的情况	向下的均布荷载 	无荷载 	集中力 	集中力偶 
剪力图上的特征	向下方倾斜的直线 	水平直线，一般为 	在 C 处有突变 	在 C 处无变化 
弯矩图上的特征	下凸的二次抛物线 	一般为斜直线 	在 C 处有尖角 	在 C 处有突变 
最大弯矩所在截面的可能位置	在 $F_S=0$ 的截面		在剪力突变的截面	在紧靠 C 点的某一侧的截面
举例	例题 4-4,4-5	例题 4-6,4-7	例题 4-6	例题 4-7

下面举例说明上述各种关系的应用。

例题 4-9　一简支梁受集度为 $q=100$ kN/m 的均布荷载作用如图 a 所示。试利用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系作梁的剪力图和弯矩图。

解：支反力 F_A，F_B（图 a）。从荷载及支反力的对称性得到

$$F_A = F_B = \frac{1}{2}(100\times10^3\ \text{N·m})(1.6\ \text{m}) = 80\times10^3\ \text{N} = 80\ \text{kN}$$



例题 4-9 图

支反力 F_A，F_B 及均布荷载将梁分为三段，即 AC、CD 和 DB 段（图 a）。AC 和 DB 段上均无荷载，故两段梁上的剪力图和弯矩图均应分别为水平直线和倾斜直线。在 CD 段上有向下的均布荷载，故其剪力图和弯矩图应分别为向右下方倾斜的直线和向下凸的二次抛物线。

对于剪力图为水平直线的 AC 和 DB 段梁，仅须计算每一段中任一横截面上的剪力。直接从外力计算剪力，可得横截面 $m-m$ 和 $n-n$（图 a）上的剪力分别为

$$F_{S1} = F_A = 80 \text{ kN}$$

$$F_{S2} = -F_B = -80 \text{ kN}$$

由于梁上在点 C、D 处无集中力作用，剪力图无突变，故 CD 段梁在 C 和 D 两点处横截面上的剪力就分别等于求得的 F_{S1} 和 F_{S2}。

根据以上的定性分析及算得的剪力，即可作出全梁的剪力图（图 b）。由图可见 $F_{S,max}=80$ kN（正值，负值），分别发生在 AC 和 DB 段的任一横截面上。

对于弯矩图为倾斜直线的 AC 和 DB 段梁，需计算每段中两个横截面上的弯矩。为此，计算 A，C，B，D 四个横截面上的弯矩，直接从外力计算弯矩，得

$$M_A = 0$$

$$M_C = F_A \times 0.2 \text{ m} = 16 \text{ kN·m}$$

$$M_B = 0$$

$$M_D = F_B \times 0.2 \text{ m} = 16 \text{ kN·m}$$

对于 CD 段梁，其弯矩图应为向下凸的二次抛物线，故至少需定出图上三个点才能粗略地绘出这部分的弯矩图。由于梁在 C、D 两点处无集中力偶作用，故弯矩图无突变，上面算得的 M_C，M_D 即为 CD 段梁在 C，D 两横截面上的弯矩。由于在中点 E 处横截面上的剪力 $F_S=0$，因而该横截面上的 M_E 为极值弯矩。直接从外力计算得

$$\begin{aligned} M_E &= F_A \times 1 \text{ m} - \frac{1}{2}q(1 \text{ m} - 0.2 \text{ m})^2 \\ &= (80 \times 10^3 \text{ N·m}) \times 1 \text{ m} - \frac{1}{2}(100 \times 10^3 \text{ N/m}) \times (0.8 \text{ m})^2 \\ &= 48 \times 10^3 \text{ N·m} = 48 \text{ kN·m} \end{aligned}$$

根据以上的定性分析及算得的弯矩，即可作出全梁的弯矩图（图 c）。由图可见 $M_{max}=48$ kN·m，发生在梁跨中 E 点的横截面上。

现来校核已作出的剪力图和弯矩图。在向下的均布荷载作用的一段梁上，剪力图为向右下方倾斜的直线。弯矩图上极值弯矩处对应于剪力图上 $F_S=0$ 的点；弯矩图上在直线与抛物线相接处是平滑的，即在该处切线斜率只有一个，

这与剪力图上在该处的剪力无突变的情况相符。所有这些,都说明所作的剪力图和弯矩图是正确的。

利用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系作剪力图和弯矩图,可不必写出剪力方程和弯矩方程,从而使作图过程简化,因此,这种作图方法也称为简易法。

例题 4-10 试从式(4-1)和(4-2)的积分,计算例题4-9中的梁在 C,E 两横截面上的剪力和弯矩。

解: 从式(4-1)可知,若在 $x=a$ 和 $x=b$ 处两个横截面 A,B 间无集中力作用,则其积分为

$$\int_a^b \mathrm{d}F_S(x) = \int_a^b q(x)\mathrm{d}x$$

得

$$F_S(b) - F_S(a) = \int_a^b q(x)\mathrm{d}x$$

或

$$F_{SB} = F_{SA} + \int_a^b q(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

式中,F_{SA},F_{SB} 分别为在 $x=a$,$x=b$ 处两横截面 A 及 B 上的剪力。等号右边积分的几何意义是上述两横截面间分布荷载图的面积。

同理,若横截面 A 和 B 间无集中力偶作用,则从式(4-2)可得

$$M_B = M_A + \int_a^b F_S(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

式中,M_A,M_B 分别为在 $x=a$,$x=b$ 处两个横截面 A 及 B 上的弯矩。等号右边积分的几何意义是 A,B 两个横截面间剪力图的面积。

在应用式(1)和(2)时,应注意:式中的面积是有正负号的,因为荷载集度和剪力是有正负的。

从例题4-9图a可知,在 AC 段中 $q=0$,故荷载图的面积为零。又因 $F_{SA}=F_A$,所以从式(1)得

$$F_{SC} = F_{SA} + \int_a^c q(x)\mathrm{d}x = F_{SA} + 0 = F_{SA} = F_A = 80\ \mathrm{kN}$$

在 CE 段中,$q=-100\ \mathrm{kN/m}$,荷载图为矩形。又因 $F_{SC}=80\ \mathrm{kN}$,所以从式(1)得

$$\begin{aligned} F_{SE} &= F_{SC} + \int_c^e q(x)\mathrm{d}x = F_{SC} + q\cdot\overline{CE} \\ &= 80\times10^3\ \mathrm{N} - (100\times10^3\ \mathrm{N/m})\times(1\ \mathrm{m} - 0.2\ \mathrm{m}) = 0 \end{aligned}$$

从例题4-9图b可知,在 AC 段中 $F_S=80\ \mathrm{kN}$,剪力图为矩形。又因 $M_A=0$,所以从式(2)得

$$M_C = M_A + \int_a^c F_S(x)\mathrm{d}x = M_A + F_S \cdot \overline{AC}$$

$$= 0 + (80 \times 10^3\ \mathrm{N})(0.2\ \mathrm{m}) = 16 \times 10^3\ \mathrm{N \cdot m} = 16\ \mathrm{kN \cdot m}$$

在 CE 段中，从例题 4－9 图 b 可知，剪力图为三角形和 $F_{SC} = 80\ \mathrm{kN}$，又因 $M_C = 16\ \mathrm{kN \cdot m}$，所以从式(2)得

$$M_E = M_C + \int_c^e F_S(x)\mathrm{d}x = M_C + \frac{1}{2}F_{SC} \cdot \overline{CE}$$

$$= 16 \times 10^3\ \mathrm{N \cdot m} + \frac{1}{2} \times (80 \times 10^3\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m} - 0.2\ \mathrm{m})$$

$$= 48 \times 10^3\ \mathrm{N \cdot m} = 48\ \mathrm{kN \cdot m}$$

由以上运算可知，利用式(4－1)，(4－2)和表 4－1 所示特征，可定性地判定剪力图和弯矩图的图形。再利用起始横截面上的剪力、弯矩值和该两式的积分关系式(1)，(2)，即可定出梁各有关横截面上的剪力、弯矩值，从面作出全梁的剪力图和弯矩图。建议读者自行练习。

例题 4－11 试用简易法作例题 4－1a 所示组合梁的剪力图和弯矩图。

解：在例题 4－1 中已求得梁的支反力为

$$F_A = 81\ \mathrm{kN}, \qquad F_B = 29\ \mathrm{kN}, \qquad M_{RA} = 96.5\ \mathrm{kN \cdot m}$$

由于梁上外力将梁分为 5 段，需分段绘制剪力图和弯矩图。

(1) 作剪力图

因 AE，EC，CD 三段梁上无分布荷载，即 $q(x) = 0$，该三段梁上的 F_S 图为水平直线。应当注意在支座 A 及截面 E 处有集中力作用，F_S 图有突变，要分别计算集中力作用处的左、右两侧截面上的剪力值。各段分界处的剪力值为

AE 段：$F_{SA右} = F_{SE左} = F_A = 81\ \mathrm{kN}$

ED 段：$F_{SE右} = F_{SC} = F_A - F = 81\ \mathrm{kN} - 50\ \mathrm{kN} = 31\ \mathrm{kN}$

DK 段：$q(x)$等于负常量，F_S图应为向右下方倾斜的直线，因截面 K 上无集中力，则可取右侧梁段来研究，截面 K 上的剪力为

$$F_{SK} = -F_B = -29\ \mathrm{kN}$$

KB 段：$F_{SB左} = -F_B = -29\ \mathrm{kN}$

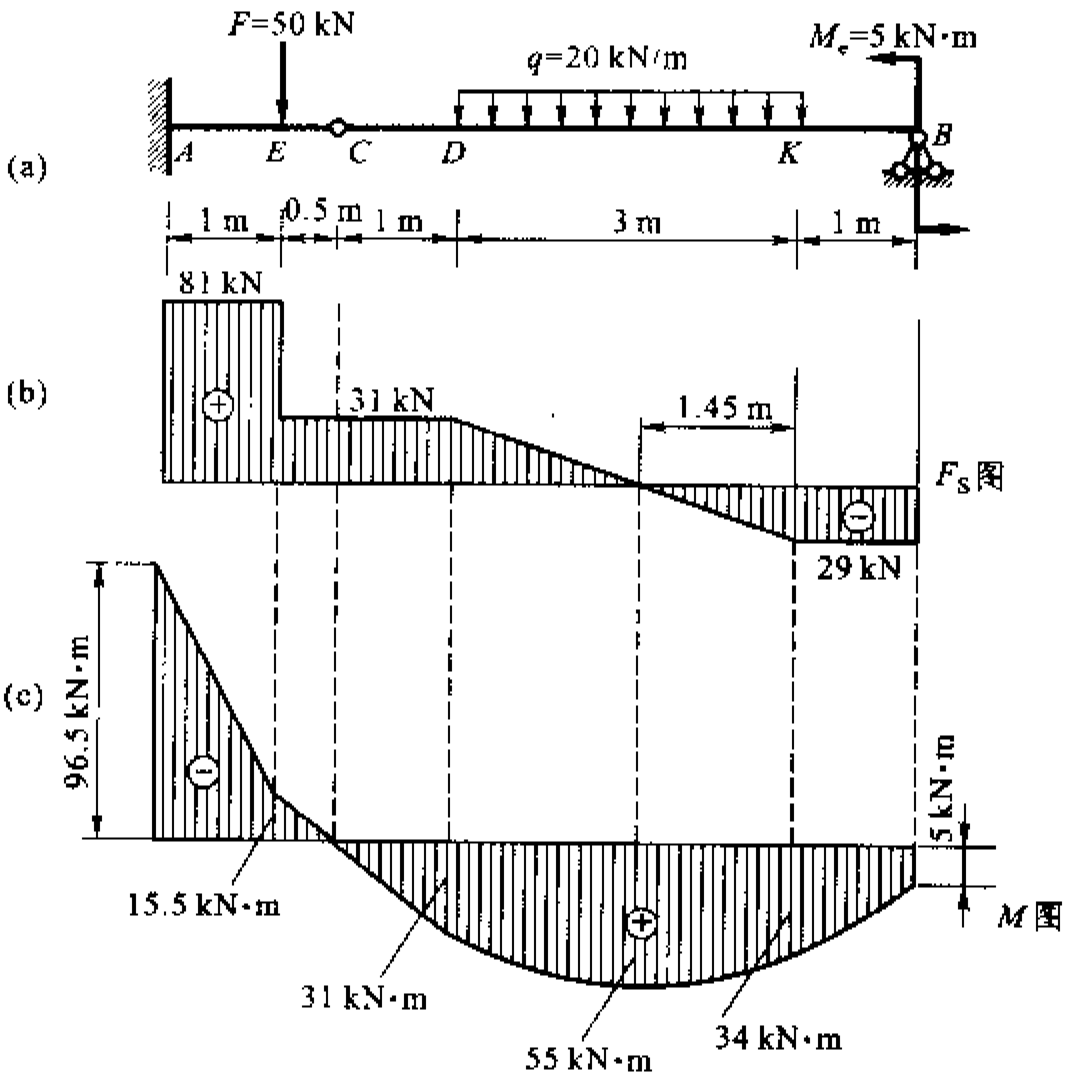
还需求出 $F_S = 0$ 的截面位置。设该截面距截面 K 为 x，于是在截面 x 上的剪力为零，即

$$F_{Sx} = -F_B + qx = 0$$

$$x = \frac{F_B}{q} = \frac{29 \times 10^3\ \mathrm{N}}{20 \times 10^3\ \mathrm{N/m}} = 1.45\ \mathrm{m}$$

由以上各段的剪力值并结合微分关系，便可绘出剪力图如图 b 所示。

(2) 作弯矩图



例题 4-11 图

因 AE, EC, CD 三段梁上 $q(x)=0$，故三段梁上的 M 图应为斜直线。各段分界处的弯矩值为

$$M_A = -M_{RA} = -96.5\ \text{kN·m}$$

$$M_E = -M_{RA} + F_A \times 1\ \text{m} = -96.5\times10^3\ \text{N·m} + (81\times10^3\ \text{N})\times 1\ \text{m}$$
$$= -15.5\times10^3\ \text{N·m} = -15.5\ \text{kN·m}$$

$$M_C = -96.5\times10^3\ \text{N·m} + (81\times10^3\ \text{N})\times1.5\ \text{m} - (50\times10^3\ \text{N})\times0.5\ \text{m}$$
$$=0$$

$$M_D = -96.5\times10^3\ \text{N·m} + (81\times10^3\ \text{N})\times2.5\ \text{m} - (50\times10^3\ \text{N})\times1.5\ \text{m}$$
$$=31\times10^3\ \text{N·m} = 31\ \text{kN·m}$$

DK 段：该段梁上 $q(x)$ 等于负常量，M 图为向下凸的二次抛物线。截面 K 的弯矩为

$$M_K = F_B\times1\ \text{m} + M_e = (29\times10^3\ \text{N})\times1\ \text{m} + 5\times10^3\ \text{N}$$
$$=34\times10^3\ \text{N·m} = 34\ \text{kN·m}$$

在 $F_S=0$ 的截面上弯矩有极值，即

$$M_{极值} = F_B\times2.45\ \text{m} + M_e\times\frac{q}{2}\times(1.45\ \text{m})^2$$

$= (29\times10^3\ \text{N})\times2.45\ \text{m} - 5\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m} - \dfrac{20\times10^3\ \text{N/m}}{2}\times(1.45\ \text{m})^2$

$= 55\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m} = 55\ \text{kN}\cdot\text{m}$

根据以上各段分界处的弯矩值和在 $F_s=0$ 处的 $M_{极值}$，并根据微分关系，便可绘出该梁的弯矩图如图 e 所示

IV. 按叠加原理作弯矩图

当梁在荷载作用下为微小变形时，其跨长的改变可略去不计，因而在求梁的支反力、剪力和弯矩时，均可按其原始尺寸进行计算，而所得到的结果均与梁上荷载成线性关系。在这种情况下，当梁上受几项荷载共同作用时，某一横截面上的弯矩就等于梁在各项荷载单独作用下同一横截面上弯矩的代数和。例如图 4－10a 所示悬臂梁受集中荷载 F 和均布荷载 q 共同作用，在距左端为 x 的任意横截面上的弯矩

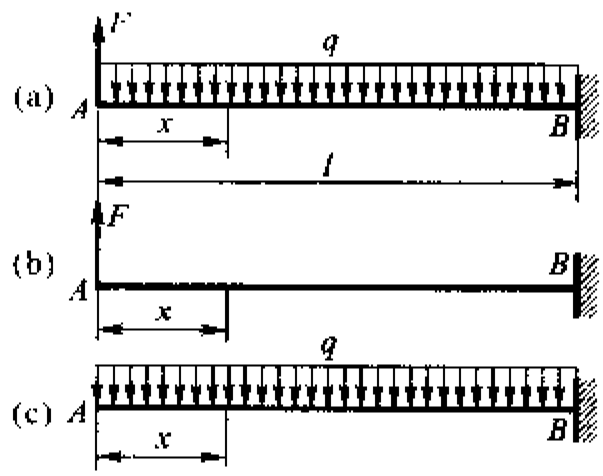


图 4－10

$$M(x) = Fx - \frac{qx^2}{2}$$

就等于集中荷载 F 和均布荷载 q 单独作用(图 4－10b,c)时，该截面上的弯矩 Fx 和 $-\dfrac{qx^2}{2}$ 的代数和。

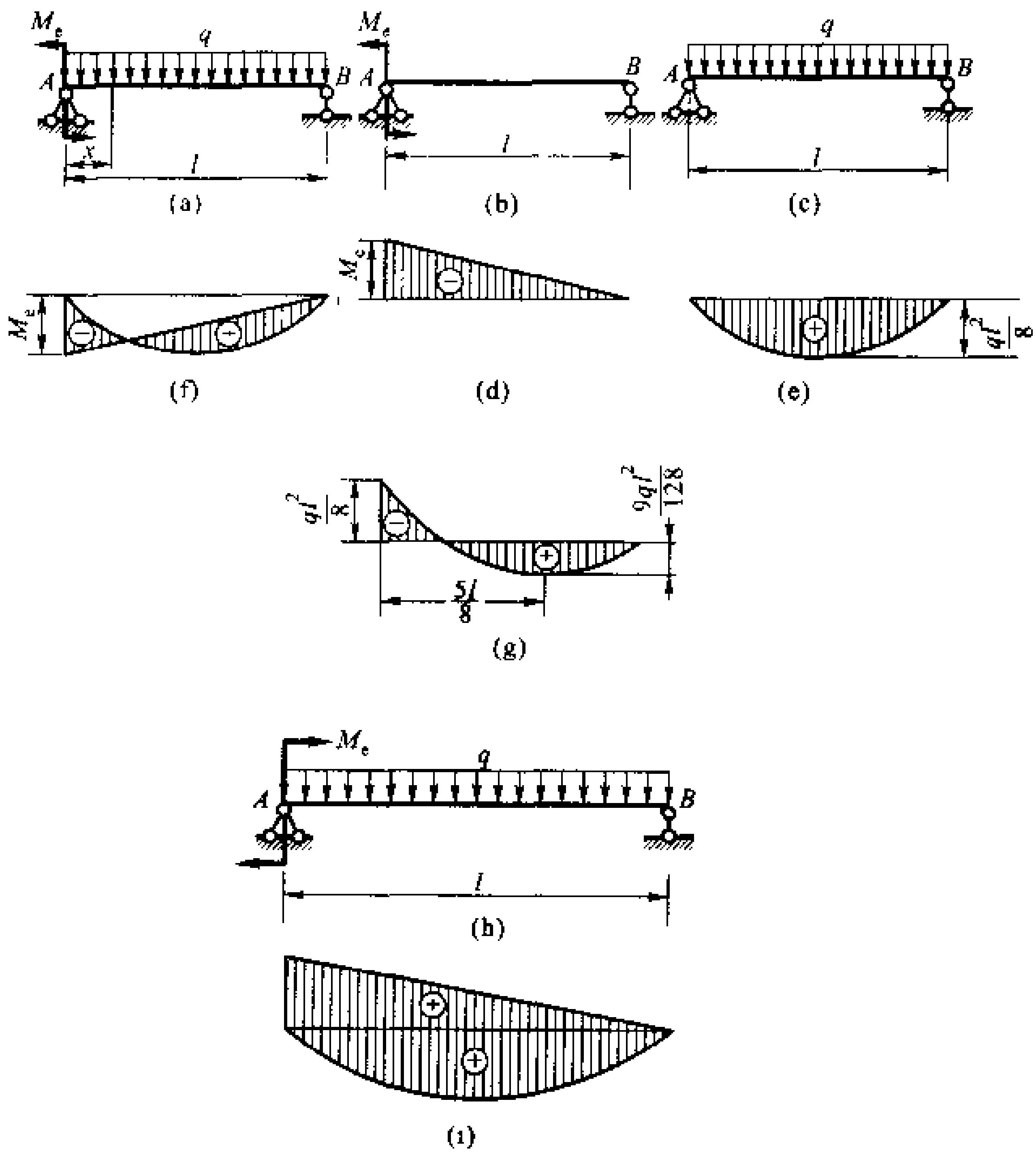
这是一个普遍性的原理，即**叠加原理**：当所求参数(内力、应力或位移)与梁上荷载为线性关系时，由几项荷载共同作用时所引起的某一参数，就等于每项荷载单独作用时所引起的该参数值的叠加。

由于弯矩可以叠加，故表达弯矩沿梁长度变化情况的弯矩图也可以叠加，即可分别作出各项荷载单独作用下梁的弯矩图，然后将其相应的纵坐标叠加，即得梁在所有荷载共同作用下的弯矩图。对梁在简单荷载作用下的弯矩图可参看本书附录Ⅳ。

例题 4－12　试按叠加原理作图 a 所示简支梁的弯矩图，设 $M_e=\dfrac{ql^2}{8}$，并求梁的极值弯矩和最大弯矩。

解：先将梁上的每项荷载单独作用(图 b,c)，分别作出梁上只有力偶或均布荷载时的弯矩图(图 d,e)。两图的纵坐标具有不同的正负号，在叠加时可将其画在 x 轴的同一侧，如图 f 所示。于是，两图共同的部分(图 f 中无阴影线部分)，其正值和负值的纵坐标互相抵消。剩下的纵距(图 f 中阴影线部分)即代表叠加后的弯矩值。叠加后的弯矩图仍为抛物线。若将其改画为以水平直线为基

线的图,即得通常形式的弯矩图(图 g).



例题 4-12 图

为求极值弯矩,需要确定剪力为零的截面位置。由平衡方程 $\sum M_B=0$ 求得支反力 F_A(图 a)为

$$F_A=\frac{M_e}{l}+\frac{ql}{2} \tag{1}$$

写出剪力方程

$$F_S(x)=F_A-qx \qquad (0<x<l)$$

将 F_A 及 $M_e=\frac{ql^2}{8}$ 代入上式后,得

$$F_S(x)=\frac{5}{8}ql-qx \tag{2}$$

令 $F_S(x)=0$，即得极值弯矩所在截面到支座 A 的距离为

$$x_0 = \frac{5}{8}l \tag{3}$$

于是，求得极值弯矩 M_{x_0} 为

$$M_{x_0} = F_A x_0 - M_e - \frac{q x_0^2}{2} = \frac{9ql^2}{128} \tag{4}$$

由于梁在 A 端截面上弯矩 M_A 的数值大于极值弯矩，故全梁的最大弯矩为 $M_{max}=M_A=\frac{ql^2}{8}$（负值）。

如果将外力偶的转向反过来（图 h），则其弯矩图纵坐标将为正值，在均布荷载作用下的弯矩图纵坐标正负号相同。因此，叠加时可将其分别画在 x 轴的两侧，如图 i 所示。

§4-3 平面刚架和曲杆的内力图

平面刚架是由在同一平面内、不同取向的杆件，通过杆端相互刚性连接而组成的结构。平面刚架各杆的内力，除了剪力和弯矩外，还有轴力。作内力图的步骤与前述相同，但因刚架是由不同取向的杆件组成，为了能表示内力沿各杆轴线的变化规律，习惯上按下列约定：

弯矩图 画在各杆的受拉一侧，不注明正、负号。

剪力图及轴力图 可画在刚架轴线的任一侧（通常正值画在刚架的外侧），须注明正、负号。

曲杆横截面上的内力情况及其内力图的绘制方法，与刚架的相类似。

例题 4-13 图 a 所示为下端固定的刚架，在其轴线平面内受集中荷载 F_1 和 F_2 作用。试作刚架的内力图。

解： 计算内力时，一般应先求刚架的反力。本题中刚架的 C 点为自由端，若取包含自由端部分为研究对象（图 a），就可不求支反力。下面分别列出各段杆的内力方程为

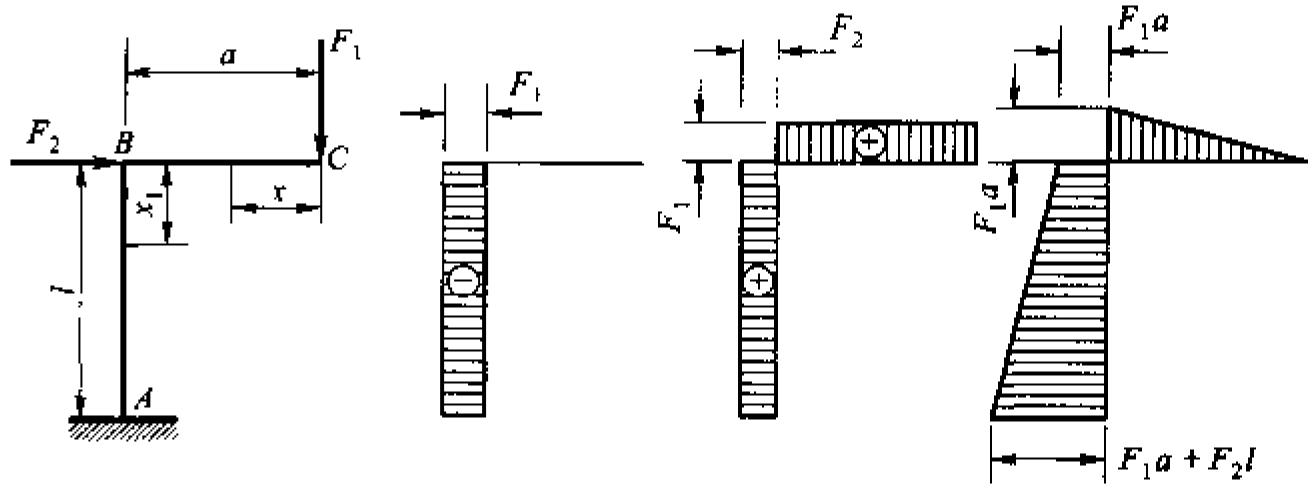
CB 段：

$$F_N(x) = 0$$
$$F_S(x) = F_1$$
$$M(x) = -F_1 x \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

BA 段：

$$F_N(x_1) = -F_1$$
$$F_S(x_1) = F_2$$
$$M(x_1) = -F_1 a - F_2 x_1 \quad (0 \leqslant x_1 \leqslant l)$$

根据各段杆的内力方程，即可绘出轴力、剪力和弯矩图，分别如图 b,c,d 所



(a)　(b) F_N 图　(c) F_S 图　(d) M 图

例题 4-13 图

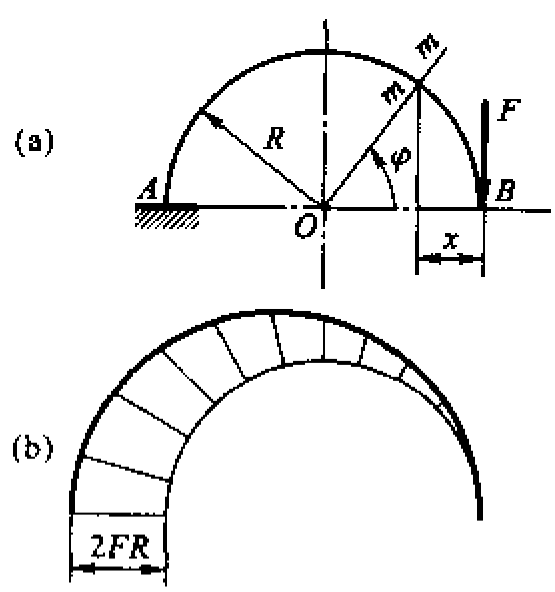
示。

例题 4-14　一端固定的半圆环在其轴线平面内受集中荷载 F 作用，如图 a 所示。试作曲杆的弯矩图。

解：对于环状曲杆，应用极坐标表示其横截面位置。取环的中心 O 为极点，以 OB 为极轴，并用 φ 表示横截面的位置(图 a)。对于曲杆，其横截面上弯矩的正负号通常规定为：使曲杆的曲率增加(即外侧受拉)的弯矩为正。按照这一规定，求得曲杆的弯矩方程(图 a)为

$$M(\varphi)=Fx=FR(1-\cos\varphi)$$
$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

在上式所适用的范围内，对 φ 取不同值，算出各相应横截面上的弯矩。以曲杆的轴线为基线，将算得的弯矩分别标在与横截面相应的径向线上，连接这些点的光滑曲线即为曲杆的弯矩图(图 b)。这里也将弯矩图画在曲杆的受拉一侧，而不标注正负号。



例题 4-14 图

由图可见，半圆环的最大弯矩在固定端处的横截面 A 上，其值为 $M_{max}=2FR$。

§4-4　梁横截面上的正应力·梁的正应力强度条件

在一般情况下，梁的横截面上有弯矩 M 和剪力 F_S。由截面上分布内力的合成关系可知，横截面上只有与正应力有关的法向内力元素 $dF_N=\sigma dA$ 才能合

成为弯矩；而与切应力有关的切向内力元素 $dF_S=\tau dA$ 才能合成为剪力。所以，在梁的横截面上一般是既有正应力，又有切应力。

首先研究梁在对称弯曲时，横截面上的正应力。若梁在某段内各横截面上的剪力为零，弯矩为常量，则该段梁的弯曲称为**纯弯曲**。例如，具有纵对称面的梁，在对称面内仅受一对外力偶作用（图 4－11a）时，其弯曲即属于对称弯曲中的纯弯曲情况，这是弯曲理论中最基本的情况。

I. 纯弯曲时梁横截面上的正应力

取图 4－11a 所示纯弯曲梁，由截面法可知，梁的任一横截面上将只有弯矩 M，其值等于外力偶的矩 M_e。推导梁在横截面上正应力的计算公式，也要综合考虑几何、物理和静力学三方面。

几何方面　为找出横截面上正应力的变化规律，先研究该截面上任一点处沿横截面法线方向的线应变，亦即纵向线应变，从而找出纵向线应变在该截面上

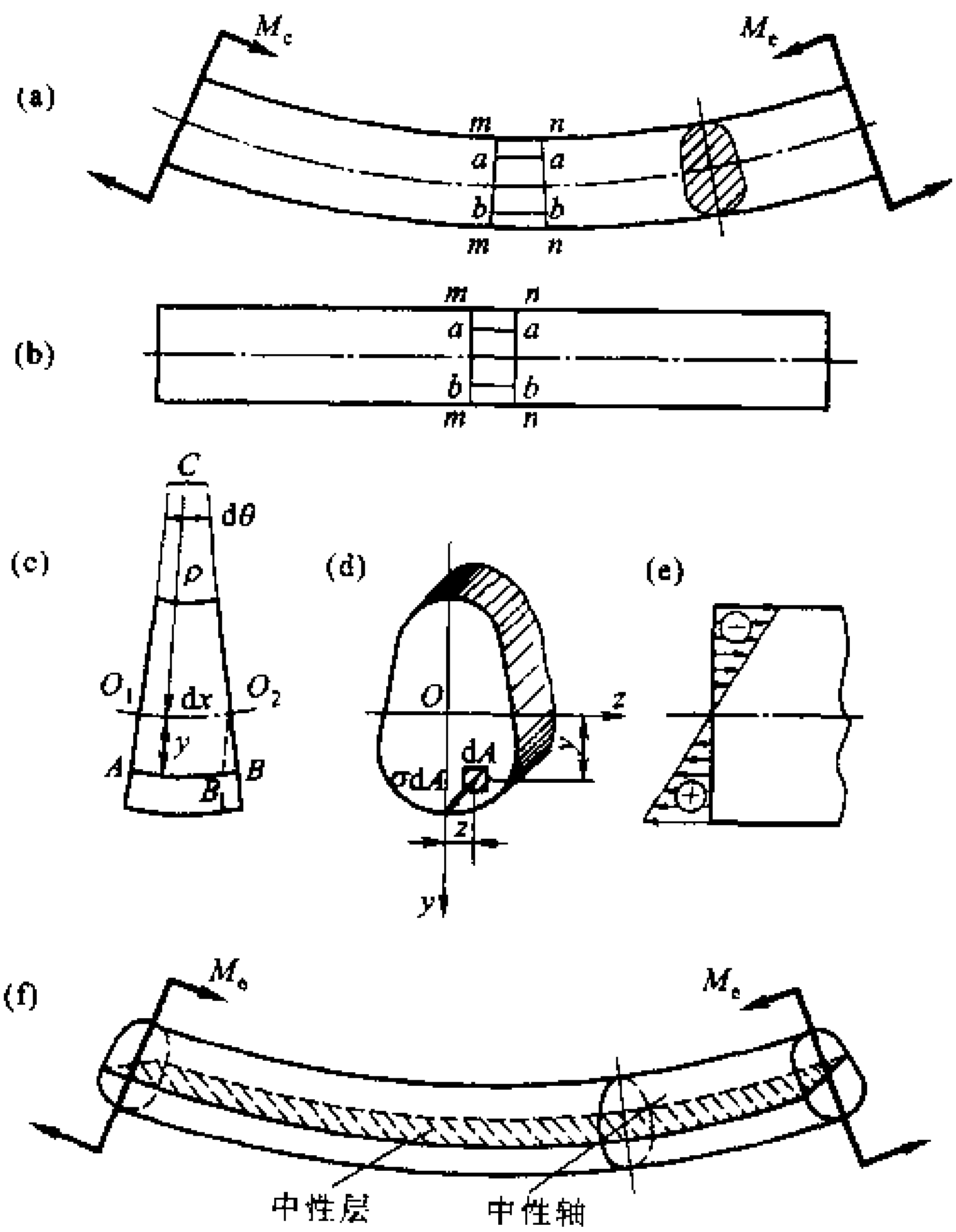


图 4－11

的变化规律。为此，在梁加力以前，先在其侧面上画两条相邻的横向线 mm 和 nn，并在两横向线间靠近顶面和底面处分别画纵线 aa 和 bb(图 4-11b)，然后在梁端加一对矩为 M_e 的外力偶。根据实验观察，在梁变形后，侧面上的纵线 aa 和 bb 弯曲成弧线，而横向线 mm 和 nn 则仍为直线，并在相对旋转了一个角度后仍与弧线 aa 和 bb 保持正交(图 4-11a)。这时，靠近底面的纵线 bb 伸长，而靠近顶面的纵线 aa 缩短。根据上述变形的表面现象，可作出如下假设：梁在受力弯曲后，其原来的横截面仍为平面，并绕垂直于纵对称面的某一轴旋转，且仍垂直于梁变形后的轴线，这就是弯曲问题中的**平面假设**。对于纯弯曲梁，按弹性理论分析的结果，证明其横截面确实保持为平面。

现用两个横截面从梁中假想地截取长为 dx 的一段(图 4-11c)，由平面假设可知，在梁弯曲时，两横截面将相对旋转一个角度 $d\theta$。横截面的转动将使梁凹边的纵向线缩短，凸边的纵向线伸长。由于变形的连续性，中间必有一层纵向线 $\widehat{O_1O_2}$ 无长度改变，称为**中性层**。中性层与横截面的交线称为**中性轴**(图 4-11f)。梁在弯曲时，相邻横截面就是绕中性轴作相对转动的。由于外力、横截面形状及梁的物性均对称于梁的纵对称面，故梁变形后的形状也必对称于该平面，因此，中性轴应与横截面的对称轴成正交。若将梁的轴线取为 x 轴，横截面的对称轴取为 y 轴，则中性轴可取为 z 轴(图 4-11d)[①]。至于中性轴在横截面上的具体位置，目前还不能确定。现研究在横截面上距中性轴为 y 处的纵向线应变。作 O_2B_1 与 O_1A 平行(图 4-11c)，则可得该点处的纵向线应变为

$$\varepsilon = \frac{\Delta\widehat{AB_1}}{\widehat{AB_1}} = \frac{\widehat{B_1B}}{\widehat{O_1O_2}} = \frac{y\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

式中，$\widehat{O_1O_2}$ 是在中性层上纵向线段的长度，$\widehat{O_1O_2} = \mathrm{d}x$，而中性层的曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

代入上式，即得

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \tag{a}$$

式(a)表明横截面上任一点处的纵向线应变 ε 与该点在截面上之位置 y 成正比。

物理方面 若设各纵向线之间没有因纯弯曲而引起的相互挤压，则可认为横截面上各点处的纵向线段均处于单轴应力状态。于是，当材料处于线弹性范围内，且拉伸和压缩弹性模量相同时，由单轴应力状态下的胡克定律可得物理关系

① 这里取 y 轴向下为正，因为这样在正值弯矩下可使横截面上任一点处的线应变及正应力(拉伸时为正，压缩时为负)与该点的 y 坐标在正负号上取得一致。

$$\sigma = E\varepsilon \tag{b}$$

将式(a)代入式(b),即得

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \tag{c}$$

由上式可知,横截面上任一点处的正应力与该点到中性轴的距离成正比,而在距中性轴为 y 的等高线上各点处的正应力均相等。其变化规律如图 4－11e 所示。

静力学方面 由于式(c)中的$\frac{1}{\rho}$以及中性轴的位置均为未知,为此,考察静力学方面。

在横截面上法向内力元素 σdA(图 4－11d)构成了空间平行力系,因此,可能组成三个内力分量

$$F_N = \int_A \sigma dA,\quad M_y = \int_A z\sigma dA,\quad M_z = \int_A y\sigma dA$$

根据梁上只有外力偶 M_e 的受力条件,由截面法可知,上式中的 F_N 和 M_y 均等于零,而 M_z 就是横截面上的弯矩 M,其值等于 M_e。因此,由静力学可得

$$F_N = \int_A \sigma dA = 0 \tag{d}$$

$$M_y = \int_A z\sigma dA = 0 \tag{e}$$

$$M_z = \int_A y\sigma dA = M \tag{f}$$

将式(c)代入以上三式,并根据 § I－2[①] 中有关的截面几何参数的定义,可得

$$F_N = \frac{E}{\rho}\int_A y dA = \frac{ES_z}{\rho} = 0 \tag{g}$$

$$M_y = \frac{E}{\rho}\int_A zy dA = \frac{EI_{yz}}{\rho} = 0 \tag{h}$$

$$M_z = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho} = M \tag{i}$$

为满足式(g),由于$\frac{E}{\rho}$不可能等于零,故必有 $S_z = 0$。从 § I－2 可知,若 $S_z = 0$,则 z 轴必须通过横截面的形心,于是,就确定了中性轴的位置。

式(h)是自动满足的,因为 y 轴是横截面的对称轴,所以 I_{yz} 必等于零(参见 § I－2)。实际上,由于 y 轴是对称轴,所以在其左、右两侧对称位置处的法向内

① 注意附录 I 中的坐标系与这里所用的不同。

力元素 $\sigma \mathrm{d}A$ 对 y 轴的矩必数值相等而转向相反。因此，整个横截面上 $\sigma \mathrm{d}A$ 所组成的力矩 M_y 必等于零。

最后，由式(i)得中性层曲率 $\frac{1}{\rho}$ 的表达式

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z} \tag{4-4}$$

由上式可见，在相同弯矩下，EI_z 值越大，梁的弯曲程度$\left(\text{用曲率}\frac{1}{\rho}\text{来表示}\right)$就越小，所以，$EI_z$ 称为梁的**弯曲刚度**。

将式(4－4)代入式(c)，即得等直梁在纯弯曲时横截面上任一点处正应力的计算公式为

$$\sigma=\frac{My}{I_z} \tag{4-5}$$

式中，M 为横截面上的弯矩；I_z 为横截面对中性轴 z 的惯性矩；y 为所求应力点的纵坐标。

由以上分析可见，问题的几何方面为平面假设；物理方面有各纵向线段间互不挤压，材料在线弹性范围内且材料在拉伸和压缩时的弹性模量相等。这些都是推导式(4－4)和(4－5)的依据，因而，也是应用这些公式的限制条件。

在式(4－5)中，将弯矩 M 和坐标 y 按规定的正负号代入，所得到的正应力 σ 若为正值，即为拉应力，若为负值则为压应力。在具体计算中，可根据梁变形的情况来判断，即以中性层为界，梁变形后凸出边的应力必为拉应力，而凹入边的应力则为压应力。

从式(4－5)可知，在横截面上离中性轴最远的各点处，正应力值最大。当中性轴 z 为截面的对称轴时，则横截面上的最大正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{My_{\max}}{I_z} \tag{j}$$

若令

$$W_z=\frac{I_z}{y_{\max}} \tag{4-6}$$

则

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z} \tag{4-7a}$$

式中，W_z 是截面的几何性质之一，称为**弯曲截面系数**，其值与横截面的形状和尺寸有关，其单位为 m^3。矩形和圆形截面的弯曲截面系数可从附录Ⅱ的表[①]

① 这些表中的坐标系与此处所用的不同，在使用时应予注意。

中查出 I_z 值，按式(4－6)分别求得为

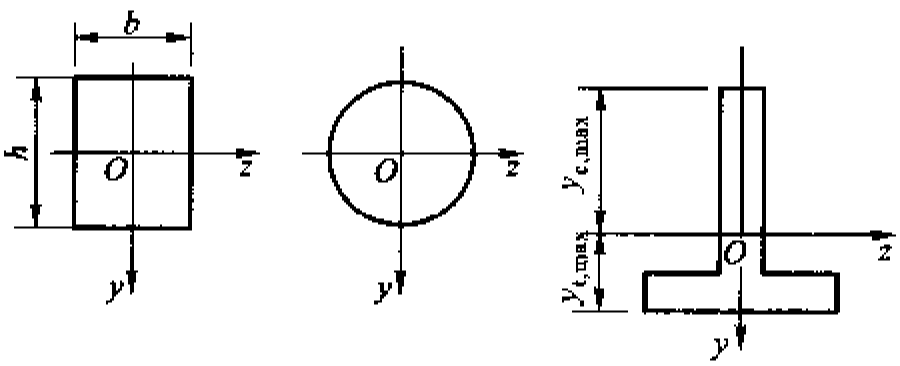
矩形截面(图 4－12a)

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \tag{k}$$

圆形截面(图 4－12b)

$$W_z = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \tag{l}$$

至于型钢截面的弯曲截面系数，则可从型钢规格表[①] 中查到。



(a)　(b)　(c)

图 4－12

当梁弯曲时，在其横截面上既有拉应力也有压应力。对于中性轴为对称轴的横截面，例如矩形、圆形和工字形等截面，其最大拉应力和最大压应力在数值上相等，可按式(4－7a)求得。对于中性轴不是对称轴的横截面，例如 T 字形截面(图 4－12c)，则其上拉应力和压应力的最大值不等，这时应分别以横截面上受拉和受压部分距中性轴最远的距离 $y_{t,max}$ 和 $y_{c,max}$ 直接代入式(4－5)，以求得相应的最大应力。

II. 纯弯曲理论的推广

当梁上有横向力作用时，一般说来，横截面上既有弯矩又有剪力，梁的弯曲称为**横力弯曲**。这时，梁的横截面上不仅有正应力，而且有切应力。由于切应力的存在，梁的横截面将发生翘曲。此外，在与中性层平行的纵截面上，还有由横向力引起的挤压应力。因此，梁在纯弯曲时所作的平面假设和各纵向线段间互不挤压的假设都不能成立。但按弹性理论的分析结果[②] 指出，在均布荷载作用下的矩形截面简支梁，当其跨长与截面高度之比 l/h 大于 5 时，横截面上的最大正应力按纯弯曲时的式(4－5)来计算，其误差不超过 1%。对于工程实际中常用的梁，应用纯弯曲时的正应力计算公式来计算梁在横力弯曲时横截面上的正

① 这些表中的坐标系与此处所用的不同，在使用时应予注意。

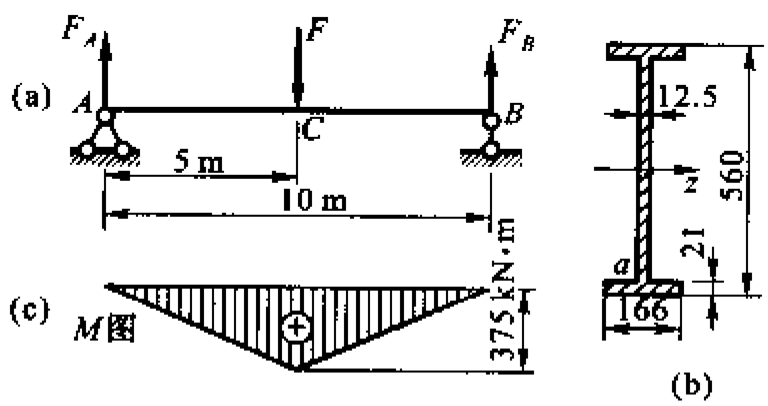
② 参看铁摩辛柯等著《弹性理论》，徐芝纶等译，43 页，人民教育出版社，1964 年。

应力,所得的结果虽略偏低一些,但足以满足工程中的精度要求。且梁的跨高比 l/h 越大,其误差越小。

于是,式(4-7a)仍可用来计算横力弯曲时等直梁横截面上的最大正应力,但式中的弯矩 M 应用相应截面上的弯矩 $M(x)$ 代替,即

$$\sigma_{max} = \frac{M(x)}{W_z} \tag{4-7b}$$

例题 4-15 图 a 所示简支梁由 56a 号工字钢制成,其截面简化后的尺寸见图 b,$F=150$ kN。试求梁危险截面上的最大正应力 σ_{max} 和同一截面上翼缘与腹板交界处 a 点(图 b)的正应力 σ_a。



例题 4-15 图

解: 首先作梁的弯矩图(图 c)。可见,截面 C 为危险截面,相应的最大弯矩值为

$$M_{max} = 375\ \text{kN·m}$$

利用型钢规格表查得,56a 号工字钢截面的 $W_z = 2\ 342\ \text{cm}^3$ 和 $I_z = 65\ 586\ \text{cm}^4$。

可得危险截面上的最大正应力 σ_{max} 为

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{375\times10^3\ \text{N·m}}{2\ 342\times10^{-6}\ \text{m}^3} = 160\times10^6\ \text{Pa} = 160\ \text{MPa}$$

对于危险截面上点 a 处的正应力,利用式(4-5)代入 M_{max},I_z 和有关尺寸(图 b),得

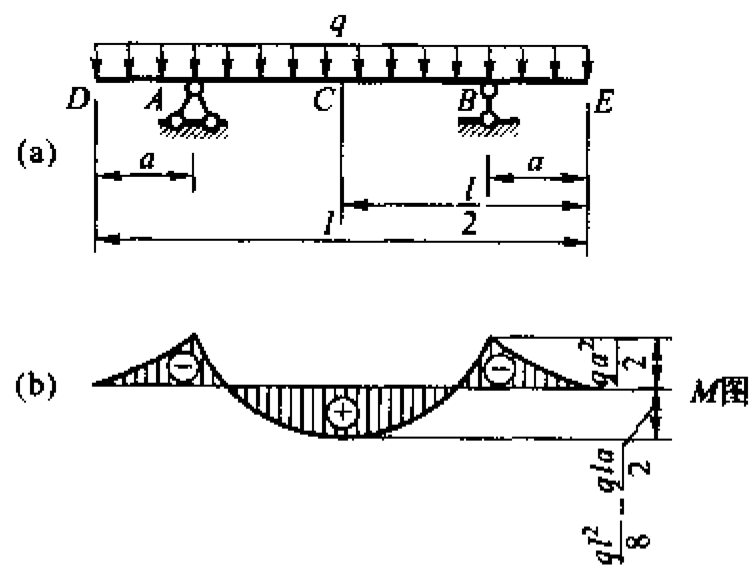
$$\sigma_z - \frac{M_{max}y_a}{I_z} = \frac{(375\times10^3\ \text{N·m})\left(\dfrac{0.56\ \text{m}}{2} - 0.021\ \text{m}\right)}{65\ 586\times10^{-8}\ \text{m}^4}$$
$$= 140\times10^6\ \text{Pa} = 148\ \text{MPa}$$

注意到直梁横截面上的正应力在与中性轴垂直的方向是按直线规律变化的,因此,当已经求得横截面上的 σ_{max} 时,同一横截面上的正应力 σ_a 亦可按比例求得:

$$\sigma_a = \frac{y_a}{y_{max}}\sigma_{max} = \frac{\left(\dfrac{0.56\ \mathrm{m}}{2} - 0.021\ \mathrm{m}\right)}{\dfrac{0.56\ \mathrm{m}}{2}} \times 160\ \mathrm{MPa} = 148\ \mathrm{MPa}$$

在上面的计算中没有考虑钢梁的自重，因为由自重引起的正应力与由外加荷载所引起的相比极小(在本题中，由梁的自重所引起的最大正应力不到 5.4 MPa)。在一般情况下，钢梁的自重可略去不计。

例题 4-16 受均布荷载作用的工字形截面等直外伸梁如图 a 所示。试求当最大正应力 σ_{max} 为最小时的支座位置。



例题 4-16 图

解：作梁的弯矩图(图 b)，由图可见，支座位置 a 直接影响支座 A 或 B 处截面和跨度中央截面 C 上的弯矩值。当中性轴为截面的对称轴，最大拉、压应力相等时，只有支座处截面与跨中截面之弯矩的绝对值相等，才能使该梁的最大弯矩的绝对值为最小，从而使其最大正应力 $\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W_z}$ 为最小，即

$$\frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} = \frac{qa^2}{2}$$

$$4a^2 + 4la - l^2 = 0$$

$$a = \left(-4l \pm \sqrt{16l^2 + 16l^2}\right)/8$$

由于 a 应为正值，所以上式中根号应取正号，从而解得

$$a = 0.207l$$

III. 梁的正应力强度条件

等直梁的最大正应力发生在最大弯矩的横截面上距中性轴最远的各点处，而该处的切应力等于零或与该点处的正应力相比很小(详见下节讨论)。此外，

纵截面上由横向力引起的挤压应力可略去不计。因此，可将横截面上最大正应力所在各点处的应力状态，看作是单轴应力状态。于是，可按照单轴应力状态下强度条件的形式，来建立梁的正应力强度条件：梁的横截面上的最大工作正应力σ_{max}不得超过材料的许用弯曲正应力$[\sigma]$，即

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] \tag{4-8}$$

利用式(4－7b)可将上式改写为

$$\frac{M_{max}}{W_z} \leqslant [\sigma] \tag{4-9}$$

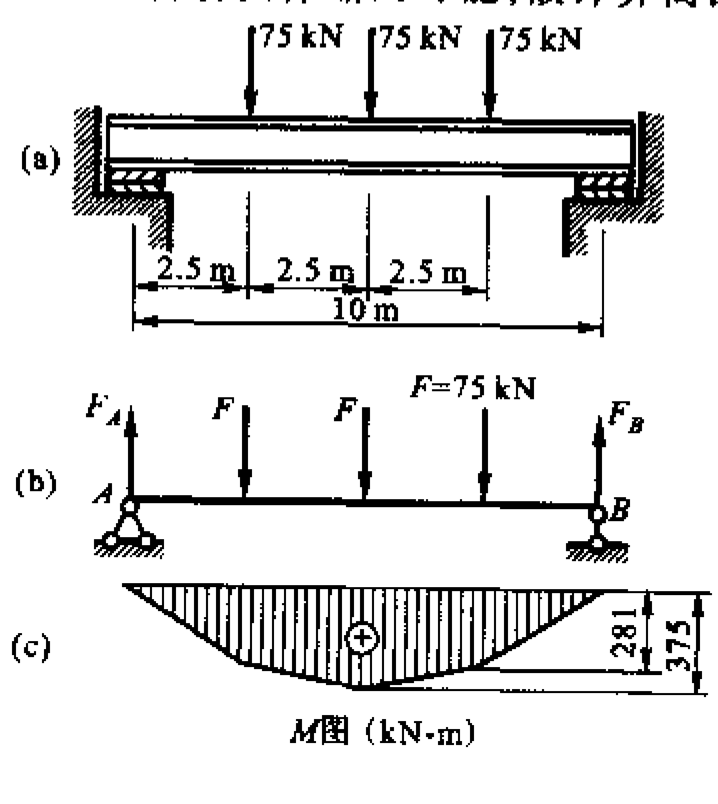
根据强度条件公式(4－9)，即可对梁按正应力进行强度计算，即强度校核、选择梁的截面或确定梁的许可荷载。

关于材料许用弯曲正应力的确定，一般就以材料的许用拉应力作为其许用弯曲正应力。事实上，由于弯曲和轴向拉伸时杆横截面上正应力的变化规律不同，材料在弯曲与轴向拉伸时的强度并不相同，因面在某些设计规范中所规定的许用弯曲正应力就比其许用拉应力略高。关于许用弯曲正应力的规定，在有关的设计规范中均有具体规定。

对于用铸铁等脆性材料制成的梁，由于材料的许用拉应力和许用压应力不同，面梁横截面的中性轴往往也不是对称轴，因此，梁的最大工作拉应力和最大工作压应力(注意两者往往并不发生在同一横截面上)要求分别不超过材料的许用拉应力和许用压应力。

例题 4－17　图 a 所示的楼板主梁由工字钢制成。钢的许用弯曲正应力$[\sigma]=152$ MPa，试选择工字钢的号码。

解：由于梁的两端稍有转动及伸缩的可能，故计算简图可取为简支梁(图



例题 4－17 图

b)，其弯矩图如图 c 所示，梁的最大弯矩值为

$$M_{max} = 375\ \text{kN·m}$$

根据 M_{max} 和 $[\sigma]$ 值，由弯曲强度条件可得梁所必需的弯曲截面系数 W_z 为

$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{375\times10^3\ \text{N·m}}{152\times10^6\ \text{Pa}} = 2\,460\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

由型钢规格表查得 56b 号工字钢的 W_z 为

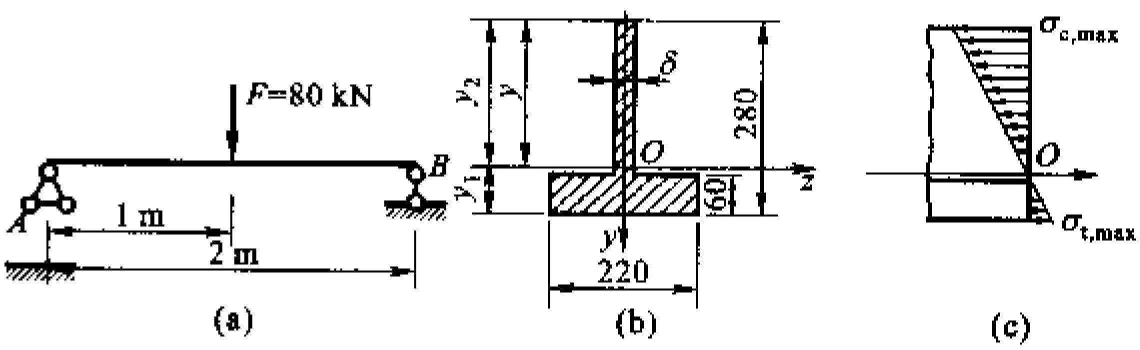
$$W_z = 2\,447\ \text{cm}^3$$

此值虽小于 $W_z = 2\,460\times10^{-6}\ \text{m}^3$，但相差不到 1%，此时最大正应力

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{375\times10^3\ \text{N·m}}{2\,447\times10^{-6}\ \text{m}^3} = 153\times10^6\ \text{Pa} = 153\ \text{MPa}$$

超过许用弯曲正应力值 152 MPa 也不到 1%，故可选用 56b 号工字钢。

例题 4－18 跨长 $l = 2$ m 的铸铁梁受力如图 a 所示。已知材料的拉、压许用应力分别为 $[\sigma_t] = 30$ MPa 和 $[\sigma_c] = 90$ MPa。试根据截面最为合理的要求，确定 T 字形截面梁横截面的尺寸 δ（图 b），并校核梁的强度。



例题 4－18 图

解：要使截面最为合理，应使梁的同一危险截面上的最大拉应力与最大压应力（图 c）之比 $\sigma_{t,max}/\sigma_{c,max}$ 与相应的许用应力之比 $[\sigma_t]/[\sigma_c]$ 相等。由于 $\sigma_{t,max} = \frac{My_1}{I_z}$ 和 $\sigma_{c,max} = \frac{My_2}{I_z}$，并已知 $\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{30\ \text{MPa}}{90\ \text{MPa}} = \frac{1}{3}$，所以

$$\frac{\sigma_{t,max}}{\sigma_{c,max}} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{3} \tag{1}$$

式(1)就是确定中性轴即形心轴位置 $\bar{y}$（图 b）的条件。考虑到 $y_1 + y_2 = 280$ mm（图 b），即得

$$\bar{y} = y_2 = 210\ \text{mm} \tag{2}$$

显然，$\bar{y}$ 值与横截面尺寸有关，根据形心坐标公式［参见附录 I 中的式(I－2a)］及图 b 中所示尺寸，并利用式(2)可列出

$$\bar{y} = \frac{(280\ \text{mm}-60\ \text{mm})\delta\left(\frac{280\ \text{mm}-60\ \text{mm}}{2}\right) + 60\ \text{mm}\times220\ \text{mm}\left(280\ \text{mm}-\frac{60\ \text{mm}}{2}\right)}{(280\ \text{mm}-60\ \text{mm})\delta + 60\ \text{mm}\times220\ \text{mm}}$$

$$= 210\ \text{mm}$$

由此求得
$$\delta = 24\ \text{mm} \tag{3}$$

确定 δ 后进行强度校核。为此，由平行移轴公式(I-10)计算截面对中性轴的惯性矩 I_z 为

$$I_z = \frac{(24\ \text{mm})(220\ \text{mm})^3}{12} + (24\ \text{mm})(220\ \text{mm})(210\ \text{mm} - 110\ \text{mm})^2 +$$
$$\frac{(220\ \text{mm})(60\ \text{mm})^3}{12} + \left(220\ \text{mm})(60\ \text{mm})(280\ \text{mm}) - 210\ \text{mm} - \frac{60\ \text{mm}}{2}\right)^2$$
$$= 99.2 \times 10^6\ \text{mm}^4 = 99.2 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

梁的最大弯矩为

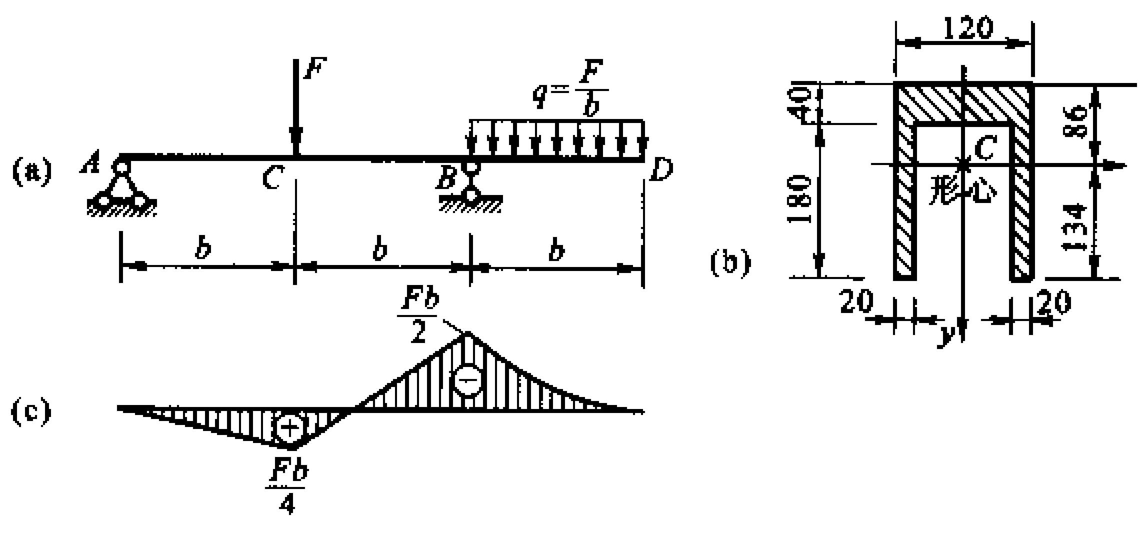
$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} = \frac{(80 \times 10^3\ \text{N})(2\ \text{m})}{4} = 40 \times 10^3\ \text{N·m} = 40\ \text{kN·m}$$

于是，由式(4-5)即得梁的最大压应力，并据此校核强度：

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_{\max} y_2}{I_z} = \frac{(40 \times 10^3\ \text{N·m})(210 \times 10^{-3}\ \text{m})}{99.2 \times 10^{-6}\ \text{m}^4}$$
$$= 84.7 \times 10^6\ \text{Pa} = 84.7\ \text{MPa} < [\sigma_c]$$

可见，梁满足强度条件。

例题 4-19 一槽形截面铸铁梁如图 a 所示。已知 $b = 2$ m，$I_z = 5\,493 \times 10^4\ \text{mm}^4$，铸铁的许用拉应力 $[\sigma_t] = 30$ MPa，许用压应力 $[\sigma_c] = 90$ MPa。试求梁的许可荷载 $[F]$。



例题 4-19 图

解：作梁的弯矩图如图 c 所示，最大负弯矩在截面 B 上，最大正弯矩在截面 C 上，其值分别为

$$M_B = -\frac{Fb}{2}, \quad M_C = \frac{Fb}{4}$$

由横截面的尺寸可见，中性轴到上、下边缘的距离分别为

$$y_2 = 86\ \text{mm}, \quad y_1 = 134\ \text{mm}$$

经分析可知，不论是对截面 C 还是对截面 B 而言，该梁的强度均由最大拉应力控制。因此，分别算出截面 C 和截面 B 上的最大拉应力，并与材料相应的许用应力相比较，从而求出荷载 F 值：

$$\text{截面 } C: \sigma_{t,\max} = \frac{M_C \cdot y_1}{I_z} = \frac{\left(\frac{F}{4} \times 2\ \text{m}\right) \times 0.134\ \text{m}}{5\,493 \times 10^{-8}\ \text{m}^4} \leqslant 30 \times 10^6\ \text{Pa}$$

$$F \leqslant 24.6\ \text{kN}$$

$$\text{截面 } B: \sigma_{t,\max} = \frac{M_B \cdot y_2}{I_z} = \frac{\left(\frac{F}{2} \times 2\ \text{m}\right) \times 0.086\ \text{m}}{5\,493 \times 10^{-8}\ \text{m}^4} \leqslant 30 \times 10^6\ \text{Pa}$$

$$F \leqslant 19.2\ \text{kN}$$

取其中较小者，即得该梁的许可荷载为 $[F] = 19.2\ \text{kN}$。

§4-5 梁横截面上的切应力·梁的切应力强度条件

Ⅰ. 梁横截面上的切应力

在对称弯曲的横力弯曲情况下，梁的横截面上有切力，相应地将有切应力。

一、矩形截面梁

先来研究矩形截面梁横截面上的切应力，并以此阐明研究弯曲切应力的基本原理和方法。图 4-13 示一矩形截面梁受任意横向荷载作用。以 $m-m$ 和 $n-n$ 两横截面假想地从梁中取出长为 dx 的一段，在一般情况下，该两横截面上的弯矩并不相等，因而两截面上同一 y 坐标处的正应力也不相等。再用平行于中性层的纵截面 AA_1B_1B 假想地从梁段上截出体积元素

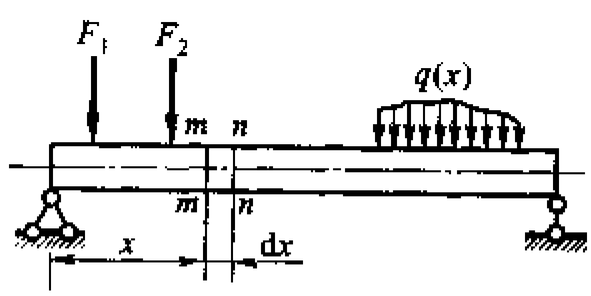
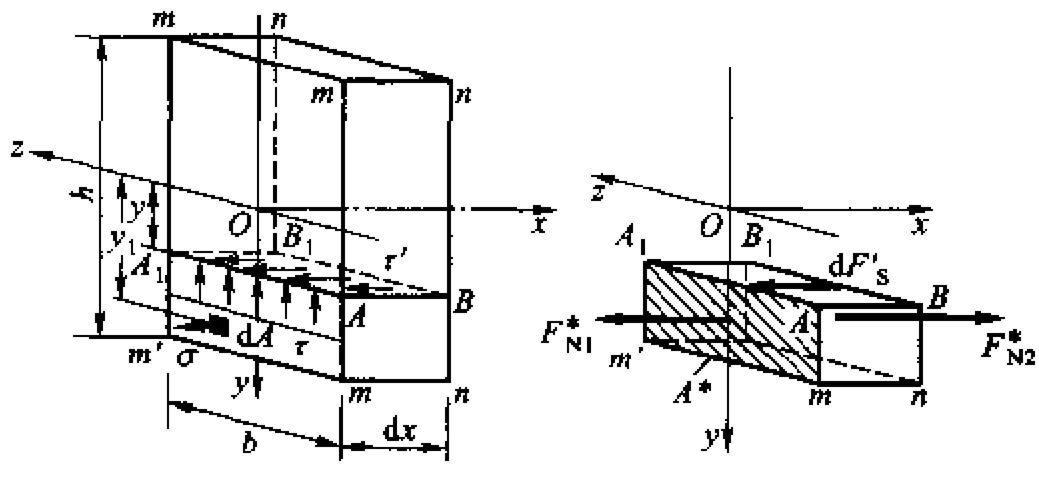


图 4-13

mB_1（图 4-14a, b），则在端面 mA_1 和 nB_1 上，与正应力对应的法向内力也不相等。因此，为维持体积元素 mB_1 的平衡，在纵面 AB_1 上必有沿 x 方向的切向内力，故在纵面上就存在相应的切应力 τ'（图 4-14a）。

为推导切应力的表达式，还需求切应力沿截面宽度的变化规律以及切应力的方向。对于狭长矩形截面，由于梁的侧面上无切应力，故横截面上侧边各点处的切应力必与侧边平行，而在对称弯曲情况下，对称轴 y 处的切应力必沿 y 方向，且狭长矩形截面上切应力沿截面宽度的变化不可能大。于是，可作如下两个

假设:(1) 横截面上各点处的切应力均与侧边平行;(2) 横截面上距中性轴等远各点处的切应力大小相等。根据上述假设所得到的解与弹性理论的解相比较,可以发现,对狭长矩形截面梁,上述假设完全可用;对一般高度大于宽度的矩形截面梁,在工程计算中也是适用的。



(a)　　(b)

图 4-14

已知横截面上切应力的变化规律后,就可直接由静力平衡条件导出切应力的计算公式。设在图 4-13 中距左端为 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 处横截面 $m-m$ 和 $n-n$ 上的弯矩分别为 M 和 $M+\mathrm{d}M$,两截面上距中性轴为 y_1 处的正应力分别为 σ_1 和 σ_2,于是,可得两端面上的法向内力 F_{N1}^* 和 F_{N2}^*(图 4-14b):

$$F_{N1}^* = \int_{A^*}\sigma_1 \mathrm{d}A = \int_{A^*}\frac{My_1}{I_z}\mathrm{d}A = \frac{M}{I_z}\int_{A^*}y_1\mathrm{d}A = \frac{M}{I_z}S_z^* \tag{a}$$

$$F_{N2}^* = \int_{A^*}\sigma_2 \mathrm{d}A = \int_{A^*}\frac{(M+\mathrm{d}M)}{I_z}y_1\mathrm{d}A = \frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}S_z^* \tag{b}$$

式中,$S_z^* = \int_{A^*}y_1\mathrm{d}A$ 为面积 A^*(图 4-14b)对横截面中性轴的静矩;A^* 为横截面上距中性轴为 y 的横线以外部分的面积(即图 4-14b 中阴影线面积)。

纵截面 AB_1 上由 $\tau'\mathrm{d}A$ 所组成的是切向内力 $\mathrm{d}F'_S$(图 4-14b)。由假设(2)及切应力互等定理可知,在纵截面上横线 AA_1 各点处的切应力 τ' 的大小相等。至于在 $\mathrm{d}x$ 长度上,τ' 即使有变化,其增量也是一阶无穷小,可略去不计,从而认为 τ' 在纵截面 AB_1 上为一常量。于是得到

$$\mathrm{d}F'_S = \tau' b\mathrm{d}x \tag{c}$$

将式(a),(b)和(c)代入平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{N2}^* - F_{N1}^* - \mathrm{d}F'_S = 0$$

经化简后即得

$$\tau' = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \times \frac{S_z^*}{I_z b}$$

引进弯矩与剪力间的微分关系$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_S$,上式即为

$$\tau' = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

由切应力互等定理可知,$\tau = \tau'$,故有

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} \tag{4-10}$$

式中,F_S 为横截面上的剪力;I_z 为整个横截面对其中性轴的惯性矩;b 为矩形截面的宽度;S_z^* 为横截面上距中性轴为 y 的横线以外部分的面积(图 4-14b 中的阴影线面积)对中性轴的静矩。τ 的方向与剪力 F_S 的方向相同。式(4-10)即矩形截面等直梁在对称弯曲时横截面上任一点处切应力的计算公式。

式(4-10)中的 F_S,I_z 和 b 对某一横截面而言均为常量,因此,横截面上的切应力 τ 沿截面高度(即随坐标 y)的变化情况,由部分面积的静矩 S_z^* 与坐标 y 之间的关系所反映。在计算 $S_z^* = \int_{A^*} y_1 \mathrm{d}A$ 时,可以取 $b\mathrm{d}y_1$ 作为面积元素 $\mathrm{d}A$。由图 4-14a 可得

$$S_z^* = \int_y^{\frac{h}{2}} y_1 b \mathrm{d}y_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

代入式(4-10),即得

$$\tau = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{d}$$

可见,τ 沿截面高度是按二次抛物线规律变化的(图 4-15)。当 $y = \pm\frac{h}{2}$时,即在横截面上距中性轴最远处,切应力 $\tau = 0$;当 $y = 0$ 时,即在中性轴上各点处,切应力达到最大值 τ_{max},将 $y = 0$ 代入式(d),得

$$\tau_{max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8 \times bh^3/12} = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{bh}$$

或

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{A} \tag{4-11}$$

式中,$A = bh$,为矩形截面的面积。

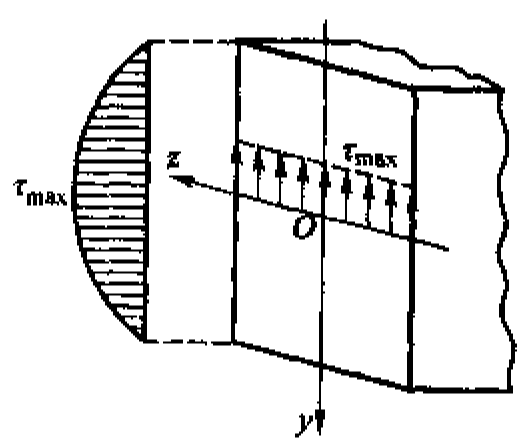


图 4-15

对于其他形状的对称截面,均可应用上面的推导方法,求得切应力的近似解。但对于侧边与对称轴不平行的截面(例如梯形截面),前面所作的假设就须

作相应的变动。此外,还应指出,对于矩形截面,在式(4-10)中截面宽度 b 为常数,而中性轴任一边的半个横截面面积对中性轴的静矩 S_z^* 为最大,所以中性轴上各点处的切应力为最大。对于其他形状的对称截面,横截面上的最大切应力通常也是出现在中性轴上的各点处,只有宽度在中性轴处显著增大的截面(如十字形截面),或某些变宽度的截面(如等腰三角形截面)等除外。因此,下面对于工字形、环形和圆形截面梁,主要讨论其中性轴上各点处的最大切应力 τ_{max}。

二、工字形截面梁

对于工字形截面梁,先研究其横截面腹板上任一点处的切应力 τ(见图4-16a)。由于腹板是狭长矩形,完全可以采用前述两假设。于是,可以从式(4-10)直接求得

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d} \tag{4-12}$$

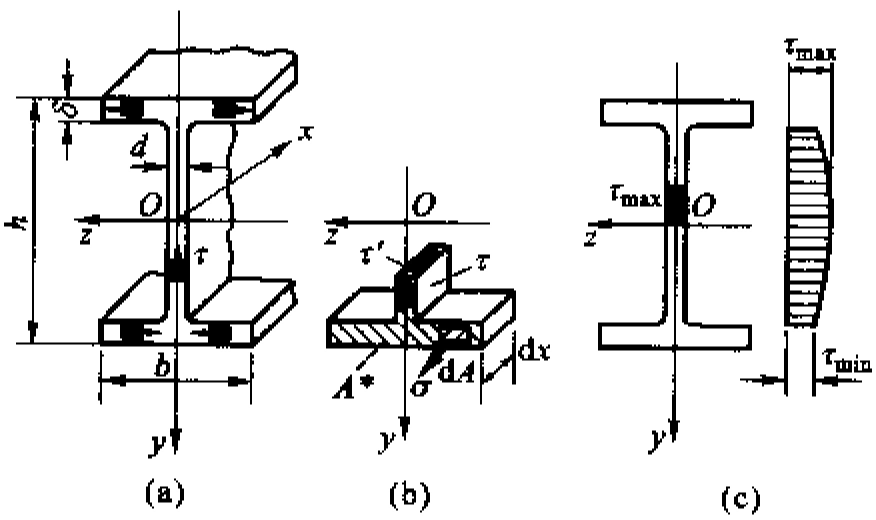


图 4-16

式中,d 为腹板厚度;S_z^* 为距中性轴为 y 的横线以外部分的横截面面积(图4-16b中阴影线面积)对中性轴的静矩。对 S_z^* 的计算结果给出,在腹板范围内,S_z^* 是 y 的二次函数,故腹板部分的切应力 τ 沿腹板高度同样是按二次抛物线规律变化的(图4-16c),其最大切应力也发生在中性轴上。显然,这也是整个横截面上的最大切应力 τ_{max},其值为

$$\tau_{max} = \frac{F_S S_{z,max}^*}{I_z d} \tag{4-13}$$

式中,$S_{z,max}^*$ 为中性轴任一边的半个横截面面积对中性轴的静矩。在具体计算 τ_{max} 时,对轧制工字钢截面,式(4-13)中的 $\frac{I_z}{S_{z,max}^*}$ 就是型钢规格表中给出的比值 I_z/S_z。

至于工字形截面翼缘上的切应力,由于翼缘的上、下表面上无切应力,而翼

缘又很薄，因此，翼缘上平行于 y 轴的切应力分量是次要的，主要是与翼缘长边平行的切应力分量(图 4-16a)。后者也可仿照在矩形截面中所用的方法来求得。但由于翼缘上的最大切应力小于腹板上的 τ_{max}，所以在一般情况下不必计算。

三、薄壁环形截面梁

图 4-17a 示一段薄壁环形截面梁。环壁厚度为 δ，环的平均半径为 r_0。由于 δ 与 r_0 相比很小，故可假设：(1) 横截面上切应力的大小沿壁厚无变化；(2) 切应力的方向与圆周相切，如图 4-17a 所示。由于假设(1)与矩形截面的假设相似，因此，通过类似的推导，可得横截面上任一点处切应力的计算式与式(4-10)相同的形式。从对称关系可知，横截面与 y 轴相交的各点处的切应力为零，而且 y 轴两侧各点处的切应力对称于 y 轴。因此，在求式(4-10)中的 S_z^* 时，可自 y 轴向一侧量取 φ 角，并以 φ 角所包的一段圆环作为部分面积。建议读者自行完成其推导。下面只讨论横截面上的 τ_{max}。

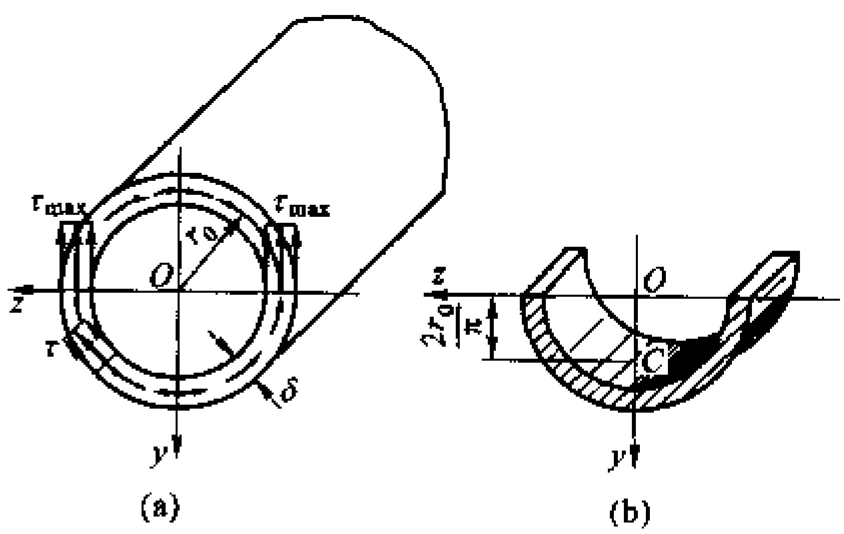


图 4-17

对于圆环形截面，其 τ_{max} 仍发生在中性轴上。而在求中性轴上的切应力时，式中的 b 应为 2δ，而 S_z^* 则为半个圆环(图 4-17b)的面积对中性轴的静矩，其值为

$$S_z^* = \pi r_0 \delta \times \frac{2r_0}{\pi} = 2r_0^2\delta$$

由附录 II 的表中查得环形截面的惯性矩为

$$I_z = \pi r_0^3 \delta$$

于是，得

$$\tau_{max} = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S \times 2r_0^2\delta}{\pi r_0^3 \delta \times 2\delta} = 2\frac{F_S}{A} \qquad (4-14)$$

式中，$A = \frac{\pi}{4}[(2r_0+\delta)^2 - (2r_0-\delta)^2] = 2\pi r_0\delta$，代表环形截面的面积。

上述对薄壁环形截面所作的两个假设,同样适用于其他形式具有纵向对称轴的薄壁截面。因此,也可以仿照上述方法来计算其横截面上的最大切应力。

四、圆截面梁

对于圆截面梁(图 4-18a),由切应力互等定理可知,在截面边缘上各点处

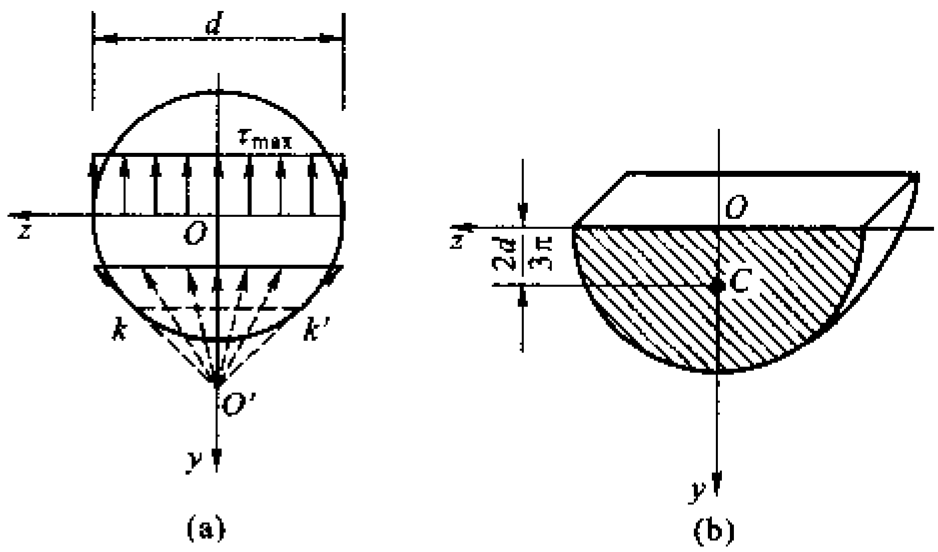


图 4-18

切应力 τ 的方向必与圆周相切,而在与对称轴 y 相交的各点处,由于剪力、截面图形和材料物性均对称于 y 轴,因此,其切应力必沿 y 方向。为此,可以假设:(1) 沿宽度 kk' 上各点处的切应力均汇交于 O' 点;(2) 各点处切应力沿 y 方向的分量沿宽度相等。根据上述假设,即可应用式(4-10)求出截面上距中性轴为同一高度 y 处切应力沿 y 方向的分量,然后按所在点处切应力方向与 y 轴间的夹角,求出该点处的切应力。圆截面的最大切应力 τ_{max} 仍在中性轴上各点处。由于在中性轴两端处切应力的方向均与圆周相切,且与外力所在平面平行,故中性轴上各点处的切应力方向均与外力所在平面平行,且中性轴上各点处切应力相等。于是,仿照推导矩形截面弯曲切应力公式的方法,得圆截面上的最大弯曲切应力为

$$\tau_{max} = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S d^3/12}{(\pi d^4/64)d} = \frac{4}{3}\frac{F_S}{A} \qquad (4-15)$$

式中,b 为圆截面的直径;I_z 为圆截面对中性轴的惯性矩;S_z^* 为半圆面积对中性轴的静矩,其值为

$$S_z^* = \frac{1}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{2d}{3\pi} = \frac{\pi d^3}{12}$$

而 A 为圆截面的面积。

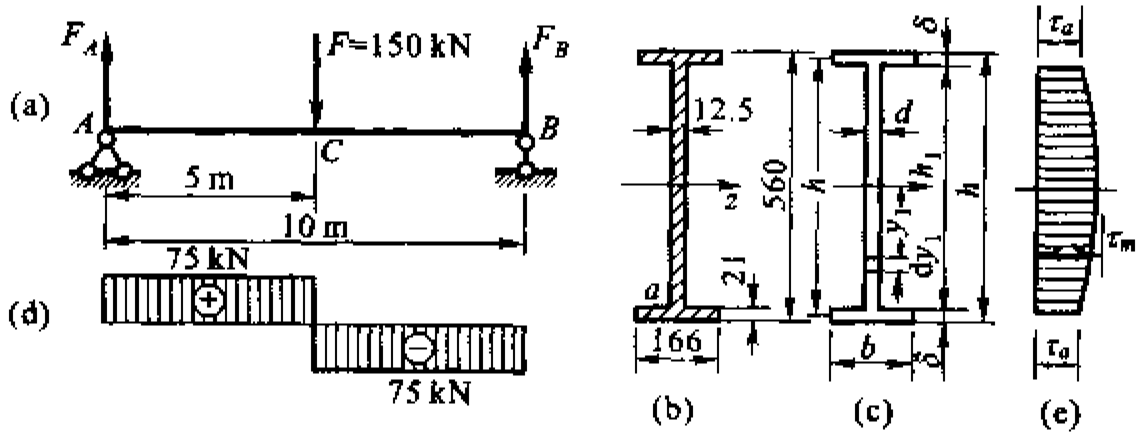
最后,讨论计算等直梁横截面上最大切应力的一般公式。对于**等直梁**,其最大切应力 τ_{max} 发生在最大剪力 $F_{S,max}$ 所在的横截面上,而且一般地说是位于该截面的中性轴上。由以上各种形状的横截面上的最大切应力计算公式可知,全梁

各横截面中最大切应力 τ_{max} 可统一表达为

$$\tau_{max} = \frac{F_{S,max} S_{z,max}^{*}}{I_z b} \qquad (4-16)$$

式中，$F_{S,max}$ 为全梁的最大剪力；$S_{z,max}^{*}$ 为横截面上中性轴一侧的面积对中性轴的静矩；b 为横截面在中性轴处的宽度；I_z 是整个横截面对中性轴的惯性矩。

例题 4－20 图 a,b 所示为例题 4－15 中的梁。试求梁的最大切应力 τ_{max} 和同一截面腹板部分在 a 点(图 b)处的切应力 τ_a，并分析切应力沿腹板高度的变化规律。



例题 4－20 图

解：作梁的剪力图，如图 d 所示。由图可知，最大剪力为

$$F_{S,max} = 75 \text{ kN}$$

利用型钢规格表，查得 56a 号工字钢截面的 $\dfrac{I_z}{S_{z,max}^{*}} = 47.73$ cm。

将 $F_{S,max}$，$\dfrac{I_z}{S_{z,max}^{*}}$ 的值和 $d = 12.5$ mm(图 b)代入式(4－13)，得

$$\tau_{max} = \frac{F_{S,max} S_{z,max}^{*}}{I_z d} = \frac{F_{S,max}}{\left(\dfrac{I_z}{S_{z,max}^{*}}\right) d}$$

$$= \frac{75 \times 10^3 \text{ N}}{(47.73 \times 10^{-2} \text{ m})(12.5 \times 10^{-3} \text{ m})} = 12.6 \text{ MPa}$$

为计算 τ_a，先求下翼缘截面面积对中性轴的静矩 S_{za}^{*}。根据图 b 所示尺寸，可得

$$S_{za}^{*} = 166 \text{ mm} \times 21 \text{ mm} \times \left(\frac{560 \text{ mm}}{2} - \frac{21 \text{ mm}}{2}\right) = 940 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

由式(4－12)及已知值，得

$$\tau_a = \frac{F_{S,max} S_{za}^{*}}{I_z d} = \frac{(75 \times 10^3 \text{ N})(940 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(65\,586 \times 10^{-8} \text{ m}^4)(12.5 \times 10^{-3} \text{ m})}$$

$$= 8.6 \times 10^6 \text{ Pa} = 8.6 \text{ MPa}$$

至于切应力 τ 沿腹板高度的变化规律，因腹板壁厚 d 为常量，故与 S_z^* 的变化规律相同。现写出 S_z^* 的展开式，并取 $d \cdot dy_1$（图 c）为腹板部分的面积元素 dA，从而有

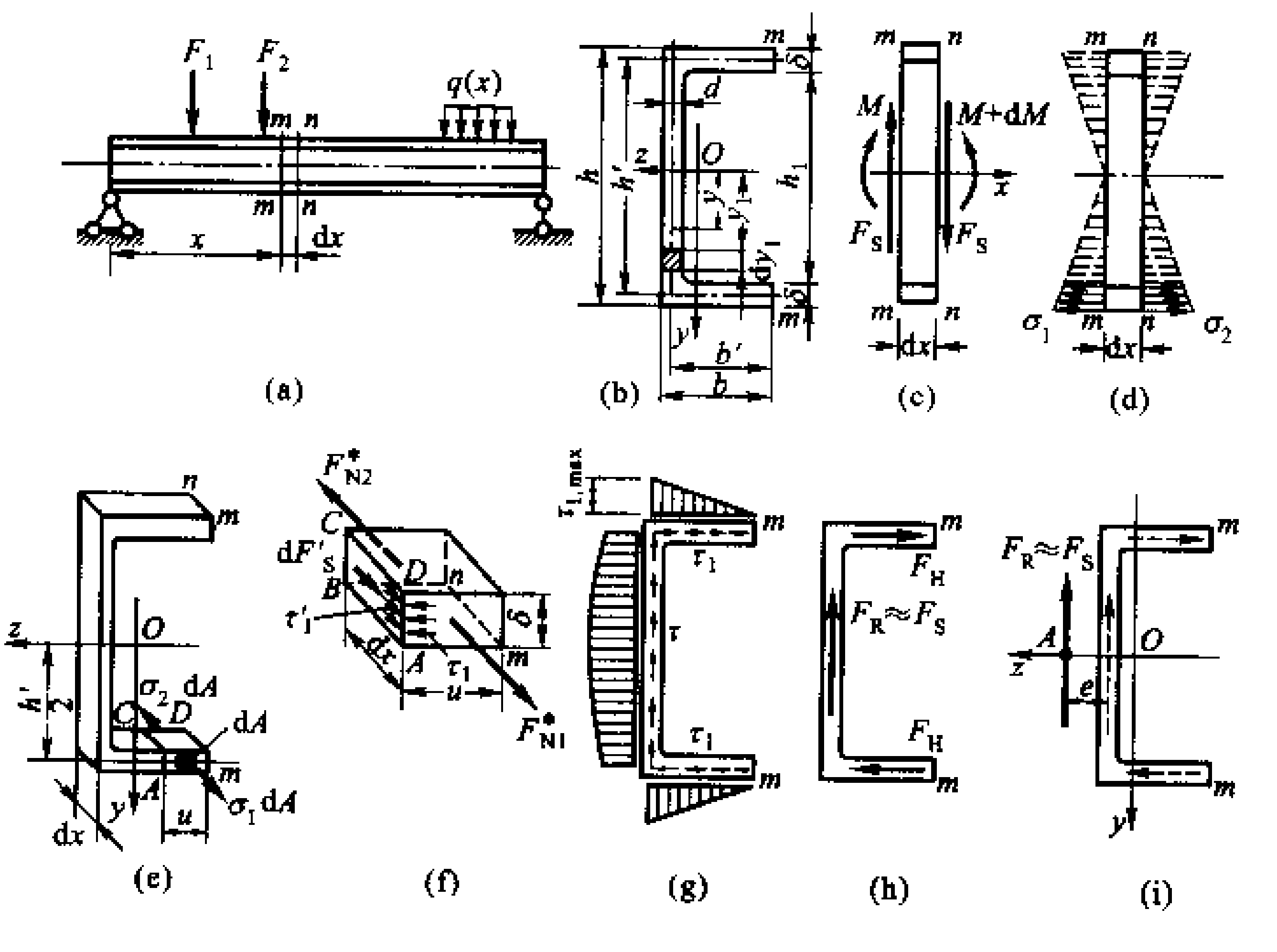
$$S_z^* = \frac{b\delta h'}{2} + \int_y^{h_1/2} y_1 \cdot d \cdot dy_1 = \frac{b\delta h'}{2} + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)$$

代入式(4-12)，得

$$\tau = \frac{F_S}{I_z d}\left[\frac{b\delta h'}{2} + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)\right]$$

上式表明，τ 沿腹板高度是按二次抛物线规律变化的(图 e)。

例题 4-21 一槽钢制成的梁承受方向平行于腹板的横向荷载作用(图 a)。槽钢截面简化后的尺寸见图 b。试分析梁横截面之腹板和翼缘上切应力 τ, τ_1 的变化规律，并确定横截面上剪力作用线的位置。



例题 4-21 图

解：先分析梁横截面腹板部分切应力 τ 的变化规律。槽形截面梁腹板上的切应力可按工字形截面梁腹板上的切应力公式(4-12)计算：

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d} \tag{1}$$

根据图 b 所示尺寸，写出静矩 S_z^* 的表达式，代入上式，即得

$$\tau = \frac{F_S}{I_z d}\left[\frac{b\delta h'}{2} + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)\right] \tag{2}$$

可见，沿腹板高度 τ 也是按二次抛物线规律变化的（图 g）。

再分析梁横截面翼缘部分的切应力 τ_1。由于这部分横截面也是狭长矩形，故可采用切应力沿壁厚度不变及其方向平行于翼缘长边的假设，应用类似矩形截面上切应力的分析方法，取长为 dx 的一段梁（图 a,c,d），并沿翼缘厚度用纵向截面 AC（图 e）截出一体积元素 Cm（图 f）。在 Cm 的两个截面 Dm 和 Cn 上分别作用有由法向内力元素 $\sigma_1 \mathrm{d}A$ 和 $\sigma_2 \mathrm{d}A$ 组成的拉力 F_{N1}^*，F_{N2}^*（图 e,f）。由于翼缘很薄，故可认为 σ_1，σ_2 沿翼缘厚度不变，且其值与翼缘中线上的正应力相同。于是，分别得①

$$\sigma_1 = \frac{Mh'/2}{I_z} \tag{3}$$

和

$$\sigma_2 = \frac{(M + \mathrm{d}M)h'/2}{I_z} \tag{4}$$

由此可得

$$F_{N1}^* = \int_{A^*} \sigma_1 \mathrm{d}A = \sigma_1 \int_{A^*} \mathrm{d}A = \sigma_1 A^* = \frac{Mh'}{2I_z}\delta u \tag{5}$$

和

$$F_{N2}^* = \frac{M + \mathrm{d}M}{2I_z} h'\delta u \tag{6}$$

式中，$A^* = \delta u$ 中的 u 为从翼缘外端到所取纵截面 AC 间的长度（图 e,f）。

与本节中的式(c)相类似，在这里的纵截面 AC 上，切向内力元素 $\mathrm{d}F'_S$（图 f）与切应力 τ'_1 的关系为

$$\mathrm{d}F'_S = \tau'_1 \delta \mathrm{d}x \tag{7}$$

将(5)，(6)和(7)各式中的 F_{N1}^*，F_{N2}^* 和 $\mathrm{d}F'_S$ 代入平衡方程 $\sum F_x = 0$，并引进 M 与 F_S 间的微分关系 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_S$，经过整理，即得

$$\tau'_1 = \frac{F_S h' u}{2I_z} \tag{8}$$

由切应力互等定理可知，$\tau_1 = \tau'_1$，故得横截面上的 τ_1（图 g）为

① 本题中槽钢截面上的弯曲正应力，应用了对称弯曲时的正应力公式(4－5)，因在平行于腹板的横向荷载作用下，梁的变形与对称弯曲时相同，均为平面弯曲，详见《材料力学(II)》§1－1 中的讨论。

$$\tau_1 = \frac{F_S h' u}{2I_z} \tag{9}$$

式中，F_S 为横截面上的剪力；I_z 为整个横截面对其中性轴的惯性矩；h' 为截面两翼缘中线间的距离，可由槽钢的 h，δ 算得；u 为从翼缘外端到要求切应力 τ_1 之点间的长度；τ_1 的指向如图 g 中所示。

由式(9)可见，τ_1 沿翼缘长度是按线性规律变化的(图 g)。将 $u=b'$ 代入该式，即得翼缘上最大切应力为

$$\tau_{1,\max} = \frac{F_S h' b'}{2I_z} \tag{10}$$

发生在横截面翼缘与腹板的中线相接处。

为确定横截面上剪力作用线的位置，须求出由切向内力元素 $\tau \mathrm{d}A$ 和 $\tau_1 \mathrm{d}A$ 分别组成的合力 F_R 和 F_H(图 h)。为此，先求 F_R，从式(2)可得

$$F_R = \int_{A'} \tau \mathrm{d}A = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau d \mathrm{d}y = \frac{F_S}{I_z}\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\left[\frac{b\delta h'}{2} + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)\right]\mathrm{d}y \tag{11}$$

式中，A' 为横截面腹板部分的面积；$\mathrm{d}A = d\cdot\mathrm{d}y$ 为横截面腹板部分的面积元素。对式(11)中积分运算的结果表明，其值与式中的 I_z 的算式非常接近，故

$$F_R \approx F_S \tag{12}$$

如图 h 中所示。式(12)表明，梁的横截面上的剪力 F_S 几乎全部是由横截面腹板部分上的切向内力元素 $\tau \mathrm{d}A$ 所组成。附带指出，对于工字形截面也有相同的情况。

再求横截面翼缘部分上切向内力元素 $\tau_1 \mathrm{d}A$ 所组成的合力 F_H。由于切应力 τ_1 沿翼缘长度是按线性规律变化的，故 F_H 为

$$F_H = \frac{1}{2}(\tau_{1,\max}\delta b') = \frac{F_S h' b'}{4I_z}(\delta b') = \frac{F_S b'^2 h' \delta}{4I_z} \tag{13}$$

横截面每个翼缘部分上 $\tau_1 \mathrm{d}A$ 所组成的合力均为 F_H，其指向如图 h 中所示。

由以上分析可知，横截面上的剪力共有三部分，即一个 F_R 和两个 F_H。其合力的作用线位置即为梁横截面上剪力的作用线位置。由力系合成原理可知，上述合力的大小和方向均与 F_R 相同，但其作用线则与 F_R 相隔一段距离 e(图 i)，并且 $F_R e = F_H h'$。于是，由式(12)，(13)可得

$$e = \frac{F_H h'}{F_R} = \frac{h'}{F_S}\left(\frac{F_S b'^2 h' \delta}{4I_z}\right) = \frac{b'^2 h'^2 \delta}{4I_z} \tag{14}$$

由此即确定了横截面上剪力 F_S 的作用线位置。

II. 梁的切应力强度条件

对于横力弯曲下的等直梁，其横截面上一般既有弯矩又有剪力。梁除保证正应力强度外，还需满足切应力强度要求。

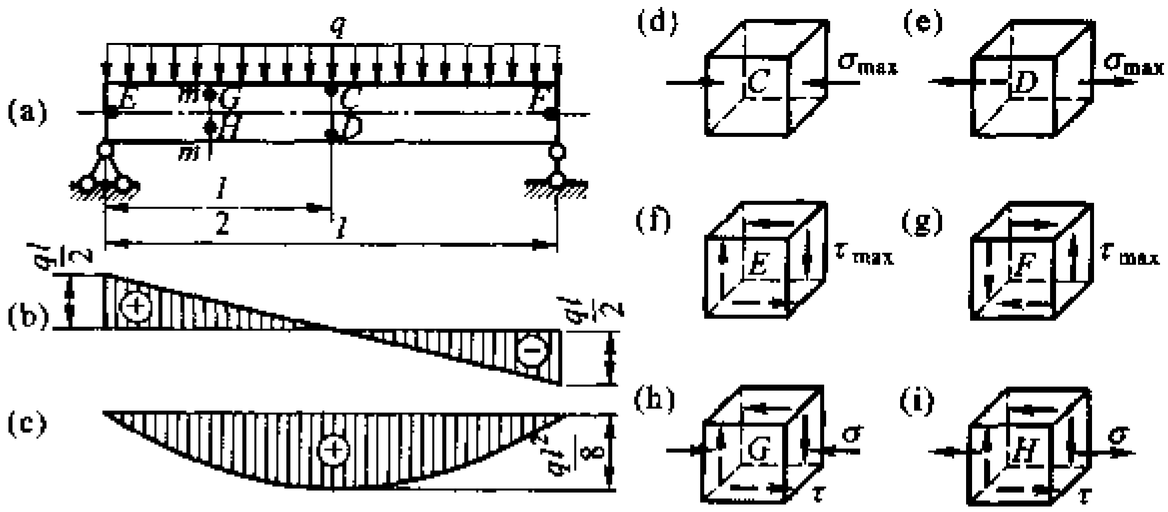


图 4-19

等直梁的最大切应力一般是在最大剪力所在横截面的中性轴上各点处，这些点处的正应力 $\sigma=0$，在略去纵截面上的挤压应力后，最大切应力所在点处于纯剪切应力状态。例如对全梁承受均布荷载的矩形截面简支梁（图 4-19a），在最大弯矩截面上，距中性轴最远的 C 和 D 点处于单轴应力状态（图 4-19d，e）；而在最大剪力截面上，中性轴上的 E 和 F 点处于纯剪切应力状态（图 4-19f，g）。于是，可按纯剪切应力状态下的强度条件公式

$$\tau_{\max}\leqslant[\tau]$$

建立梁的切应力强度条件。将弯曲最大切应力的表达式(4-16)代入上式，即得

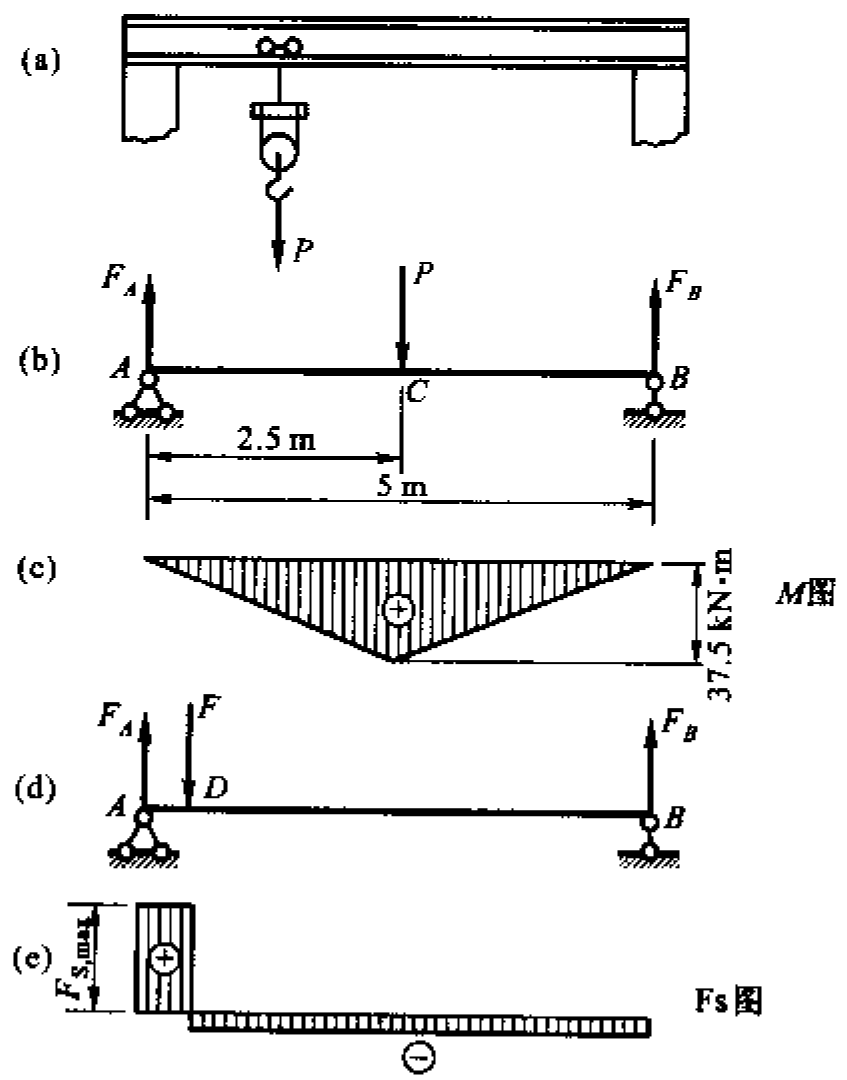
$$\frac{F_{S,\max}S^{*}_{z,\max}}{I_z b}\leqslant[\tau] \tag{4-17}$$

式中，$[\tau]$为材料在横力弯曲时的许用切应力，其值在有关设计规范中有具体规定。

在选择梁的截面时，必须同时满足正应力和切应力强度条件。通常是先按正应力选出截面，再按切应力进行强度校核。梁的强度大多由正应力控制，按正应力强度条件选好截面后，一般并不需要再按切应力进行强度校核。但在以下几种特殊条件下，需校核梁的切应力：(1) 梁的最大弯矩较小，而最大剪力却很大；(2) 在焊接或铆接的组合截面（例如工字形）钢梁中，当其横截面腹板部分的厚度与梁高之比小于型钢截面的相应比值；(3) 由于木材在其顺纹方向的剪切强度较差，木梁在横力弯曲时可能因中性层上的切应力过大而使梁沿中性层发生剪切破坏。

如前所述，按正应力强度条件进行梁的强度计算时，最大弯矩所在横截面上距中性轴最远的危险点处于单轴应力状态。而按切应力强度条件进行强度校核时，最大剪力所在横截面的中性轴上的危险点处于纯剪切应力状态。因此，可分别按正应力和切应力建立强度条件，进行强度计算。但是，在梁横截面上的其他各点处既有正应力，又有切应力，例如从图 4-19 所示梁的截面 $m-m$ 上 G 和 H 点处取出的单元体(图 4-19h,i)。应该注意，这时不能分别按正应力和切应力的强度条件进行强度校核，而必须同时考虑正应力和切应力对强度的影响。对于这些点的强度校核，将在第七章中讨论。

例题 4-22 一简易起重设备如图 a 所示。起重量(包含电葫芦自重)$P=30\ \mathrm{kN}$，跨长 $l=5\ \mathrm{m}$。吊车大梁 AB 由 20a 号工字钢制成，其许用弯曲正应力 $[\sigma]=170\ \mathrm{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=100\ \mathrm{MPa}$。试校核梁的强度。



例题 4-22 图

解：吊车梁可简化为简支梁(图 b)。由于荷载是移动的，须确定荷载的最不利位置。在计算最大正应力时，应取荷载 P 在梁的跨中 C 处(图 b)。在计算最大切应力时，应取荷载在紧靠任一支座例如支座 A 处(图 d)。

校核正应力强度。在荷载处于最不利位置时，梁的弯矩图如图 c，最大弯矩值为

$$M_{max} = 37.5\ kN\cdot m$$

由型钢规格表查得 20a 号工字钢的 W_z 为

$$W_z = 237\ cm^3$$

由式(4-7b)可得梁的最大正应力，并校核正应力强度：

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{37.5\times 10^3\ N\cdot m}{237\times 10^{-6}\ m^3} = 158\times 10^6\ Pa = 158\ MPa < [\sigma]$$

校核切应力强度时的最不利荷载位置如图 d 所示，相应的剪力图如图 e。因为荷载 P 很靠近支座 A(图 d)，所以，支反力 F_A 约等于 P，而

$$F_{S,max} = F_A \approx P = 30\ kN$$

对于 20a 号工字钢，利用型钢规格表查得

$$\frac{I_z}{S^*_{z,max}} = 17.2\ cm$$

和

$$d = 7\ mm$$

由式(4-13)得出梁的最大切应力，并校核切应力强度：

$$\tau_{max} = \frac{F_{S,max}}{\left(\frac{I_z}{S^*_{z,max}}\right)d} = \frac{30\times 10^3\ N}{(17.2\times 10^{-2}\ m)(7\times 10^{-3}\ m)}$$

$$= 24.9\times 10^6\ Pa = 24.9\ MPa < [\tau]$$

梁的正应力和切应力强度条件均能满足，所以梁是安全的。

§4-6 梁的合理设计

按强度要求设计梁时，主要是依据梁的正应力强度条件

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leqslant [\sigma] \tag{a}$$

由上式可见，降低最大弯矩、提高弯曲截面系数，或局部加强弯矩较大的梁段，都能降低梁的最大正应力，从而提高梁的承载能力，使梁的设计更为合理。现将工程中经常采用的几种措施分述如下。

一、合理配置梁的荷载和支座

合理地配置梁的荷载，可降低梁的最大弯矩值。例如，简支梁在跨中承受集中荷载 F 时(图 4-20a)，梁的最大弯矩为 $M_{max}=\frac{Fl}{4}$。若使集中荷载 F 通过辅梁再作用到梁上(图 4-20b)，则梁的最大弯矩就下降为 $M_{max}=\frac{Fl}{8}$。

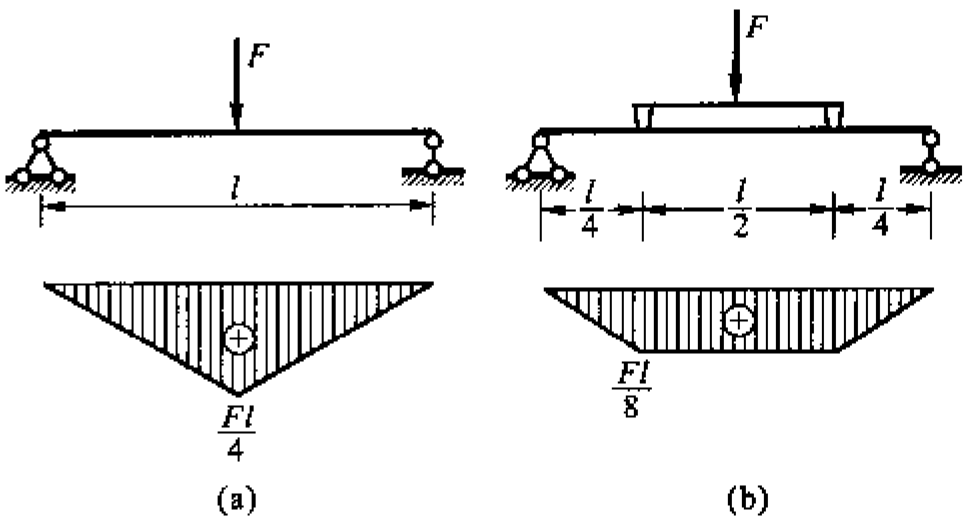


图 4－20

同理，合理地设置支座位置，也可降低梁内的最大弯矩值。如例题 4－16 中，若将承受均布荷载的简支梁两端的支座分别向跨中移动 $a=0.207l$，则梁内的最大弯矩值，就由简支梁的 $M_{max}=\frac{ql^2}{8}=0.125ql^2$ 下降为 $M_{max}=0.0215ql^2$，仅为原简支梁最大弯矩值的 17.2%。图 4－21 所示门式起重机的立柱位置就考虑了降低由梁荷载和自重所产生的最大弯矩。

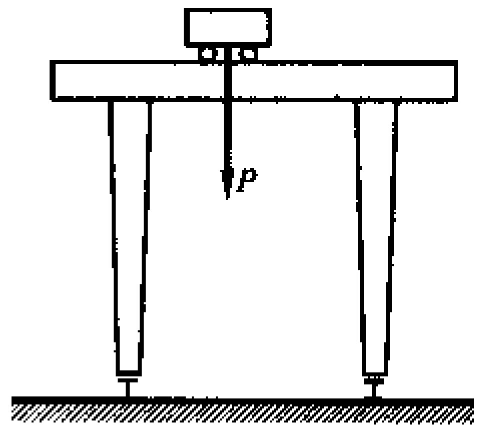


图 4－21

二、合理选取截面形状

当弯矩确定时，横截面上的最大正应力与弯曲截面系数成反比。因此，应尽可能增大横截面的弯曲截面系数 W 与其面积 A 之比值。由于在一般截面中，W 与其高度的平方成正比，所以，尽可能使横截面面积分布在距中性轴较远的地方，以满足上述要求。

在梁横截面上距中性轴最远的各点处，分别有最大拉应力和最大压应力。为充分发挥材料的潜力，应使两者同时达到材料的许用应力。对于由拉伸和压缩许用应力值相等的建筑钢等塑性材料制成的梁，其横截面应以中性轴为其对称轴。例如，工字形、矩形、圆形和环形截面等。而这些截面的合理程度并不相同。例如环形比圆形合理；矩形截面立放比扁放合理；而工字形又比立放的矩形更为合理。对于由压缩强度远高于拉伸强度的铸铁等脆性材料制成的梁，宜采用 T 形等对中性轴不对称的截面，并将其翼缘部分置于受拉侧（参见例题 4－18）。对于用木材制成的梁，虽然材料的拉、压强度不等，但根据制造工艺的要求仍多采用矩形截面。若从圆木中锯出矩形截面的木梁，则为使所得矩形截面木梁的弯曲截面系数 W_z 为最大，其高宽比有一定的要求，参见习题 4－38。总

之，在选择梁截面的合理形状时，应综合考虑横截面上的应力情况、材料的力学性能、梁的使用条件以及制造工艺。

三、合理设计梁的外形

在式(a)所示的正应力强度条件中，最大正应力发生在弯矩为最大的横截面上距中性轴最远的各点处。也就是说，当最大弯矩截面上的最大正应力达到材料的许用应力时，其余各横截面上的最大正应力都还小于材料的许用应力。因此，为节约材料并减轻自重，有时还为降低梁的刚度，将梁设计成变截面的。例如，可在弯矩较大的部分进行局部加强。若使梁各横截面上的最大正应力都相等，并均达到材料的许用应力，通常称为**等强度梁**。例如，宽度不变而高度变化的矩形截面简支梁(图 4－22a)若设计成等强度梁，则其高度随截面位置的变化规律 $h(x)$，可按正应力强度条件

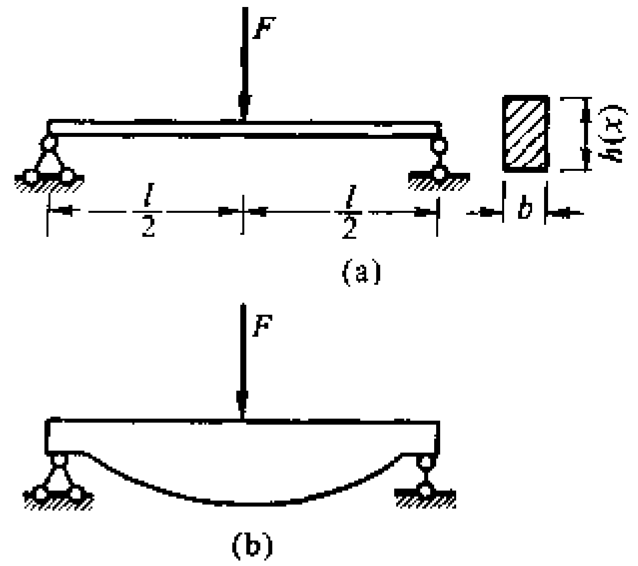


图 4－22

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{(F/2)x}{bh^2(x)/6} \leqslant [\sigma]$$

求得为

$$h(x) = \sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}} \tag{b}$$

但在靠近支座处，应按切应力强度条件确定截面的最小高度为

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{F_S}{A} = \frac{3}{2}\cdot\frac{F/2}{bh_{\min}} = [\tau]$$

$$h_{\min} = \frac{3F}{4b[\tau]} \tag{c}$$

按式(b)和(c)确定的梁的外形，也就是厂房建筑中常用的鱼腹梁(图 4－22b)。

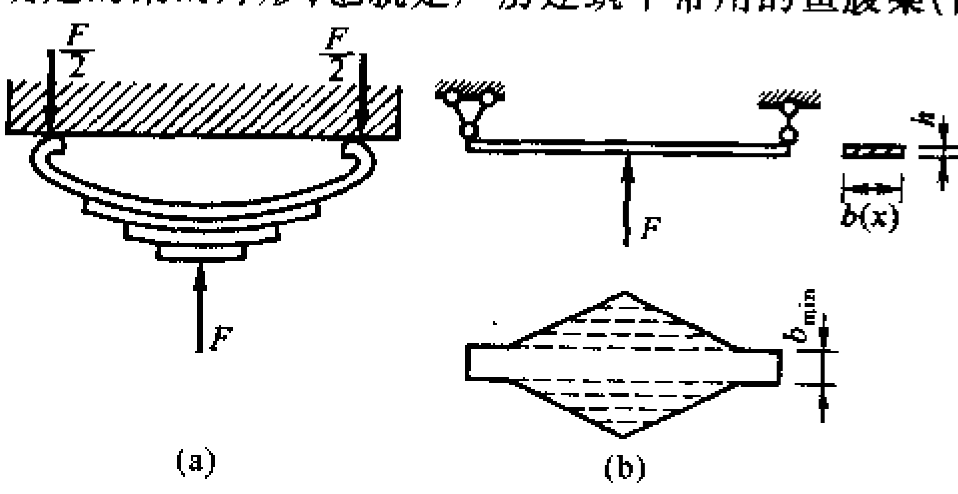


图 4－23

另外，支承载重汽车及铁路列车车厢，且起减振作用的叠板弹簧(图 4-23a)，实质上是高度不变、宽度变化的矩形截面简支梁(图 4-23b)沿宽度切割下来，然后叠合并给以预曲率而制成的等强度梁，截面的最小宽度也应按切应力强度条件来确定。

思 考 题

4-1 写 F_S、M 方程时，在何处需要分段？

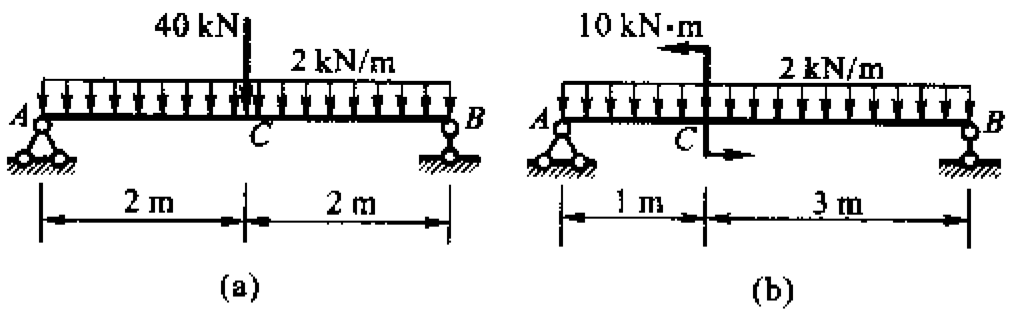
4-2 在求梁横截面上的内力时，可直接由该横截面任一侧梁上的外力来计算，为什么？

4-3 弯矩、剪力和荷载集度三函数间的关系式，即式(4-1)和(4-2)的应用条件是什么？在集中力和集中力偶作用处此关系能否适用？

4-4 在图 4-9a 所示梁中，若将坐标 x 的原点取在梁的右端，且 x 坐标以指向左为正，试问(4-1)和(4-2)两关系式有无变化？

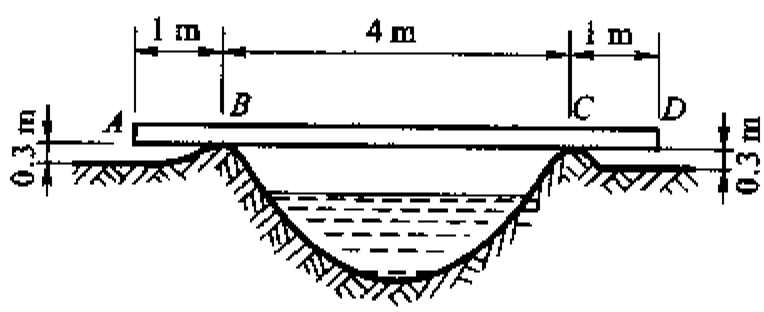
4-5 (1) 图 a 所示梁中，AC 段和 CB 段剪力图图线的斜率是否相同？为什么？

(2) 图 b 所示梁在集中力偶作用处，左、右两段弯矩图图线的切线斜率是否相同？



思考题 4-5 图

4-6 有体重均为 800 N 的两人，需借助跳板从沟的左端到右端。已知该跳板的许可弯矩$[M]=600$ N·m。若跳板重量略去不计，试问两人采用什么办法可安全过沟？



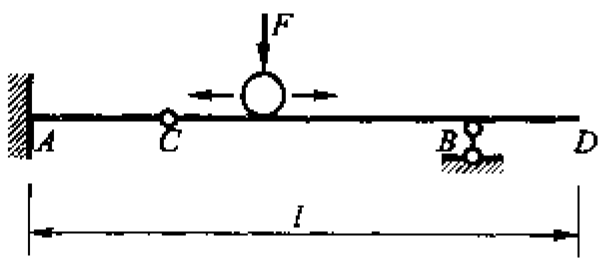
思考题 4-6 图

4-7 矩形截面组合梁上有一活动荷载 F 可沿全梁 l 移动，如图所示。试问如何布置中间铰 C 和可动铰支座 B，才能充分利用材料的强度？

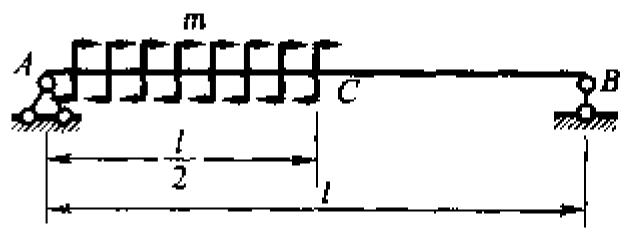
4-8 简支梁的半跨长度上承受集度为 m 的均布外力偶作用，如图所示。试作梁的 F_S，M 图。

4-9 推导对称弯曲正应力公式时作了哪些假设？在什么条件下这些假设才是正确的？

4-10 下列的一些概念：纯弯曲与横力弯曲；中性轴与形心轴；轴惯性矩与极惯性矩；弯曲刚度与弯曲截面系数等有何区别？



思考题 4－7 图

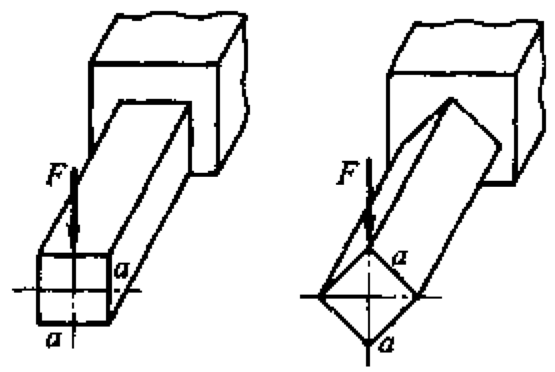


思考题 4－8 图

4－11 直梁弯曲时为何中性轴必定通过截面的形心？

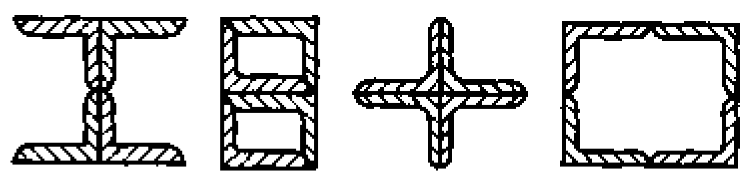
4－12 同一梁按图 a 及图 b 两种方式放置。试问两梁的最大弯曲正应力是否相同？

4－13 由四根 100 mm×80 mm×10 mm 不等边角钢焊成一体的梁，在纯弯曲条件下按图示四种形式组合，试问哪一种强度最高？哪一种强度最低？



(a) (b)

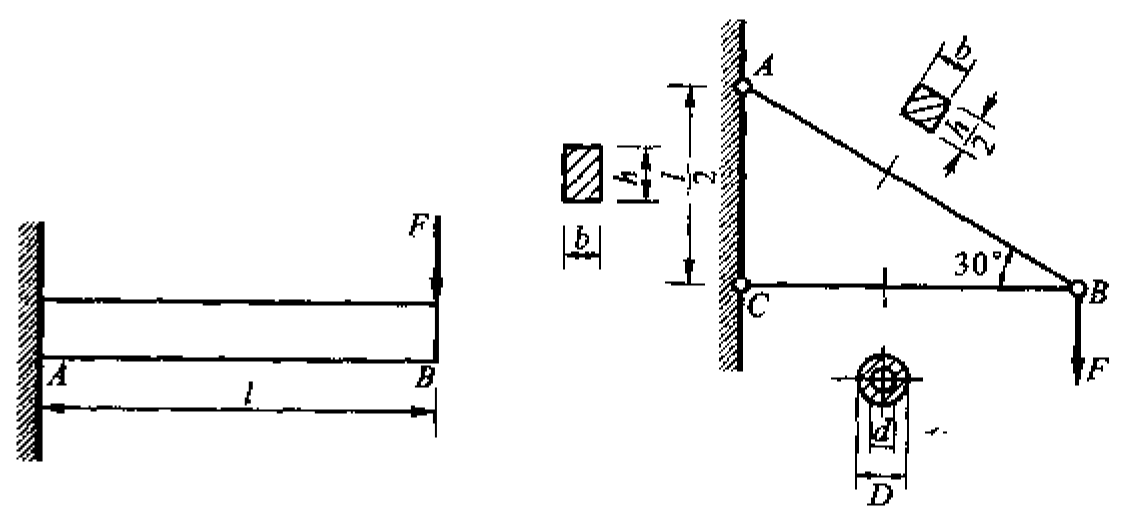
思考题 4－12 图



(a) (b) (c) (d)

思考题 4－13 图

4－14 图 a 和图 b 所示的钢梁和三角架材料相同，三角架两杆的横截面面积之和与钢梁的横截面面积相等。已知 $l=10h$，$h=1.5b$，$D=1.22b$，$d=0.6D$。试问哪个的承载能力大？为什么？



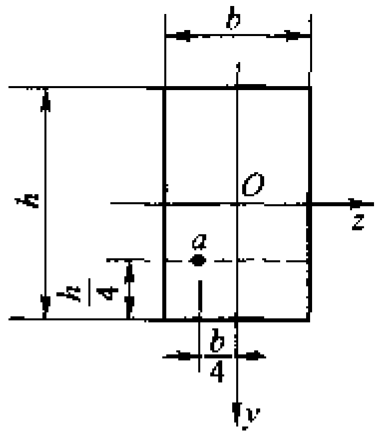
(a) (b)

思考题 4－14 图

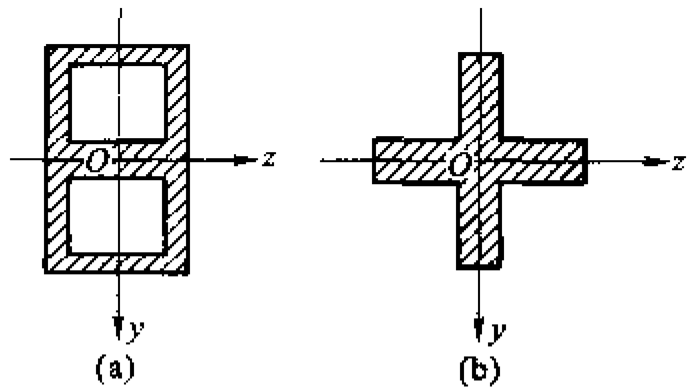
4－15 在计算图示矩形截面梁 a 点处的弯曲切应力时，其中的静矩 S_z^* 若取 a 点以上或 a 点以下部分的面积来计算，试问结果是否相同？为什么？

4－16 为什么等直梁的最大切应力一般都是在最大剪力所在横截面的中性轴上各点处，而横截面的上、下边缘各点处的切应力为零？对于图示的两个截面而言，其最大切应力是

否也位于中性轴上各点处？为什么？



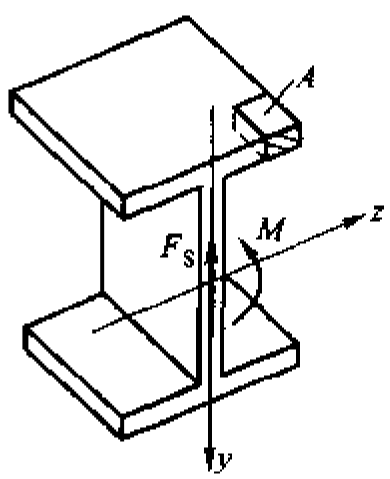
思考题 4－15 图



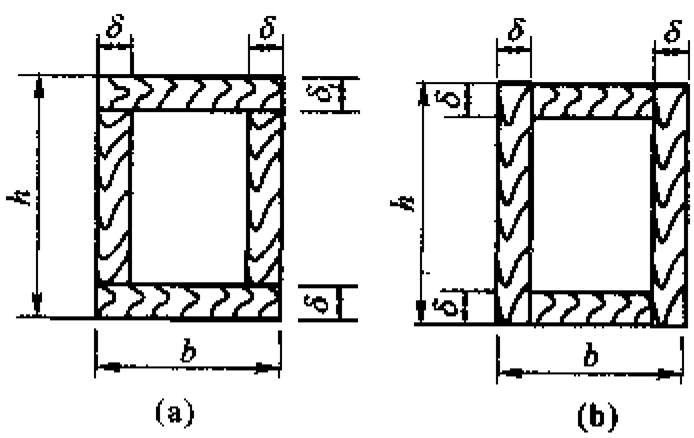
思考题 4－16 图

4－17　已知工字形薄壁截面梁在某截面上的剪力和弯矩如图所示。试画出微体 A 上的内力图。

4－18　跨度为 l 的悬臂梁在自由端受集中力 F 作用。该梁的横截面由四块木板胶合而成。若按图 a，b 两种方式胶合，试问两者的强度是否相同？已知胶合缝的许用切应力为 $[\tau_{胶}]$，许用顺纹切应力为 $[\tau]$，许用弯曲正应力为 $[\sigma]$。



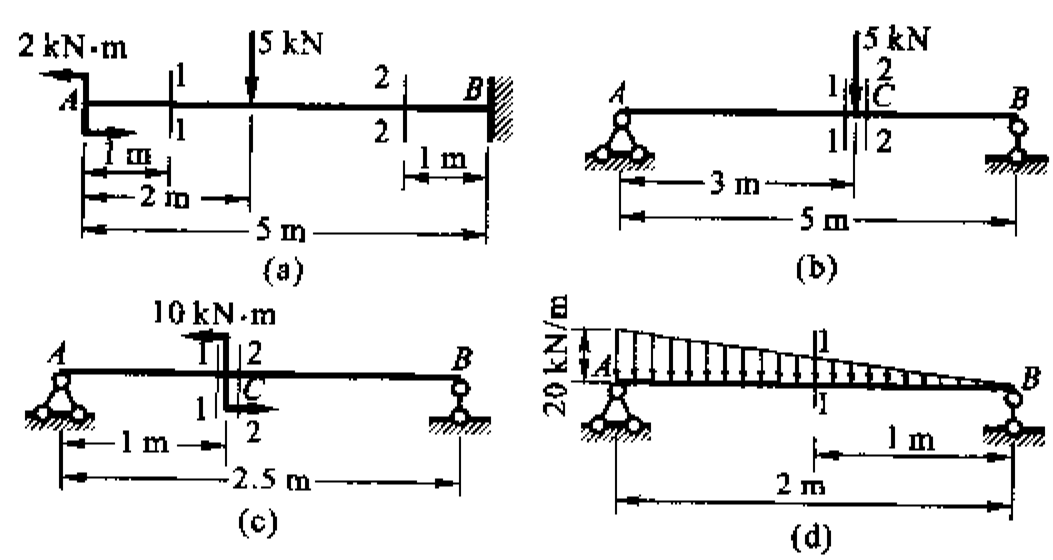
思考题 4－17 图

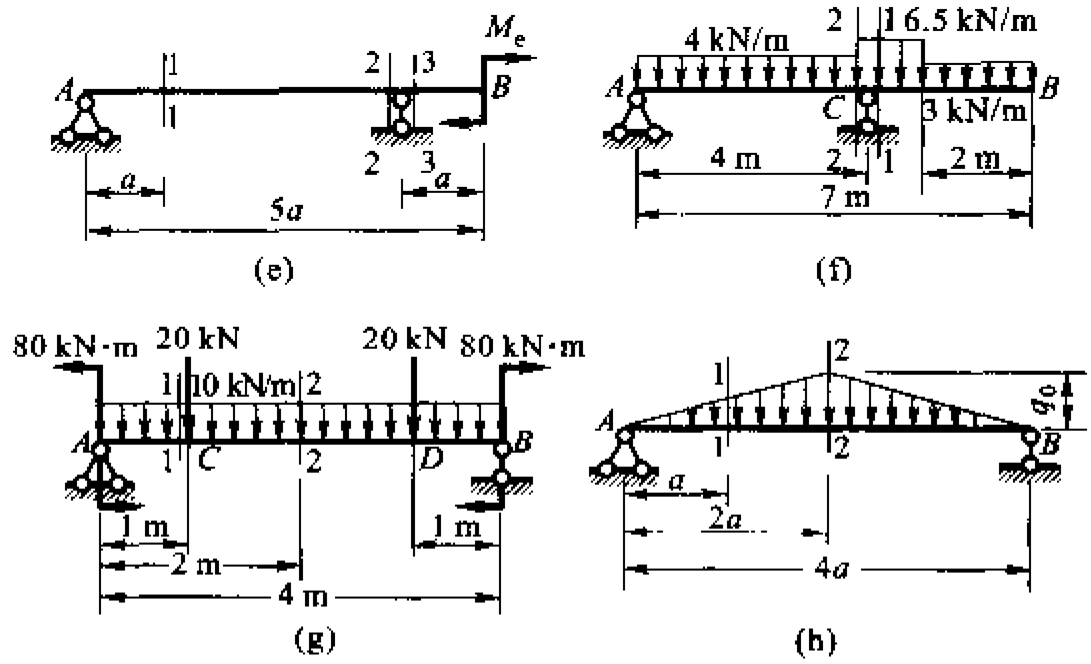


思考题 4－18 图

习　题

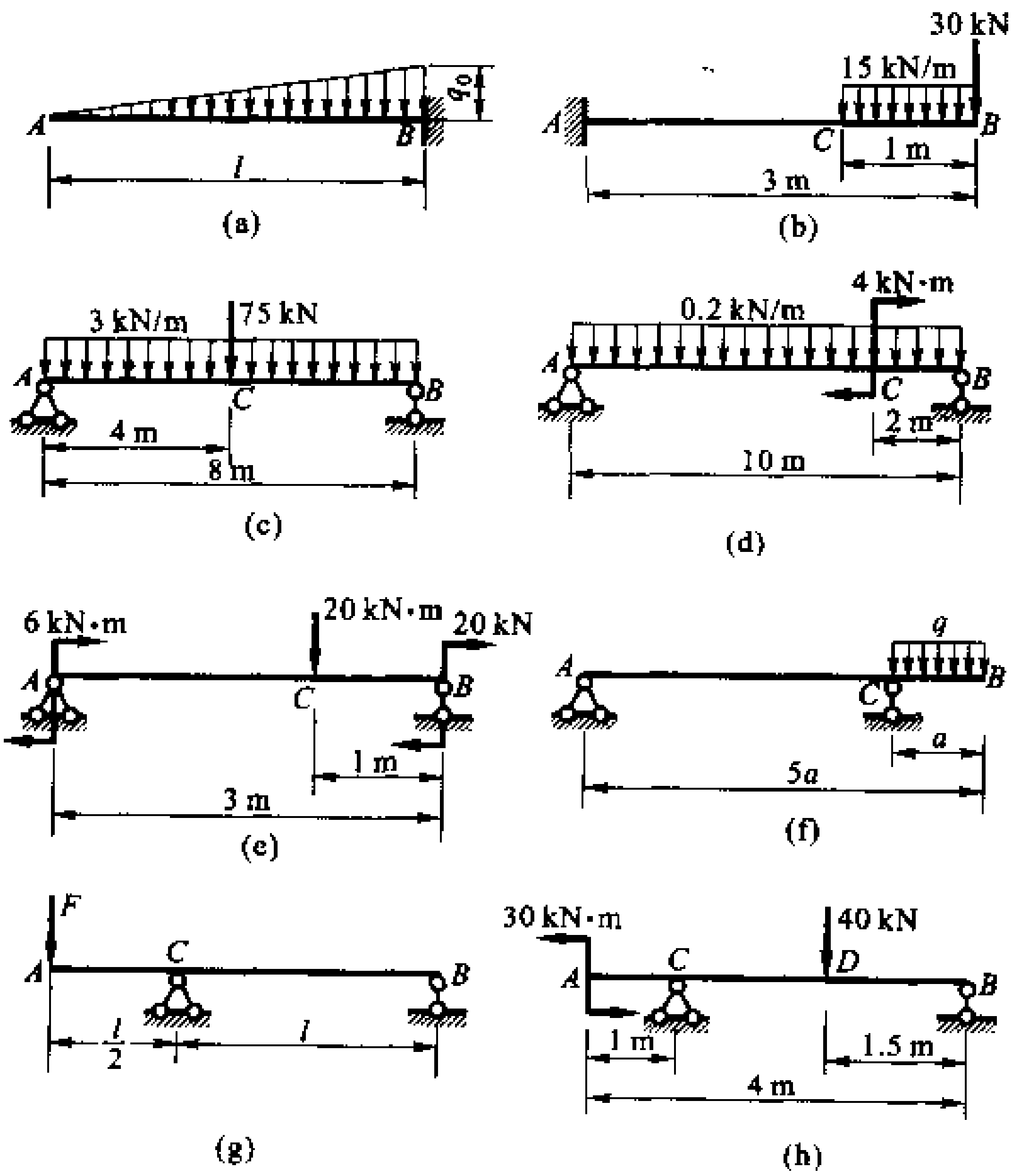
4－1　试求图示各梁中指定截面上的剪力和弯矩。





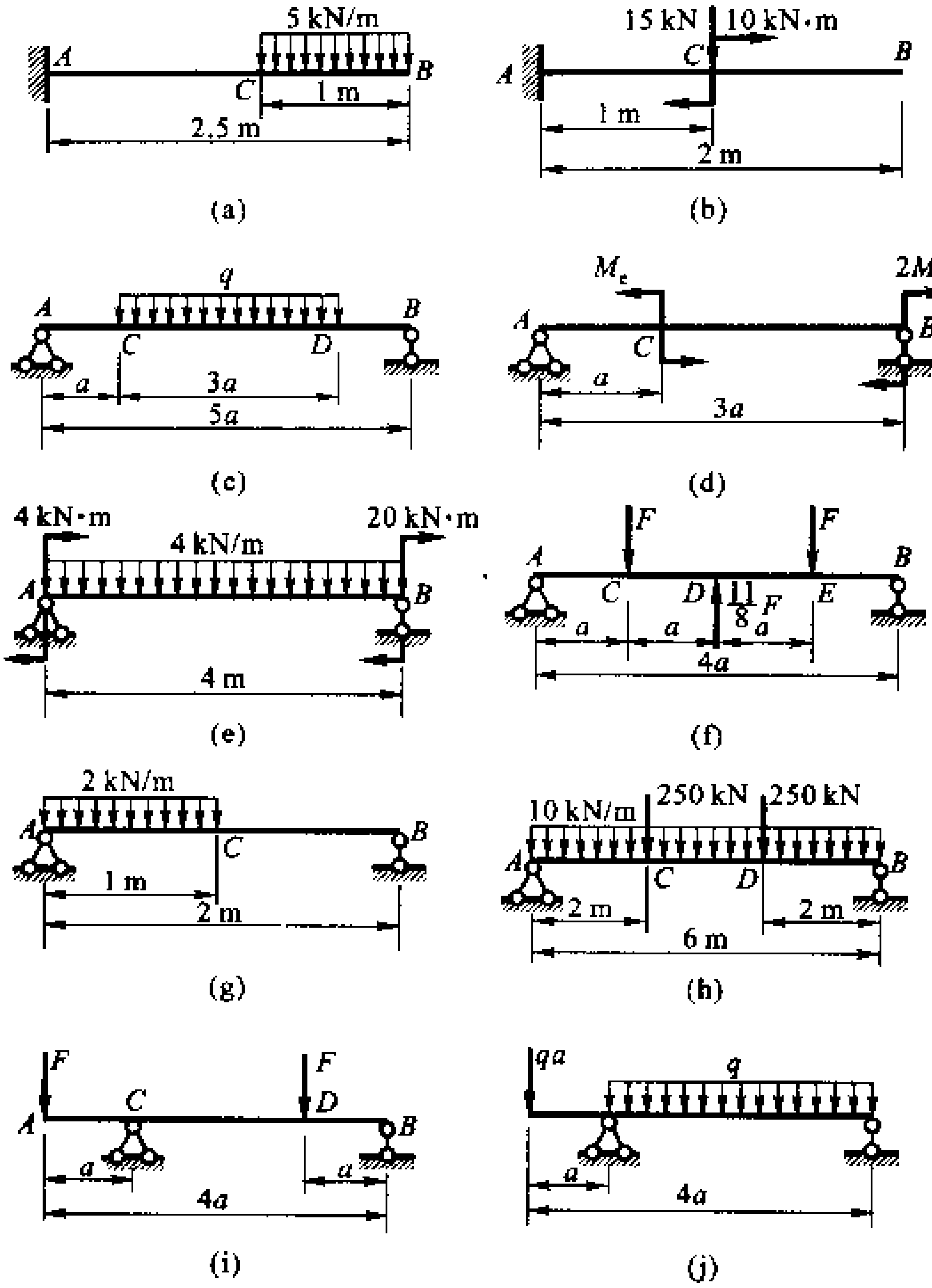
习题 4－1 图

4－2 试写出下列各梁的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图和弯矩图。



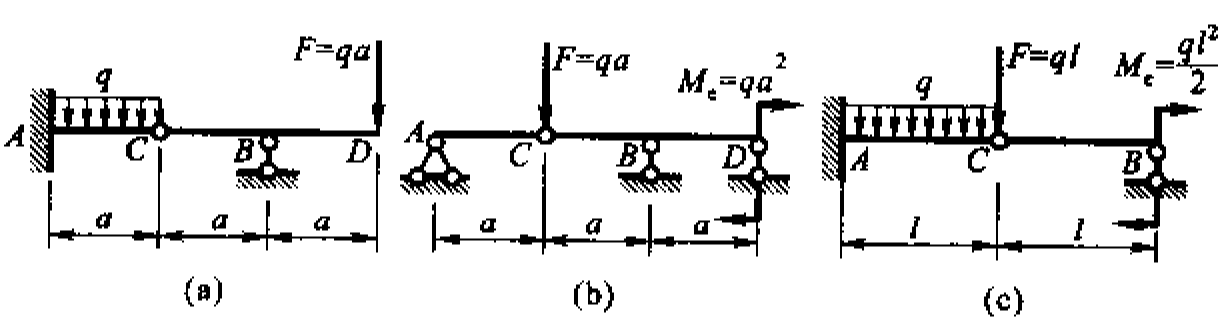
习题 4－2 图

4－3　试利用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系作下列各梁的剪力图和弯矩图。



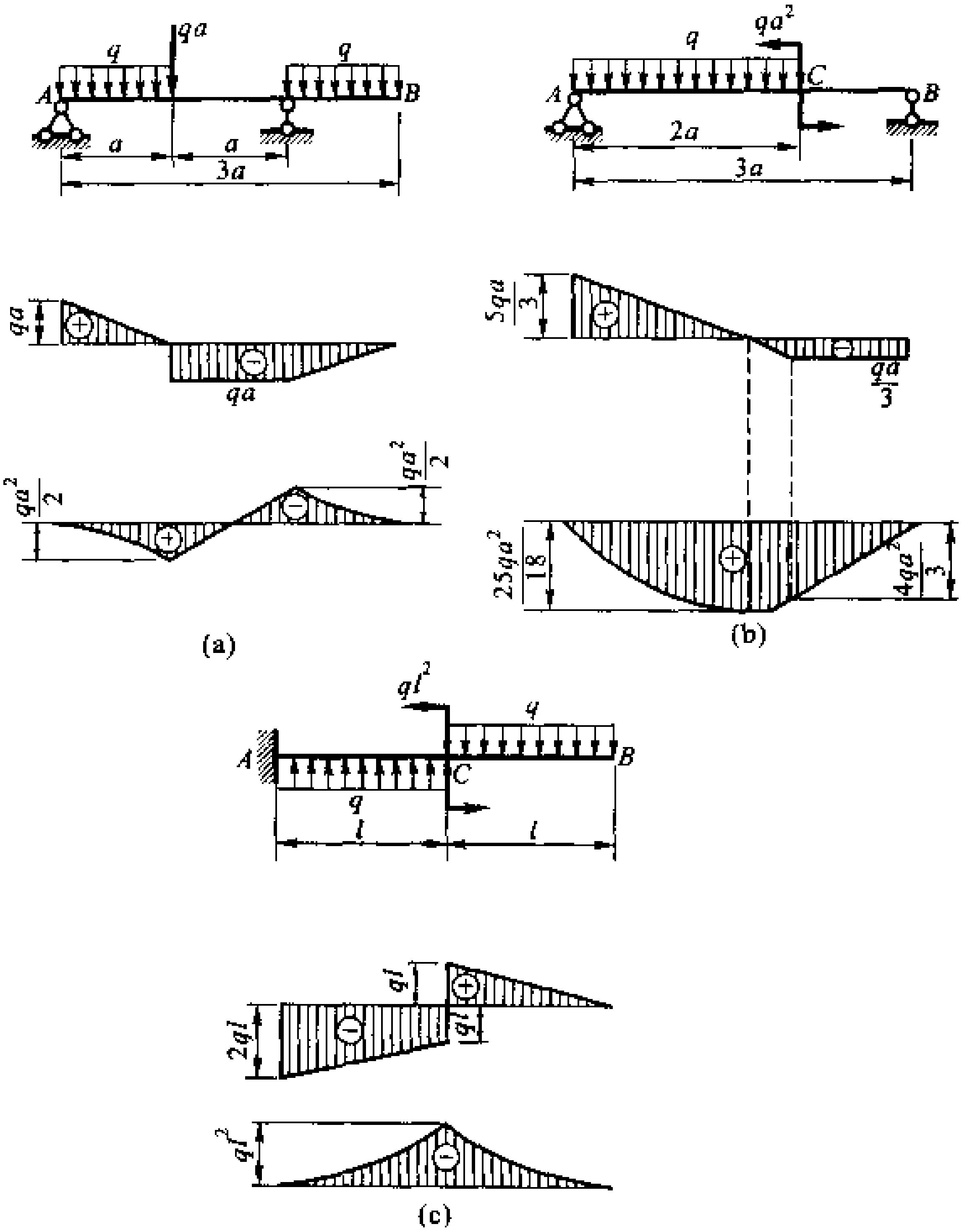
习题 4－3 图

4－4　试作下列具有中间铰的梁的剪力图和弯矩图。



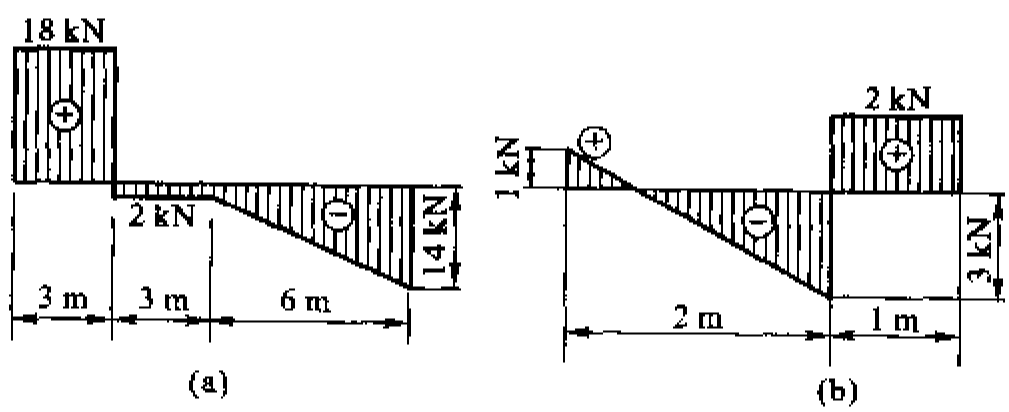
习题 4－4 图

4－5　试根据弯矩、剪力与荷载集度之间的微分关系指出图示剪力图和弯矩图的错误。



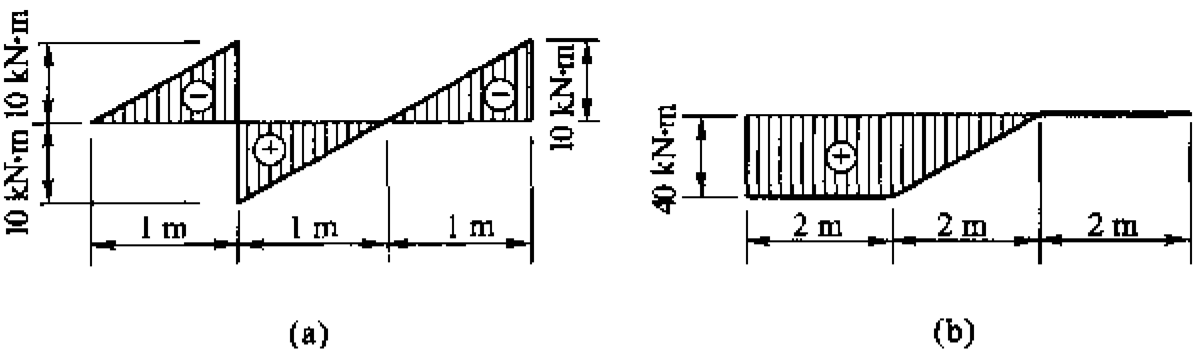
习题 4－5 图

4－6 已知简支梁的剪力图如图所示。试作梁的弯矩图和荷载图。已知梁上没有集中力偶作用。



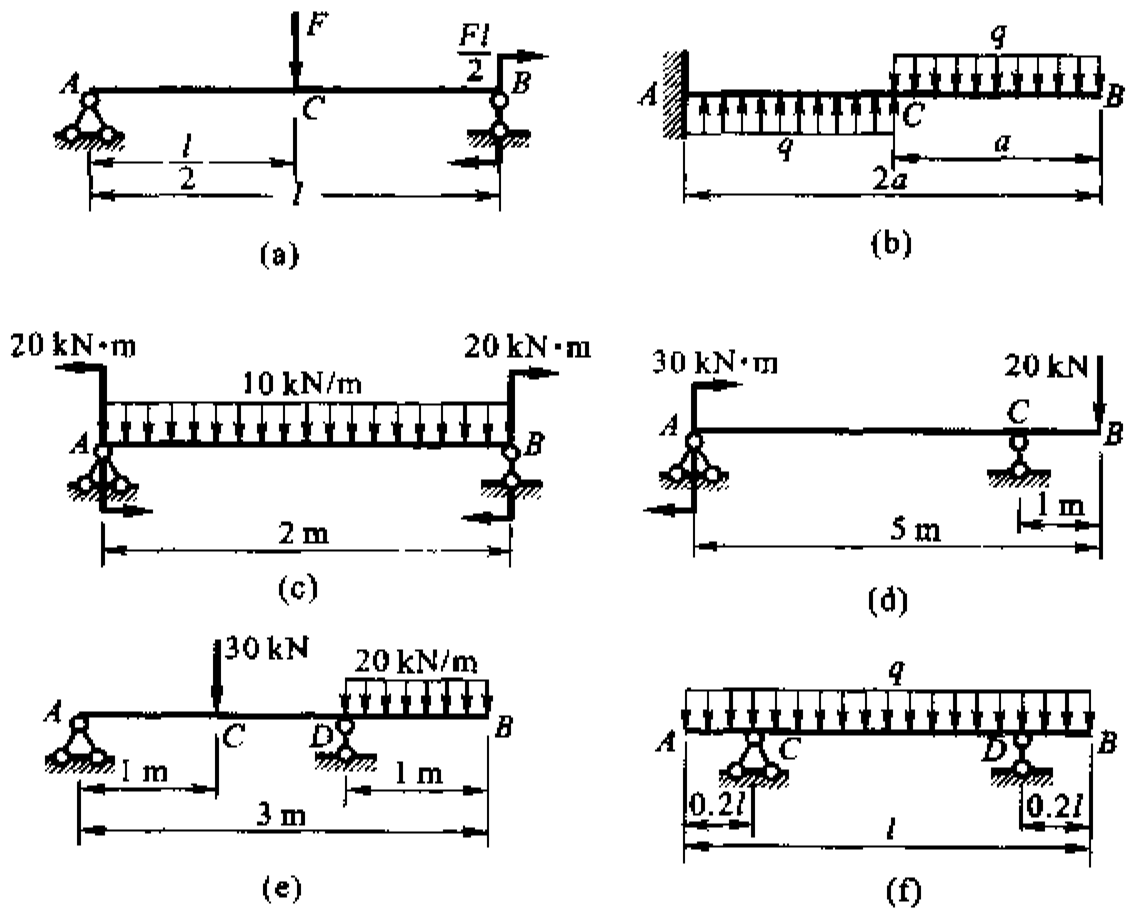
习题 4－6 图

4-7　试根据图示简支梁的弯矩图作出梁的剪力图与荷载图。



习题 4-7 图

4-8　试用叠加法作图示各梁的弯矩图。



习题 4-8 图

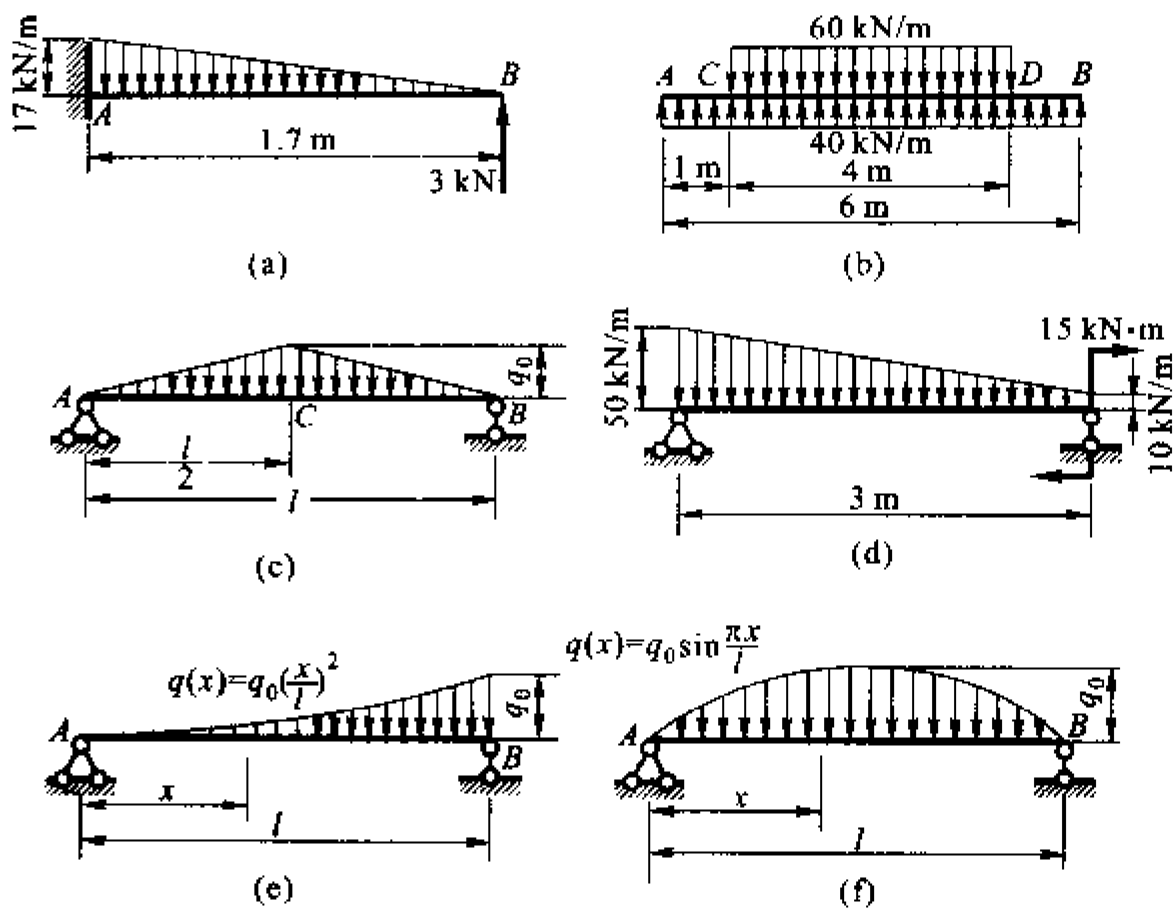
4-9　选择适当的方法，试作图示各梁的剪力图和弯矩图。

4-10　试作简支梁在图示四种荷载情况下的弯矩图，并比较其最大弯矩值。这些结果说明梁上的荷载不能任意用其静力等效力系代替，以及荷载分散作用时，使梁内 M_{max} 下降的情况。

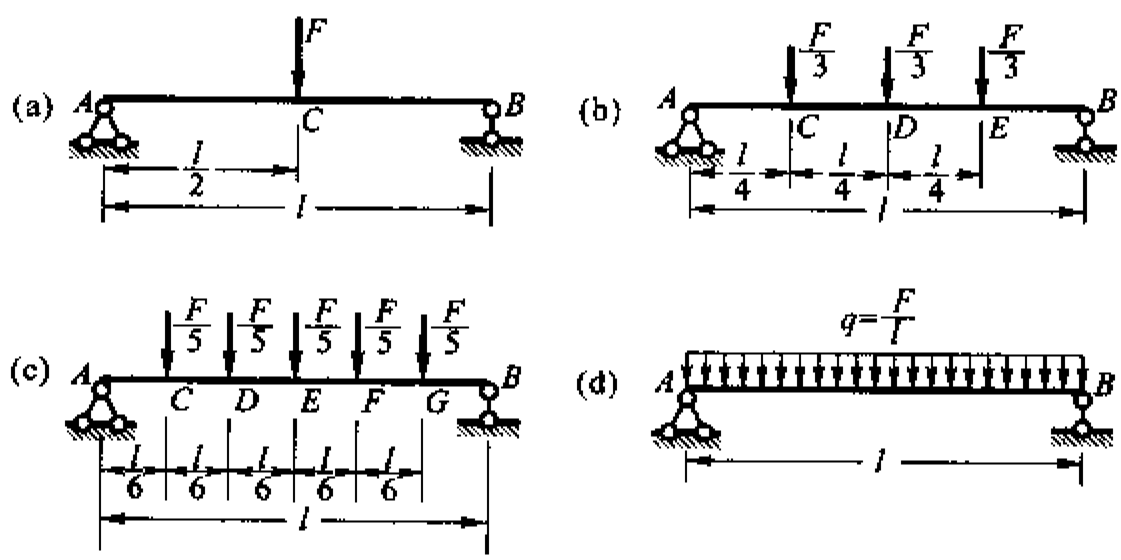
4-11　图示以三种不同方式悬吊着的长 12 m、重 24 kN 的等直杆，每根吊索承受由杆重引起的力相同。试分别作三种情况下杆的弯矩图，并加以比较。这些结果说明什么问题？

4-12　如欲使图示外伸梁的跨度中点处的正弯矩值等于支点处的负弯矩值，则支座到端点的距离 a 与梁长 l 之比 a/l 应等于多少？

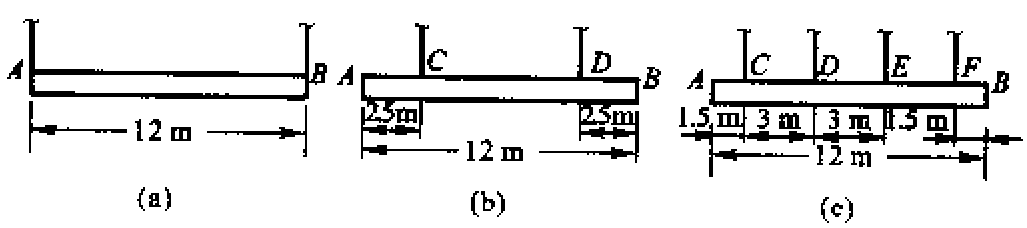
4-13　一根搁在地基上的梁承受荷载如图所示。假设地基的反力是均匀分布的。试求地基反力的集度 q_R，并作梁的剪力图和弯矩图。



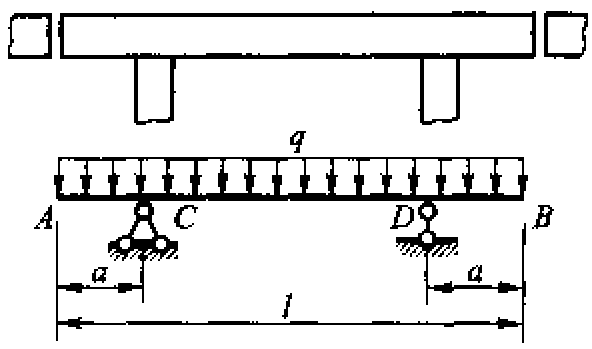
习题 4－9 图



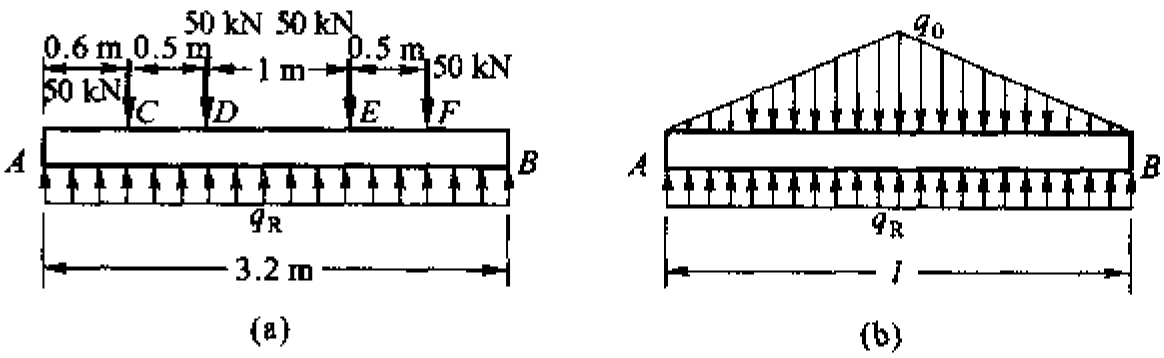
习题 4－10 图



习题 4－11 图

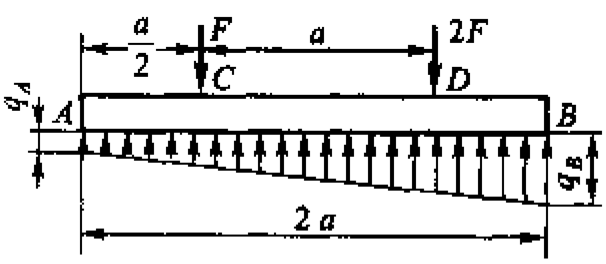


习题 4－12 图



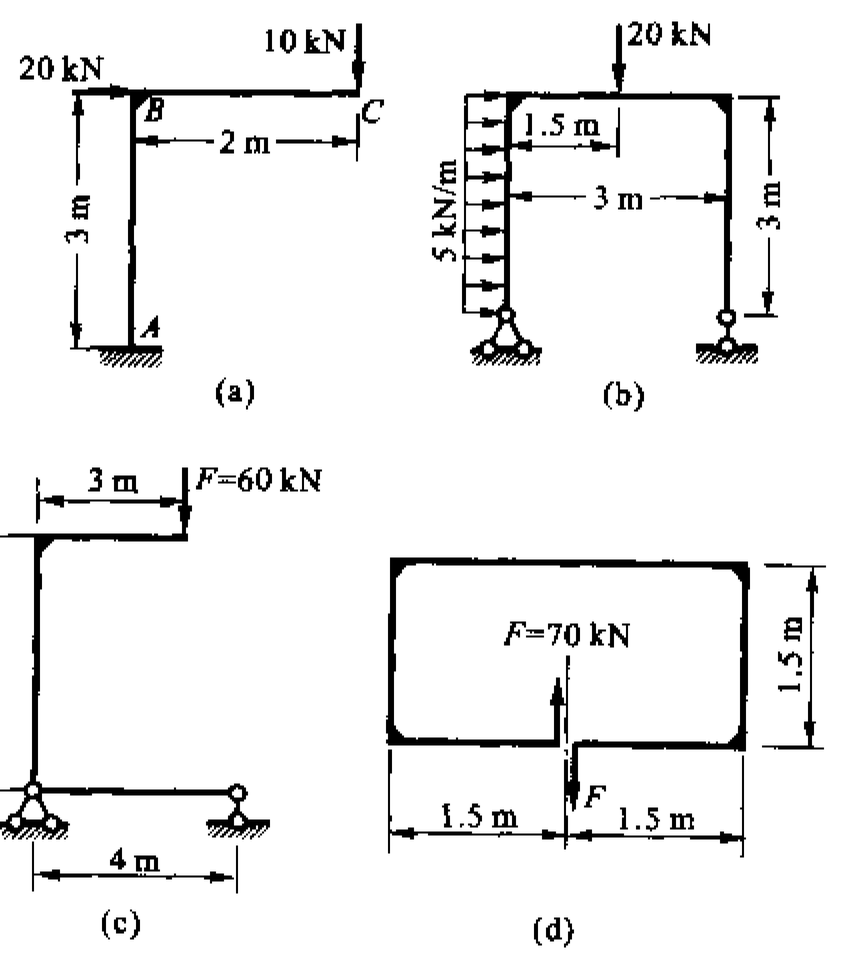
习题 4－13 图

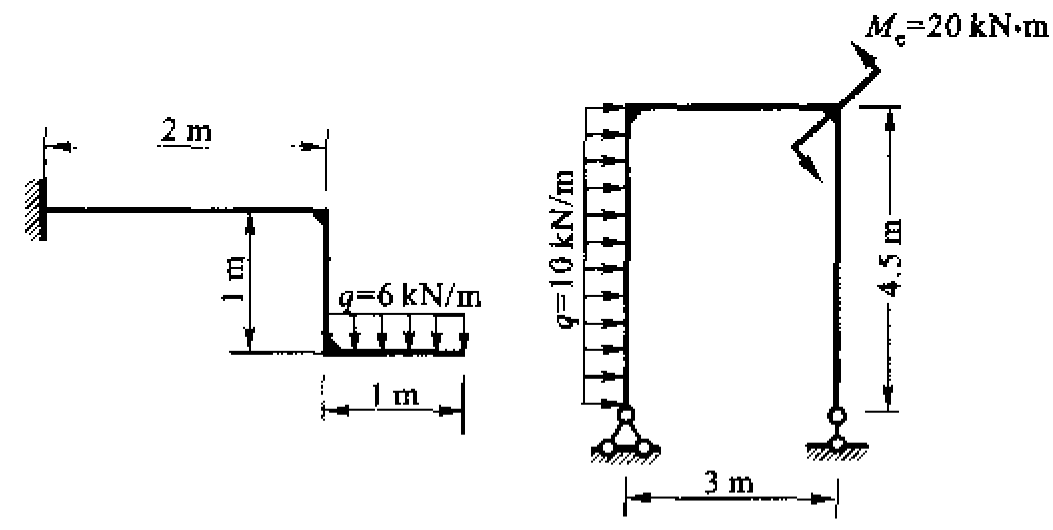
4－14　一根搁在地基上的梁承受荷载如图所示。假设地基的反力按直线规律连续变化。试求反力在两端 A 点和 B 点处的集度 q_A 和 q_B，并作梁的剪力图和弯矩图。



习题 4－14 图

4－15　试作图示刚架的剪力图、弯矩图和轴力图。



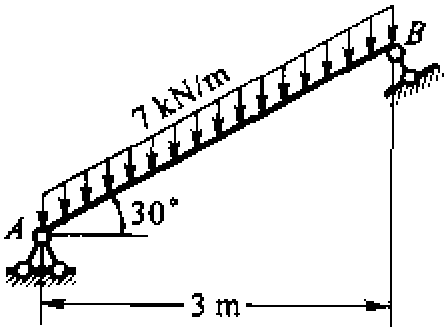


(e) (f)

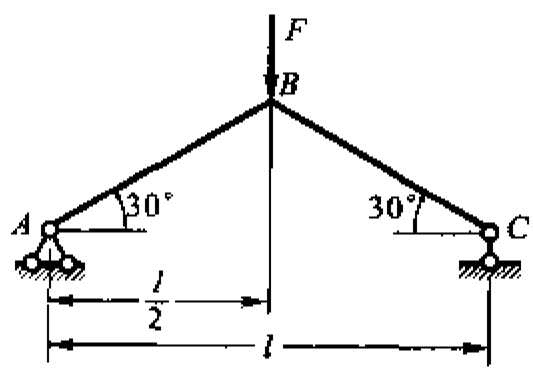
习题 4－15 图

4－16 试作图示斜梁的剪力图、弯矩图和轴力图。

4－17 折杆 ABC 的受力如图所示，试作杆的剪力图、弯矩图和轴力图。

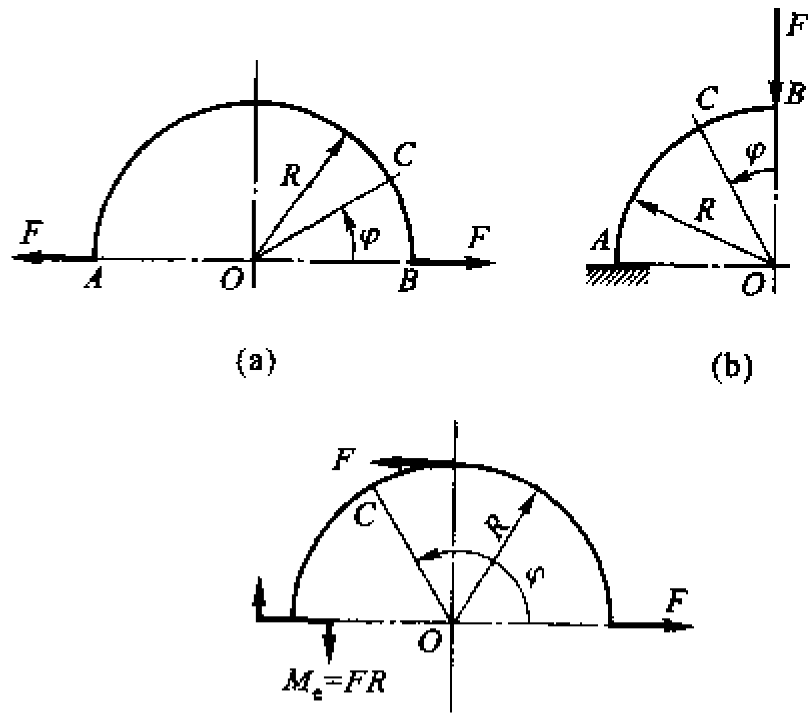


习题 4－16 图



习题 4－17 图

4－18 圆弧形曲杆受力如图所示。已知曲杆轴线的半径为 R，试写出任意横截面 C 上剪力、弯矩和轴力的表达式（表示成 φ 角的函数），并作曲杆的剪力图、弯矩图和轴力图。



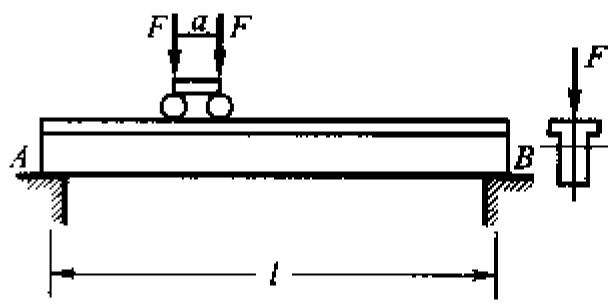
(a) (b) (c)

习题 4－18 图

4－19　图示吊车梁，吊车的每个轮子对梁的作用力都是 F，试问：

(1) 吊车在什么位置时，梁内的弯矩最大？最大弯矩等于多少？

(2) 吊车在什么位置时，梁的支座反力最大？最大支反力和最大剪力各等于多少？



习题 4－19 图

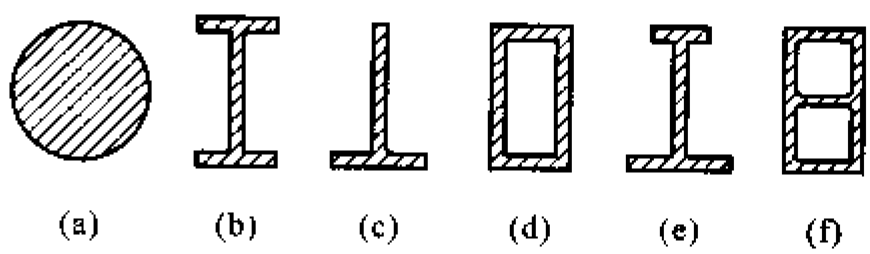
4－20　习题 4－18 图 b 所示曲杆如位于水平面内，而荷载 F 仍为竖直力，试分析此时任意横截面 C 上的内力，并作各内力图。

4－21　长度为 250 mm、截面尺寸为 $h\times b=0.8\ \text{mm}\times 25\ \text{mm}$ 的薄钢尺，由于两端外力偶的作用而弯成中心角为 60°的圆弧。已知弹性模量 $E=210$ GPa。试求钢尺横截面上的最大正应力。

4－22　厚度为 $h=1.5$ mm 的钢带，卷成直径为 $D=3$ m 的圆环，试求钢带横截面上的最大正应力。已知钢的弹性模量 $E=210$ GPa。

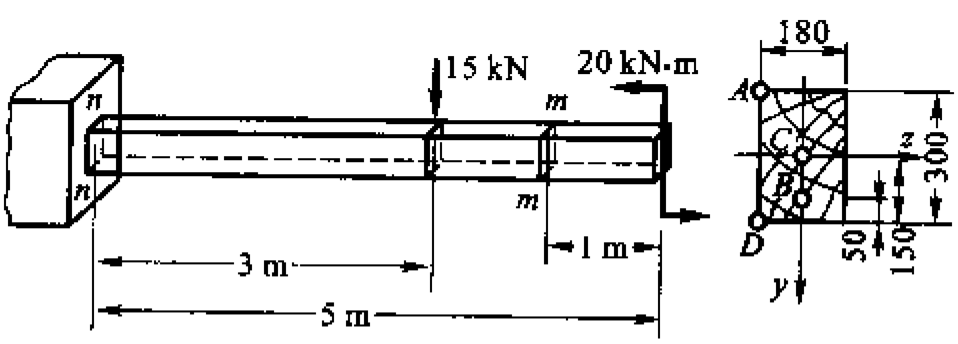
4－23　直径为 d 的钢丝，其屈服强度为 $\sigma_{p0.2}$。现在两端施加外力偶使其弯成直径为 D 的圆弧。试求当钢丝横截面上的最大正应力等于 $\sigma_{p0.2}$ 时 D 与 d 的关系式，并据此分析为何钢丝绳要用许多高强度的细钢丝组成。

4－24　梁在铅垂纵对称面内受外力作用而弯曲。当梁具有图示各种不同形状的横截面时，试分别绘出各横截面上的正应力沿其高度变化的图。



习题 4－24 图

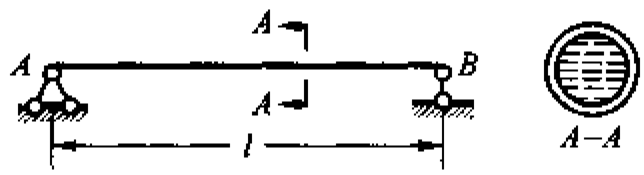
4－25　矩形截面的悬臂梁受集中力和集中力偶作用，如图所示。试求截面 $m-m$ 和固定端截面 $n-n$ 上 A，B，C，D 四点处的正应力。



习题 4－25 图

4－26　一外径为 250 mm、壁厚为 10 mm、长度 $l=12$ m 的铸铁水管，两端搁在支座上，管中充满着水，如图所示。铸铁的密度 $\rho=7.70\ \text{kg/m}^3$，水的密度 $\rho=1\ \text{kg/m}^3$。试求管内最大

拉、压正应力的数值。



习题 4－26 图

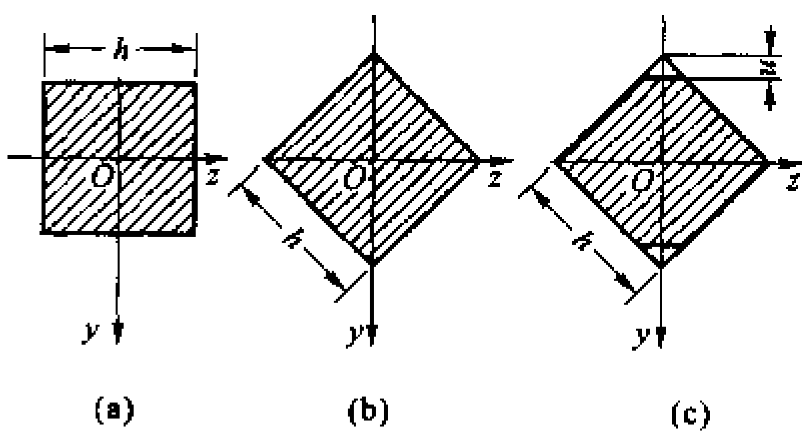
4－27 对于横截面边长为 $b\times 2b$ 的矩形截面梁，试求当外力偶分别作用在平行于截面长边及短边之纵对称面内时，梁所能承担的许可弯矩之比，以及梁的弯曲刚度之比。

4－28 正方形截面的梁按图 a、b 所示的两种方式放置。试求：

(1) 若两种情况下横截面上的弯矩 M 相等，比较横截面上的最大正应力；

(2) 对于 $h=200$ mm 的正方形，若如图 c 所示切去高度为 $u=10$ mm 的尖角，则弯曲截面系数 W_z 与未切角时(图 b)相比有何变化？

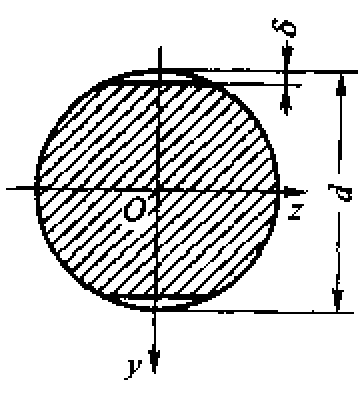
(3) 为了使弯曲截面系数 W_z 为最大，则图 c 中截面切去的尖角尺寸 u 应等于多少？这时的 W_z 比未切去尖角时增加百分之多少？



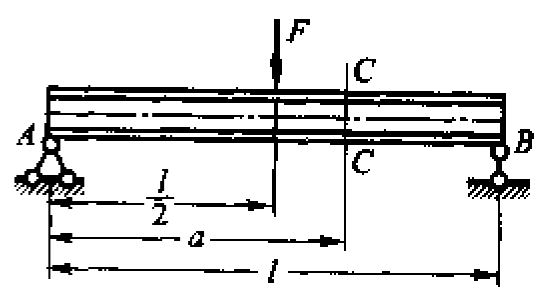
习题 4－28 图

4－29 有一圆形截面梁，直径为 d。为增大其弯曲截面系数 W_z，可将圆形截面切去高度为 δ 的微小部分，如图所示。试求使弯曲截面系数 W_z 为最大的 δ 值。

4－30 图示一由 16 号工字钢制成的简支梁承受集中荷载 F。在梁的截面 $C-C$ 处下边缘上，用标距 $s=20$ mm 的应变仪量得纵向伸长 $\Delta s=0.008$ mm。已知梁的跨长 $l=1.5$ m，$a=1$ m，弹性模量 $E=210$ GPa。试求 F 力的大小。

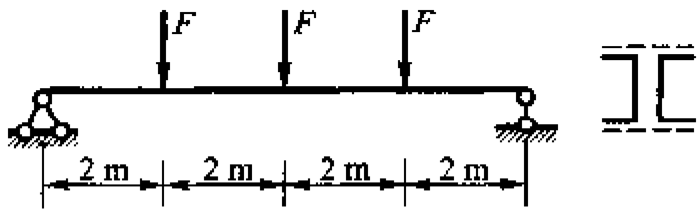


习题 4－29 图



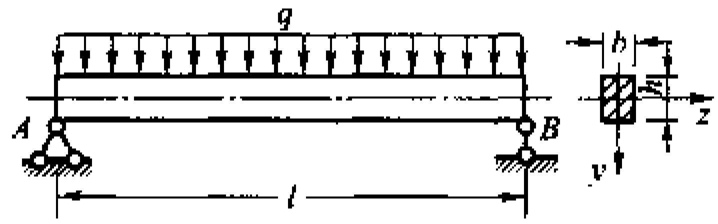
习题 4－30 图

4－31　由两根 28a 号槽钢组成的简支梁受三个集中力作用，如图所示。已知该梁材料为 Q235 钢，其许用弯曲正应力$[\sigma]=170$ MPa。试求梁的许可荷载 F。



习题 4－31 图

4－32　简支梁的荷载情况及尺寸如图所示，试求梁的下边缘的总伸长。

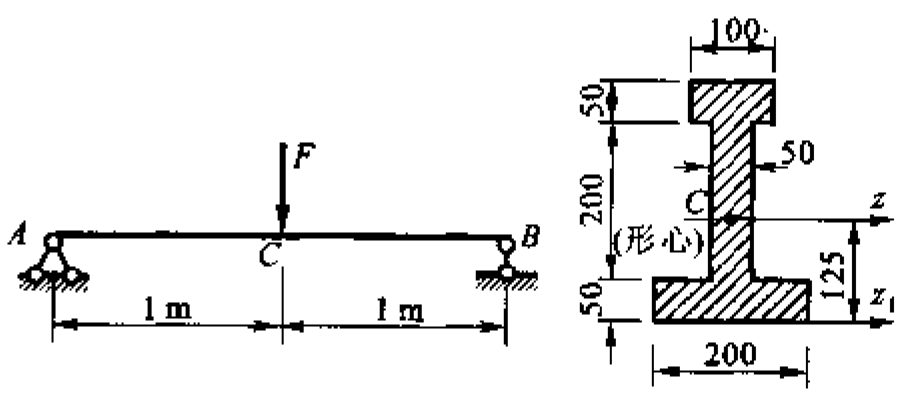


习题 4－32 图

4－33　已知图示铸铁简支梁的 $I_{z_1}=645.6\times10^6\ \text{mm}^4$，$E=120$ GPa，许用拉应力$[\sigma_t]=30$ MPa，许用压应力$[\sigma_c]=90$ MPa。试求：

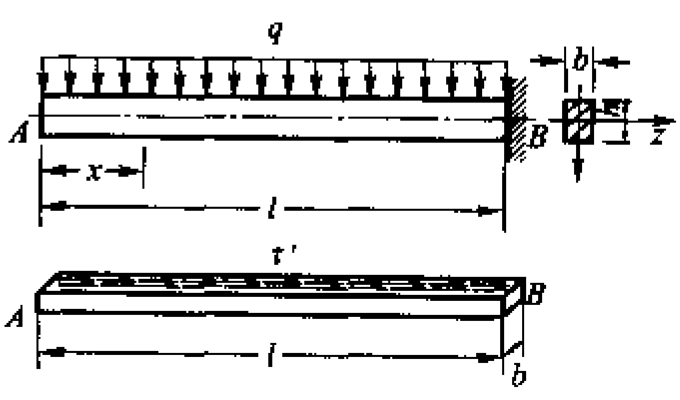
(1) 许可荷载 F；

(2) 在许可荷载作用下，梁下边缘的总伸长量。

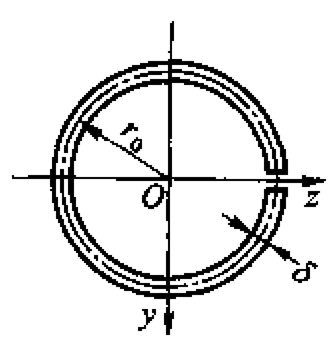


习题 4－33 图

*4－34　图示一矩形截面悬臂梁，在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用，其横截面尺寸为 b，h，长度为 l。



习题 4－34 图



习题 4－35 图

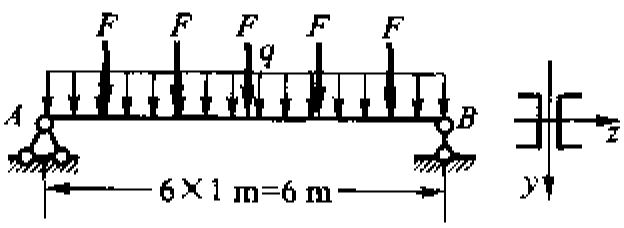
(1) 试证明在离自由端为 x 处的横截面上切向内力元素 τdA 的合力等于该截面上的剪力，而法向内力元素 σdA 的合力偶矩等于该截面上的弯矩。

(2) 如沿梁的中性层截出梁的下半部，如图所示，试问在截开面上的切应力 τ' 沿梁长度的变化规律如何？该面上总的水平剪力有多大？由什么力来平衡？

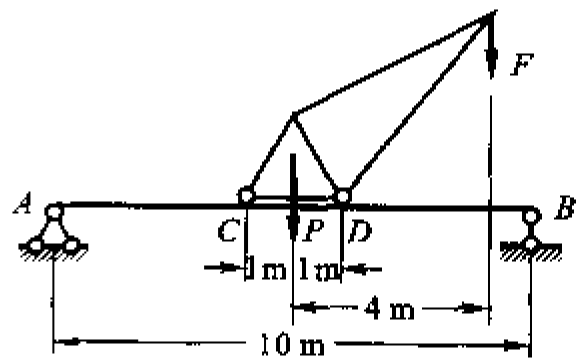
***4－35** 开口薄壁圆环形截面如图所示。已知横截面上剪力 F_S 的作用线平行于截面的 y 轴，试推导此截面上弯曲切应力的计算公式。

4－36 由两根 36 号槽钢组成的梁如图所示。已知：$F=44$ kN，$q=1$ kN/m。钢的许用弯曲正应力 $[\sigma]=170$ MPa，试校核梁的正应力强度。

4－37 起重机连同配重等重 $P=50$ kN，行走于两根工字钢所组成的简支梁上，如图所示。起重机的起重量 $F=10$ kN。梁材料的许用弯曲正应力 $[\sigma]=170$ MPa。试选择工字钢的号码。设全部荷载平均分配在两根梁上。

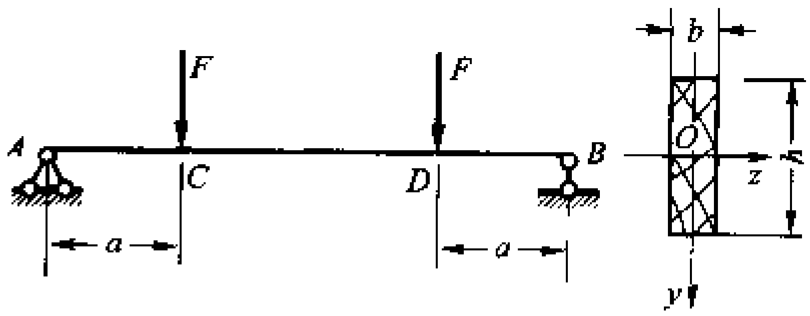


习题 4－36 图



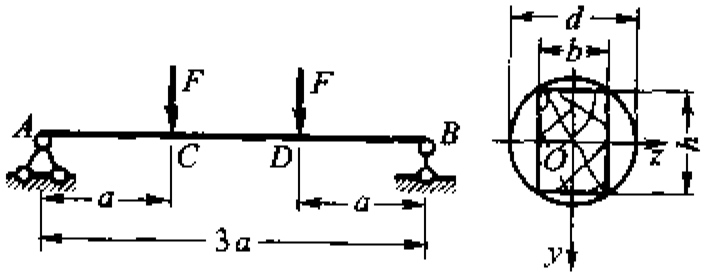
习题 4－37 图

4－38 一简支木梁受力如图所示，荷载 $F=5$ kN，距离 $a=0.7$ m，材料的许用弯曲正应力 $[\sigma]=10$ MPa，横截面为 $\frac{h}{b}=3$ 的矩形。试按正应力强度条件确定梁横截面的尺寸。



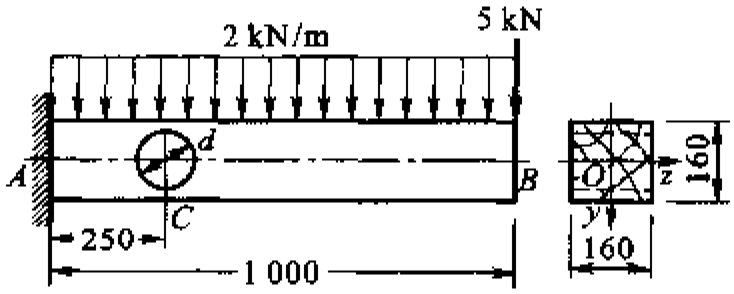
习题 4－38 图

4－39 一矩形截面简支梁由圆柱形木料锯成。已知 $F=5$ kN，$a=1.5$ m，$[\sigma]=10$ MPa。试确定弯曲截面系数为最大时矩形截面的高宽比 $\frac{h}{b}$，以及梁所需木料的最小直径 d。



习题 4－39 图

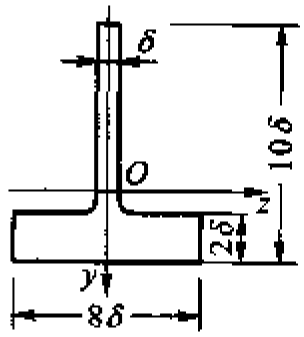
4-40　一正方形截面悬臂木梁的尺寸及所受荷载如图所示。木料的许用弯曲正应力 $[\sigma]=10$ MPa。现需在梁的截面 C 上中性轴处钻一直径为 d 的圆孔，试问在保证梁强度的条件下，圆孔的最大直径 d（不考虑圆孔处应力集中的影响）可达多大？



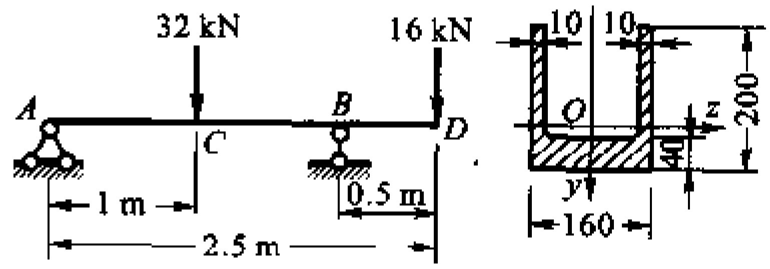
习题 4-40 图

4-41　横截面如图所示的铸铁简支梁，跨长 $l=2$ m，在其中点受一集中荷载 $F=80$ kN 作用。已知许用拉应力 $[\sigma_t]=30$ MPa，许用压应力 $[\sigma_c]=90$ MPa。试确定截面尺寸 δ 值。

4-42　一铸铁梁如图所示。已知材料的拉伸强度极限 $\sigma_b=150$ MPa，压缩强度极限 $\sigma_{bc}=630$ MPa。试求梁的安全因数。



习题 4-41 图

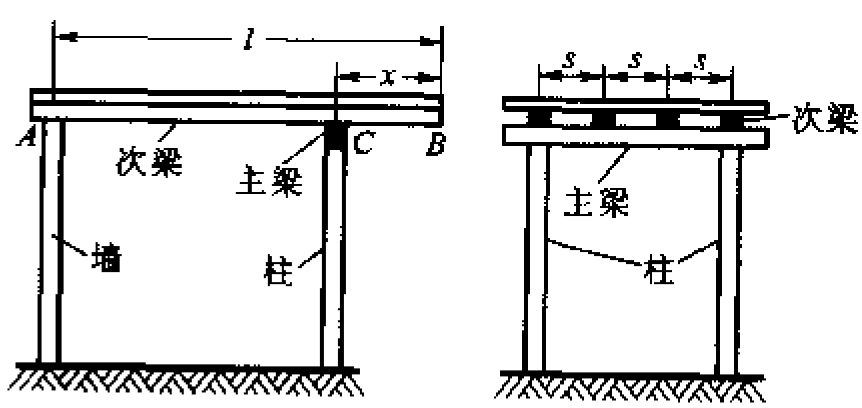


习题 4-42 图

4-43　图示一平顶凉台，其宽 $l=6$ m，顶面荷载集度 $f=2\ 000$ Pa，由间距为 $s=1$ m 的木次梁 AB 支持。木梁的许用弯曲正应力 $[\sigma]=10$ MPa，并已知 $\frac{h}{b}=2$。试求：

(1) 在次梁用料最经济的情况下，确定主梁位置的 x 值；

(2) 选择矩形截面木次梁的尺寸。

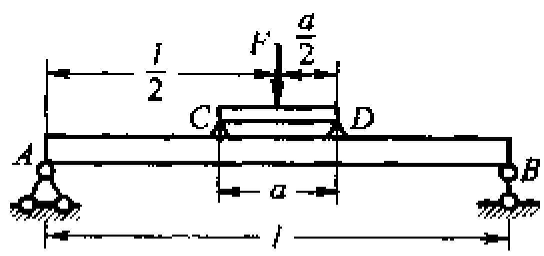


习题 4-43 图

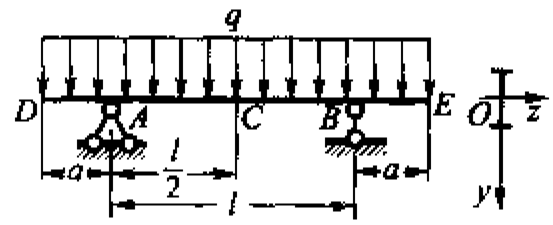
4-44　当荷载 F 直接作用在跨长为 $l=6$ m 的简支梁 AB 之中点时，梁内最大正应力超

过许可值30%。为了消除过载现象，配置了如图所示的辅助梁 CD，试求辅助梁的最小跨长 a。

4－45　图示的外伸梁由25a号工字钢制成，其跨长 $l=6$ m，且在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用。当支座处截面 A，B 上及跨中截面 C 上的最大正应力均为 $\sigma=140$ MPa 时，试问外伸部分的长度 a 及荷载集度 q 各等于多少？



习题4－44图

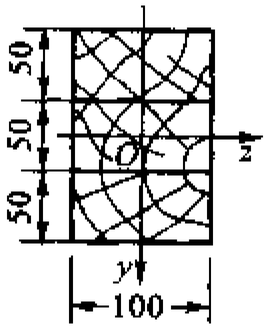


习题4－45图

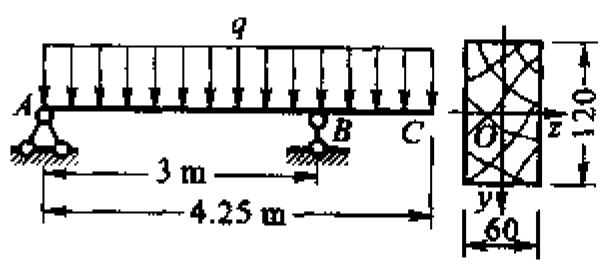
4－46　一简支木梁，在全梁长度上受集度为 $q=5$ kN/m 的均布荷载作用。已知跨长 $l=7.5$ m，截面宽度 $b=300$ mm 和高度 $h=180$ mm，木材的许用顺纹切应力为1 MPa。试校核梁的切应力强度。

4－47　一悬臂梁长为900 mm，在自由端受一集中力 F 的作用。梁由三块50 mm×100 mm的木板胶合而成，如图所示，图中 z 轴为中性轴。胶合缝的许用切应力 $[\tau]=0.35$ MPa。试按胶合缝的切应力强度求许可荷载 F，并求在此荷载作用下，梁的最大弯曲正应力。

4－48　一矩形截面木梁，其截面尺寸及荷载如图，$q=1.3$ kN/m。已知 $[\sigma]=10$ MPa，$[\tau]=2$ MPa。试校核梁的正应力和切应力强度。

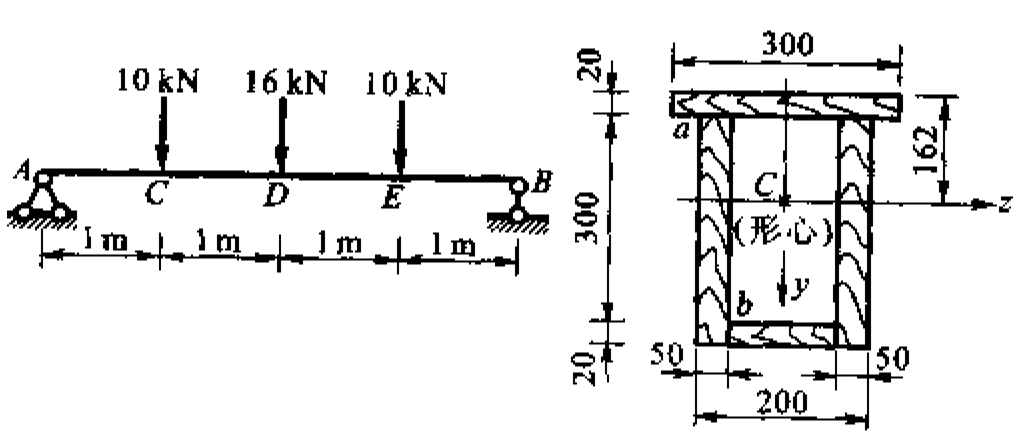


习题4－47图



习题4－48图

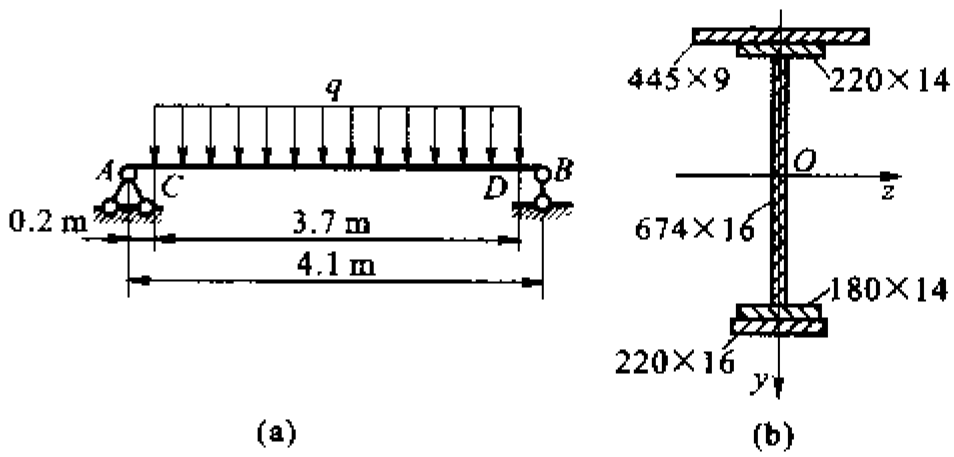
4－49　图示箱形截面简支梁用四块木板胶合而成，受三个集中力作用如图所示。已知



习题4－49图

横截面对中性轴的惯性矩 $I_z = 478.8\times10^6\ mm^4$；材料为红松，其许用弯曲正应力[$\sigma$] = 10 MPa，许用顺纹切应力[$\tau$] = 1.1 MPa；胶合缝的许用切应力[$\tau_{胶}$] = 0.35 MPa。试校核梁的强度。

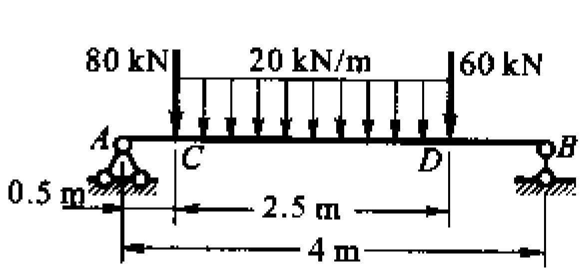
4－50　简支梁 AB 承受如图所示的均布荷载，其集度 q = 407 kN/m(图 a)。梁横截面的形状及尺寸如图 b 所示。梁的材料的许用弯曲正应力[σ] = 210 MPa，许用切应力[τ] = 130 MPa。试校核梁的正应力和切应力强度。



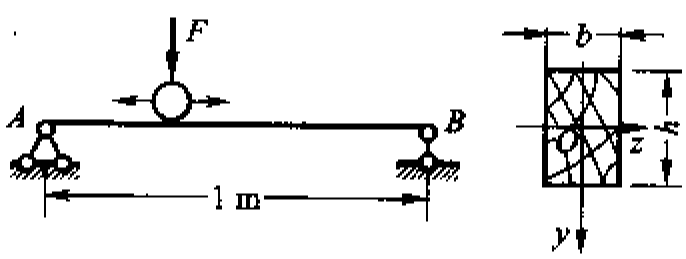
习题 4－50 图

4－51　由工字钢制成的简支梁受力如图所示。已知材料的许用弯曲正应力[σ] = 170 MPa，许用切应力[τ] = 100 MPa。试选择工字钢号码。

4－52　图示木梁受一可移动的荷载 F = 40 kN 作用。已知[σ] = 10 MPa，[τ] = 3 MPa。木梁的横截面为矩形，其高宽比 $\frac{h}{b}=\frac{3}{2}$。试选择梁的截面尺寸。

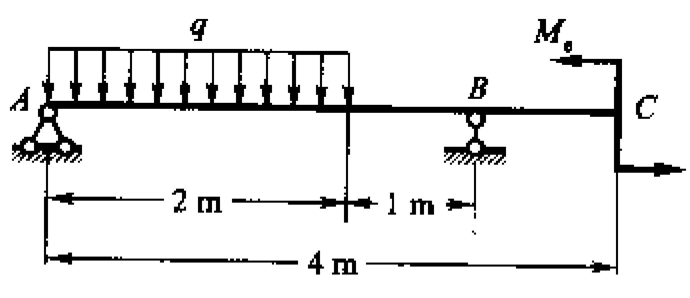


习题 4－51 图



习题 4－52 图

4－53　外伸梁 AC 承受荷载如图所示，M_e = 40 kN·m，q = 20 kN/m。材料的许用弯曲正应力[σ] = 170 MPa，许用切应力[τ] = 100 MPa。试选择工字钢的号码。



习题 4－53 图

第五章　梁弯曲时的位移

§5－1　梁的位移——挠度及转角

为研究等直梁在对称弯曲时的位移，取梁在变形前的轴线为 x 轴，梁横截面的铅垂对称轴为 y 轴，而 xy 平面即为梁上荷载作用的纵向对称平面（图 5－1）。梁在对称弯曲变形后，其轴线将变形成在 xy 平面内的平面曲线 AC_1B，如图 5－1 所示。度量梁变形后横截面位移的两个基本量是：横截面形心（即轴线上的点）在垂直于 x 轴方向的线位移 w，称为该截面的**挠度**；横截面对其原来位置的角位移 θ，称为该截面的**转角**。由于梁变形后的轴线是一条光滑的连续曲线 AC_1B，横截面仍与曲线保持垂直，因此，横截面的转角 θ 也就是曲线在该点处的切线与 x 轴之间的夹角。

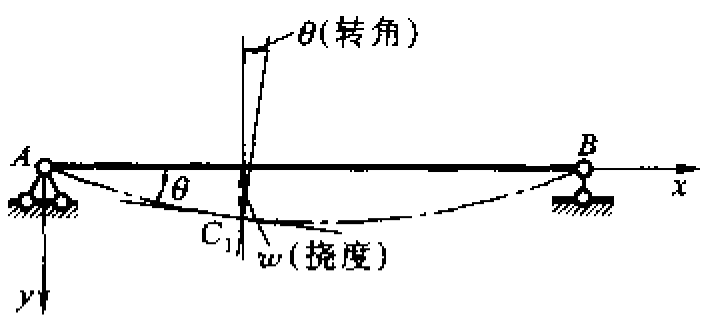


图 5－1

在第四章中已知，度量等直梁弯曲变形程度的是曲线 AC_1B 的曲率。但由于曲率难以度量，且在工程实际中，梁的变形程度还要受到支座约束的影响，而横截面的位移量 w 和 θ 不但与曲率的大小有关，同时还与梁的支座约束有关，因此，通常就用这两个位移量来反映梁的变形情况。应当指出，梁轴线弯曲成曲线后，在 x 轴方向也是有线位移的。但在小变形情况下，梁的挠度远小于跨长，梁变形后的轴线是一条平坦的曲线，横截面形心沿 x 轴方向的线位移与挠度相比属于高阶微量，可略去不计，因此，在选定坐标系后，梁变形后的轴线（即曲线 AC_1B）可表达为

$$w = f(x) \tag{a}$$

式中，x 为梁在变形前轴线上任一点的横坐标；w 为该点的挠度。梁变形后的轴线称为**挠曲线**，由于是在线弹性范围内的挠曲线，所以，也称为**弹性曲线**。上

述表达式(a)则称为**挠曲线(或弹性曲线)方程**。

由方程(a)还可求得转角 θ 的表达式。因为挠曲线是一平坦曲线，故有

$$\theta \approx \tan\theta = w' = f'(x) \tag{b}$$

亦即挠曲线上任一点处切线的斜率 w' 即可足够精确地代表该点处横截面的转角 θ。表达式(b)可称为**转角方程**。

由此可见，求得挠曲线方程(a)后，就能确定梁任一横截面挠度的大小、指向及转角的数值、转向。在图 5-1 所示的坐标系中，正值的挠度向下，负值向上；正值的转角为顺时针转向，负值为逆时针转向。

§5-2 梁的挠曲线近似微分方程及其积分

为求得梁的挠曲线方程，利用曲率 κ 与弯矩 M 间的物理关系，即式(4-4)：

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

应该指出，式中的曲率 κ 为度量挠曲线弯曲程度的量，因而是非负值的。

式(4-4)是梁在线弹性范围内纯弯曲情况下的曲率表达式。在横力弯曲时，梁横截面上除弯矩 M 外还有剪力 F_S，但工程上常用的梁，其跨长 l 往往大于横截面高度的 10 倍，剪力 F_S 对于梁的位移影响很小，可略去不计，故该式仍然适用。但这时式中的 M 和 ρ 都是 x 的函数，即

$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \tag{a}$$

从几何方面来看，平面曲线的曲率可写作

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \tag{b}$$

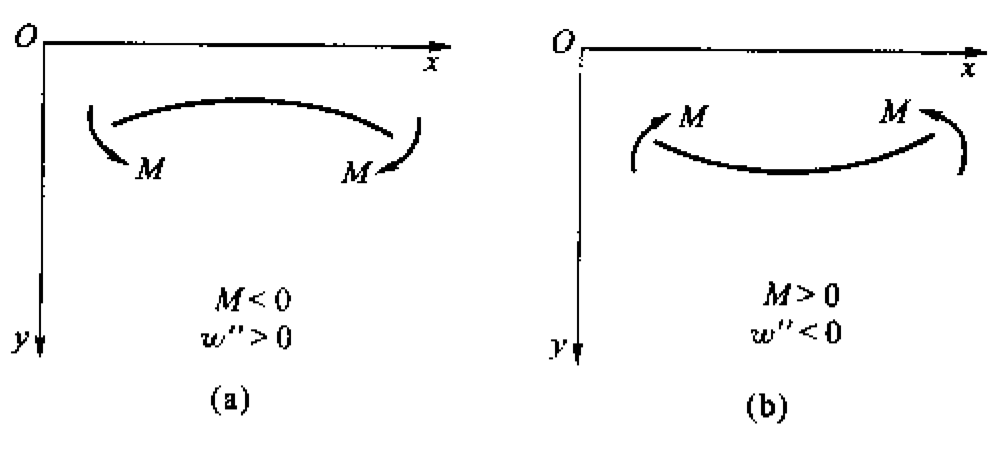


图 5-2

当取 x 轴向右为正、y 轴向下为正(图 5-1，图 5-2)时，曲线向上凸时 w'' 为正，向下凸时为负。而按弯矩的正、负号规定，梁弯曲后向下凸时为正，向上凸时为负，如图 5-2 所示。可见，在图示坐标系中，M 与 w'' 的正负号正好相反。于

是，将式(b)代入式(a)，得

$$\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = -\frac{M(x)}{EI}\text{①} \tag{5-1}$$

由于梁的挠曲线为一平坦的曲线，因此，w'^2 与 1 相比十分微小而可略去不计，故上式可近似地写为

$$w'' = -\frac{M(x)}{EI} \tag{5-2a}$$

上式由于略去了剪力 F_S 的影响，并在 $(1+w'^2)^{3/2}$ 中略去了 w'^2 项，故称为梁的**挠曲线近似微分方程**。

若为等截面直梁，其弯曲刚度 EI 为一常量，上式可改写为

$$EIw'' = -M(x) \tag{5-2b}$$

因此，在推导等直梁的挠曲线方程时，可按式(5-2b)进行积分，并通过由梁的变形相容条件给出的**边界条件**来确定积分常数。

当全梁各横截面上的弯矩可用单一的弯矩方程表示时(如在图 5-3 中所示的一些荷载情况下)，梁的挠曲线近似微分方程仅有一个，可将式(5-2b)的两端各乘以 dx，经积分一次后可得

$$EIw' = -\int M(x)dx + C_1 \tag{5-3a}$$

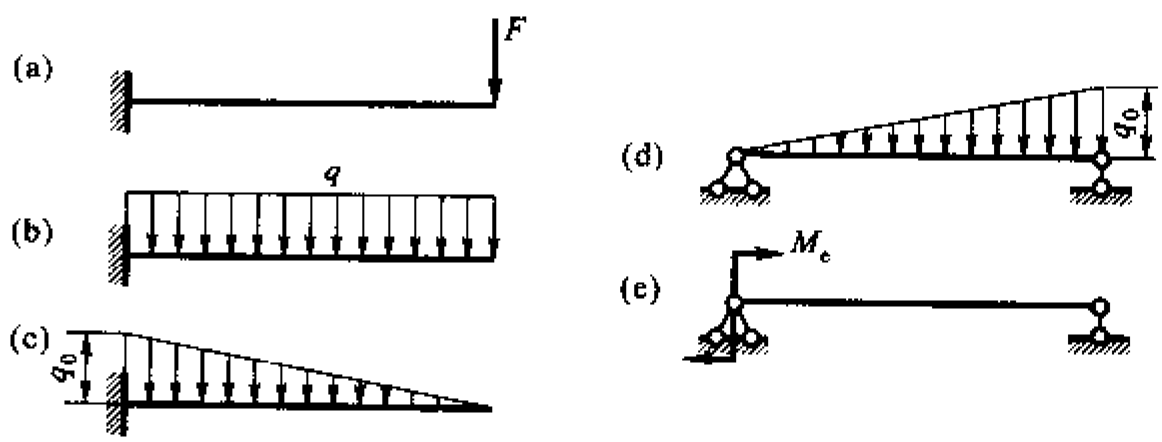


图 5-3

再积分一次，即得

$$EIw = -\int\left[\int M(x)dx\right]dx + C_1x + C_2 \tag{5-3b}$$

上两式中积分常数 C_1、C_2 可通过梁挠曲线的边界条件确定。例如在简支梁(图 5-4a)中，左、右两铰支座处的挠度 w_A 和 w_B 均等于零；在悬臂梁(图 5-4b)中，固定端处的挠度 w_A 和转角 θ_A 均等于零等等。

① 该式有时也写作 $\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI}$ 的形式，称之为梁的挠曲线精确微分方程，式中 $d\theta$ 是长度为 ds 的微段梁两端面间的相对转角。

确定积分常数 C_1 和 C_2 后，代入式(5－3a)和(5－3b)，就分别得到梁的转角方程和挠曲线方程，从而可确定任一横截面的转角和挠度。

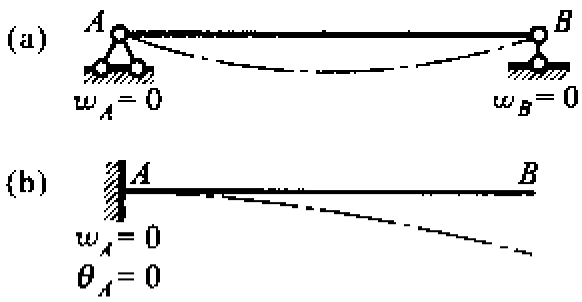
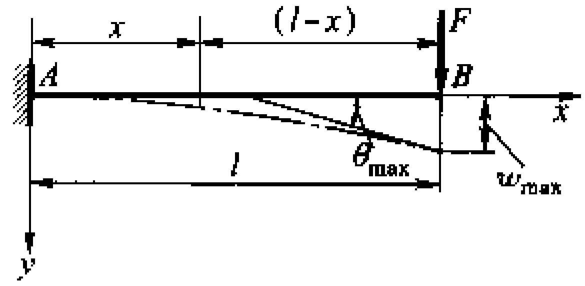


图 5－4



例题 5－1 图

例题 5－1　图示一弯曲刚度为 EI 的悬臂梁，在自由端受一集中力 F 作用。试求梁的挠曲线方程和转角方程，并确定其最大挠度 w_{max} 和最大转角 θ_{max}。

解：首先写出梁的弯矩方程。取 x 处横截面右侧梁段，由荷载 F 直接写出

$$M(x)=-F(l-x) \tag{1}$$

即得挠曲线近似微分方程

$$EIw''=-M(x)=Fl-Fx \tag{2}$$

然后通过两次积分，即得

$$EIw'=Flx-\frac{Fx^2}{2}+C_1 \tag{3}$$

$$EIw=\frac{Flx^2}{2}-\frac{Fx^3}{6}+C_1x+C_2 \tag{4}$$

在悬臂梁中，边界条件是固定端处的挠度和转角均等于零，即

$$\text{在 } x=0 \text{ 处，} w=0$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处，} w'=0$$

根据边界条件，由(3)，(4)两式可得

$$C_1=0 \qquad \text{及} \qquad C_2=0$$

将确定的积分常数代入(3)，(4)两式，即得梁的转角方程和挠曲线方程分别为

$$\theta=w'=\frac{Flx}{EI}-\frac{Fx^2}{2EI} \tag{5}$$

和

$$w=\frac{Flx^2}{2EI}-\frac{Fx^3}{6EI} \tag{6}$$

根据梁的受力情况及边界条件，画出梁的挠曲线的示意图(见图)后可知，梁的最大转角 θ_{max} 和最大挠度 w_{max} 都发生在 $x=l$ 的自由端截面处。由(5)，(6)两式可分别求得其值为

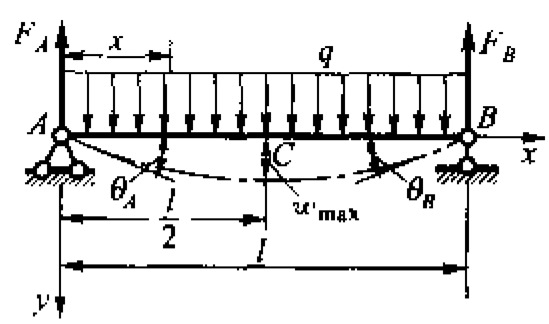
$$\theta_{\max} = \theta|_{x=l} = \frac{Fl^2}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI} = \frac{Fl^2}{2EI}$$

和

$$w_{\max} = w|_{x=l} = \frac{Fl^3}{2EI} - \frac{Fl^3}{6EI} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

在以上结果中，挠度为正值，说明梁变形时 B 点向下移动；转角为正值，说明横截面 B 沿顺时针转向转动。

例题 5－2　图示一弯曲刚度为 EI 的简支梁，在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用。试求梁的挠曲线方程和转角方程，并确定其最大挠度 $w_{\max}$ 和最大转角 $\theta_{\max}$。



例题 5－2 图

解：由对称关系可知梁的两支反力（见图）为

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

梁的弯矩方程为

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{q}{2}(lx - x^2) \tag{1}$$

将式(1)中的 $M(x)$ 代入式(5－2b)，再通过两次积分，可得

$$EIw' = -\frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1 \tag{2}$$

$$EIw = -\frac{q}{2}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1x + C_2 \tag{3}$$

在简支梁中，边界条件是左、右两铰支座处的挠度均等于零，即

在 $x=0$ 处，$w=0$

在 $x=l$ 处，$w=0$

根据边界条件，由式(3)可得

$$C_2 = 0 \quad 及 \quad EIw|_{x=l} = -\frac{q}{2}\left(\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12}\right) + C_1 l = 0$$

从而解出

$$C_1 = \frac{ql^3}{24}$$

于是，得梁的转角方程和挠曲线方程分别为

$$\theta = w' = \frac{q}{24EI}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) \tag{4}$$

和

$$w = \frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3) \tag{5}$$

由于梁上外力及边界条件对于梁跨中点都是对称的，因此，梁的挠曲线也应是对称的。由图可见，两支座处的转角绝对值相等，且均为最大值。分别以 $x=0$ 及 $x=l$ 代入式(4)可得最大转角值为

$$\theta_{\max}=\frac{\theta_A}{\theta_B}=\pm\frac{ql^3}{24EI}$$

又因挠曲线为一光滑曲线，故在对称的挠曲线中，最大挠度必在梁跨中点 $x=l/2$处。所以其最大挠度值为

$$w_{\max}=w\big|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{ql/2}{24EI}\left(l^3-2l\times\frac{l^2}{4}+\frac{l^3}{8}\right)=\frac{5ql^4}{384EI}$$

在以上两例题中，积分常数 C_1 和 C_2 的几何意义，可以从(5-3a)和(5-3b)两式中直接看出。由于以 x 为自变量，在坐标原点即 $x=0$ 处的定积分 $\int_0^0 M(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_0^0\left[\int_0^0 M(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$ 恒等于零，因此积分常数

$$C_1=EIw'\big|_{x=0}=EI\theta_0,\quad C_2=EIw_0 \tag{c}$$

式中，θ_0 和 w_0 分别代表坐标原点处截面的转角和挠度。在例题 5-1 中，坐标原点即固定端处截面的 θ_0 和 w_0 均等于零，因此 C_1 和 C_2 也均等于零。在例题 5-2 中坐标原点即左铰支座处截面的 $w_0=0$ 而 $\theta_0=\frac{ql^3}{24EI}$，因此 $C_2=0$，而 $C_1=\frac{ql^3}{24}$。

当梁受到指向相同的横向荷载(分布荷载或集中荷载)作用时，简支梁的最大转角发生在左支座或右支座截面处，而简支梁的最大挠度，根据求函数极值的原理，将发生在 $w'=0$ 的截面处。但由于梁变形的连续性，在指向相同的横向荷载作用下，其最大挠度可用梁跨中点处的挠度值来代替，详见例题 5-3。

若梁上的荷载不连续，即分布荷载在跨度中间的某点处开始或结束，以及集中荷载或集中力偶作用处，则梁的弯矩方程须分段写出，各段梁的挠曲线近似微分方程也就不同。而在对各段梁的近似微分方程积分时，都将出现两个积分常数。要确定这些积分常数，除了利用支座处的**约束条件**外，还应利用相邻两段梁在交界处位移的**连续条件**，例如左、右两段梁在交界处的截面应具有相等的挠度和转角等。上述确定积分常数用的约束条件和连续条件，都发生在各段挠曲线的边界处，因此，统称为**边界条件**。实质上，都是弯曲位移中的变形相容条件。

当挠曲线方程的分段较多时，往往要确定很多积分常数，使计算冗长。但是，如果在写弯矩方程和在对挠曲线近似微分方程进行积分时，遵循一定的规则，就可使积分常数的确定大为简化。下面结合例题 5-3 来加以说明。

例题 5-3 图示一弯曲刚度为 EI 的简支梁，在 D 点处受一集中荷载 F 作用。试求梁的挠曲线方程和转角方程，并确定其最大挠度和最大转角。

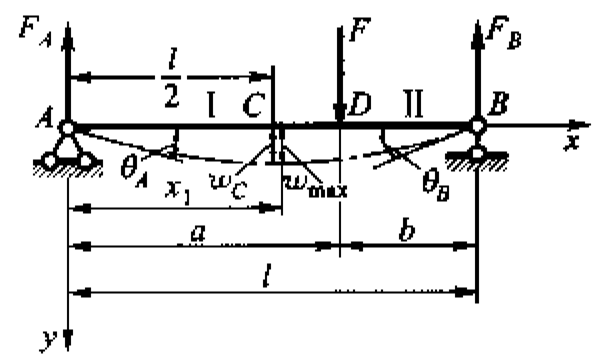
解：梁的两个支反力(见图)为

$$F_A = F\frac{b}{l} \quad 和 \quad F_B = F\frac{a}{l} \quad (1)$$

对于 I 和 II 两段梁，其弯矩方程分别为

$$M_1 = F_A x = F\frac{b}{l}x \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \quad (2')$$

$$M_2 = F\frac{b}{l}x - F(x-a) \quad (a \leqslant x \leqslant l) \quad (2'')$$



例题 5-3 图

梁段 I，II 的挠曲线方程及其积分分别求得如下：

梁段 I $(0 \leqslant x \leqslant a)$	梁段 II $(a \leqslant x \leqslant l)$
挠曲线微分方程： $EIw_1'' = -M_1 = -F\frac{b}{l}x$ (3′)	$EIw_2'' = -M_2 = -F\frac{b}{l}x + F(x-a)$ (3″)
积分一次： $EIw' = -F\frac{b}{l}\times\frac{x^2}{2} + C_1$ (4′)	$EIw_2' = F\frac{b}{l}\times\frac{x^2}{2} + \frac{F(x-a)^2}{2} + C_2$ (4″)
再积分一次： $EIw_1 = -F\frac{b}{l}\times\frac{x^3}{6} + C_1x + D_1$ (5′)	$EIw_2 - -F\frac{b}{l}\times\frac{x^3}{6} + \frac{F(x-a)^3}{6}$ $+ C_2x + D_2$ (5″)

在对梁段 II 进行积分运算时，对含有 $(x-a)$ 的弯矩项不要展开，而以 $(x-a)$ 作为自变量进行积分，这样可使下面确定积分常数的工作得到简化。

利用 D 点处的连续条件：

$$在\ x=a\ 处，\ w_1' = w_2'; \qquad 在\ x=a\ 处，\ w_1 = w_2$$

将式(4′)，(4″)和(5′)，(5″)代入上述边界条件可得

$$C_1 = C_2, \qquad D_1 = D_2$$

如前所述，积分常数 C_1 和 D_1 分别等于 $EI\theta_0$ 和 EIw_0，因此有

$$C_1 = C_2 = EI\theta_0, \qquad D_1 = D = EIw_0$$

由于图中简支梁在坐标原点处是铰支座，因此，$w_0 = 0$，故 $D_1 = D_2 = 0$。另一积分常数 $C_1 = C_2 = EI\theta_0$，则可利用右支座处的约束条件，即

$$在\ x=l\ 处，\quad w_2 = 0$$

来确定。根据这一边界条件，由梁段 II 的式(5″)可得

$$EIw_2\big|_{x=l} = -F\frac{b}{l}\times\frac{l^3}{6} + \frac{F(l-a)^3}{6} + C_2 l = 0$$

即可求得

$$C_1 = C_2 = EI\theta_0 = \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

将积分常数代入(4′),(4″),(5′)和(5″)四式,即得两段梁的转角方程和挠曲线方程如下:

梁段 I $(0 \leqslant x \leqslant a)$	梁段 II $(a \leqslant x \leqslant l)$
转角方程: $\theta_1 = w'_1 = \frac{Fb}{2lEI}\left[\frac{1}{3}(l^2 - b^2) - x^2\right]$ (6′)	$\theta_2 = w'_2 = \frac{Fb}{2lEI}\left[\frac{l}{b}(x-a)^2 - x^2 + \frac{1}{3}(l^2 - b^2)\right]$ (6″)
挠曲线方程: $w_1 = \frac{Fbx}{6lEI}[l^2 - b^2 - x^2]$ (7′)	$w_2 = \frac{Fb}{6lEI}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3 - x^3 + (l^2 - b^2)x\right]$ (7″)

将 $x=0$ 和 $x=l$ 分别代入(6′)和(6″)两式,即得左、右两支座处截面的转角分别为

$$\theta_A = \theta_1 |_{x=0} = \theta_0 = \frac{Fb(l^2 - b^2)}{6lEI} = \frac{Fab(l+b)}{6lEI}$$

$$\theta_B = \theta_2 |_{x=l} = -\frac{Fab(l+a)}{6lEI}$$

当 $a > b$ 时,右支座处截面的转角绝对值为最大,其值为

$$\theta_{max} = \theta_B = -\frac{Fab(l+a)}{6lEI}$$

现确定梁的最大挠度。简支梁的最大挠度应在 $w'=0$ 处。先研究梁段 I,令 $w'_1 = 0$,由式(6)解得

$$x_1 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} \tag{8}$$

当 $a > b$ 时,由式(8)可见 x_1 值将小于 a。由此可知,最大挠度确在梁段 I 中。将 x_1 值代入式(7′),经简化后即得最大挠度为

$$w_{max} = w_1 |_{x=x_1} = \frac{Fb}{9\sqrt{3}lEI}\sqrt{(l^2 - b^2)^3} \tag{9}$$

由式(8)可见,b 值越小,则 x_1 值越大。即荷载越靠近右支座,梁的最大挠度点离中点就越远,而且梁的最大挠度与梁跨中点挠度的差值也随之增加。在极端情况下,当 b 值甚小,以致 b^2 与 l^2 项相比可略去不计时,则从(9),(10)两式可得

$$w_{max} \approx \frac{Fbl^2}{9\sqrt{3}EI} = 0.064\,2\,\frac{Fbl^2}{EI}$$

而梁跨中点 C 处截面的挠度为

$$w_C = w_1\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Fb}{48EI}(3l^2 - 4b^2) \tag{10}$$

去 b^2 项，得

$$w_C \approx \frac{Fbl^2}{16EI} = 0.062\,5\,\frac{Fbl^2}{EI}$$

在这一极端情况下，两者相差也不超过梁跨中点挠度的 3%。由此可知，在简支梁中，不论它受什么荷载作用，只要挠曲线上无拐点，其最大挠度值都可用梁跨中点处的挠度值来代替，其精确度能满足工程计算的要求。

当集中荷载 F 作用在简支梁的中点处，即 $a = b = \dfrac{l}{2}$ 时，则

$$\theta_{max} = \pm\frac{Fl^2}{16EI}$$

$$w_{max} = w_C = \frac{Fl^3}{48EI}$$

在上例中，遵循了两个规则：(1) 对各段梁，都是从同一坐标原点到截面之间的梁段上的外力列出弯矩方程，所以后一梁段的弯矩方程中包括前一梁段的弯矩方程和新增的 $(x-a)$ 项；(2) 对 $(x-a)$ 项的积分，以 $(x-a)$ 作为自变量。于是，由挠曲线在 $x=a$ 处的连续条件，就能得到两段梁上相应的积分常数分别相等的结果。对于弯矩方程需分为任意几段的情况，只要遵循上述规则，同样可以得到各梁段上相应的积分常数分别相等的结果，从而简化确定积分常数的工作。

§5-3 按叠加原理计算梁的挠度和转角

由于梁的变形微小，梁变形后其跨长的改变可略去不计，且梁的材料在线弹性范围内工作，因而，梁的挠度和转角均与作用在梁上的荷载成线性关系。在这种情况下，梁在几项荷载(如集中力、集中力偶或分布力)同时作用下某一横截面的挠度和转角，就分别等于每项荷载单独作用下该截面的挠度和转角的叠加。此即为叠加原理。

在工程实际中，往往需计算梁在几项荷载同时作用下的最大挠度和最大转角。若已知梁在每项荷载单独作用下的挠度和转角表(参看附录 IV)，则按叠加原理来计算梁的最大挠度和最大转角将较为简便。

例题 5-4 一弯曲刚度为 EI 的简支梁受荷载如图 a 所示。试按叠加原理求梁跨中点的挠度 w_C 和支座处横截面的转角 θ_A，θ_B。

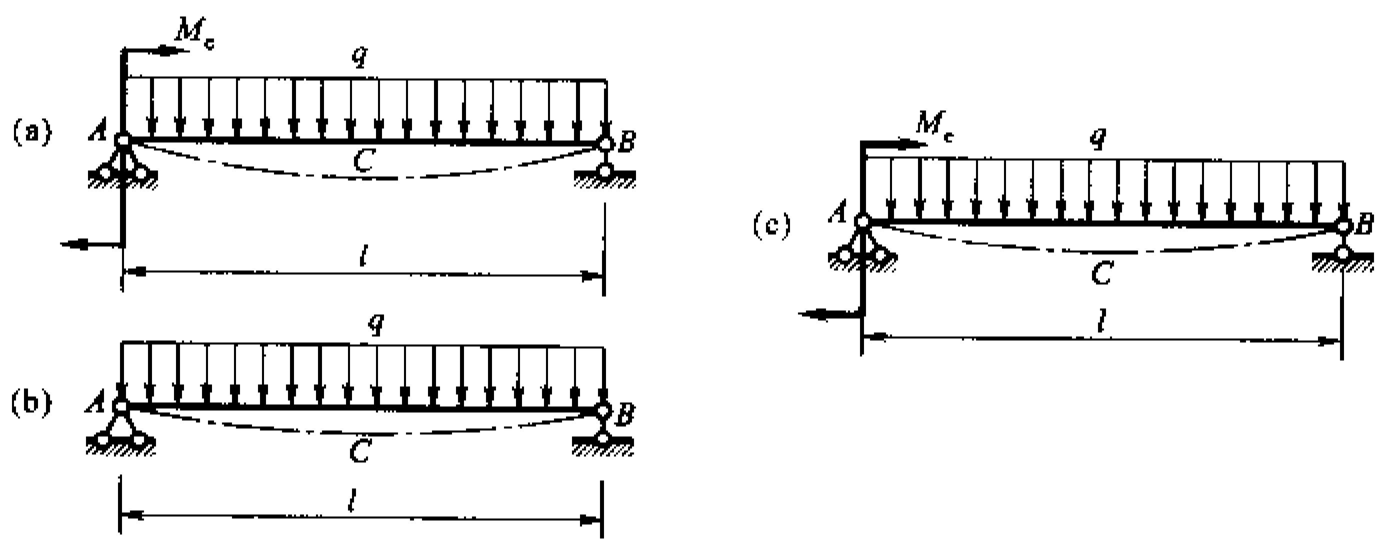
解： 梁上的荷载可以分为两项简单的荷载，如图 b、c 所示。由附录 IV 的

表中查出两者分别作用时梁的相应位移值，然后按叠加原理，即得所求的位移值。

$$w_C = w_{Cq} + w_{CM} = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{M_e l^2}{16EI}$$

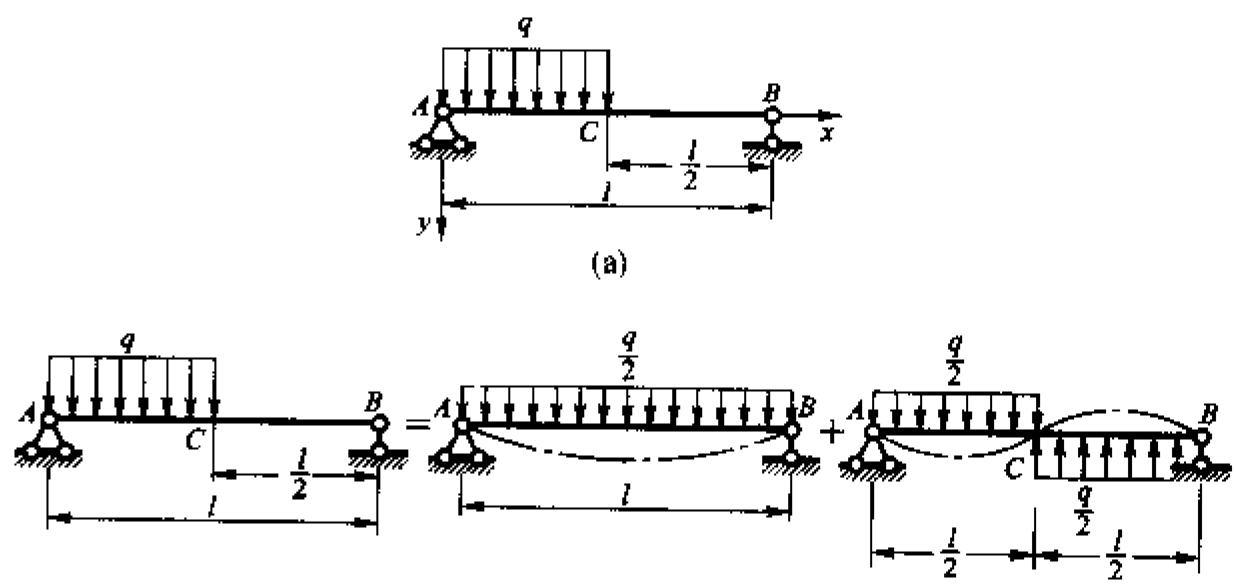
$$\theta_A = \theta_{Aq} + \theta_{AM} = \frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_e l}{3EI}$$

$$\theta_B = \theta_{Bq} + \theta_{BM} = -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{M_e l}{6EI}$$



例题 5-4 图

例题 5-5　试用叠加法，求图 a 所示弯曲刚度为 EI 的简支梁的跨中截面挠度 w_C 和两端截面的转角 θ_A，θ_B。



例题 5-5 图

解：为利用附录Ⅳ表中的结果，可将图 a 所示荷载视为对跨中截面 C 为正对称荷载与反对称荷载两种情况的叠加(图 b)。

在正对称荷载作用下，梁跨中截面的挠度以及两端截面的转角分别为

$$w_{C1}=\frac{5(q/2)l^4}{384EI}=\frac{5ql^4}{768EI}$$

$$\theta_{A1}=-\theta_{B1}=\frac{(q/2)l^3}{24EI}=\frac{ql^3}{48EI}$$

在反对称荷载作用下，梁的挠曲线对于跨中截面应是反对称的，因而跨中截面的挠度 w_{C2} 等于零。由于截面 C 的挠度为零，但转角不等于零，且该截面上的弯矩又等于零，故可将 AC 段和 CB 段分别视为受均布荷载作用且长度为 $\frac{l}{2}$ 的简支梁，因此，由附录Ⅳ表中查得

$$\theta_{A2}=\theta_{B2}=\frac{(q/2)(l/2)^3}{24EI}=\frac{ql^3}{384EI}$$

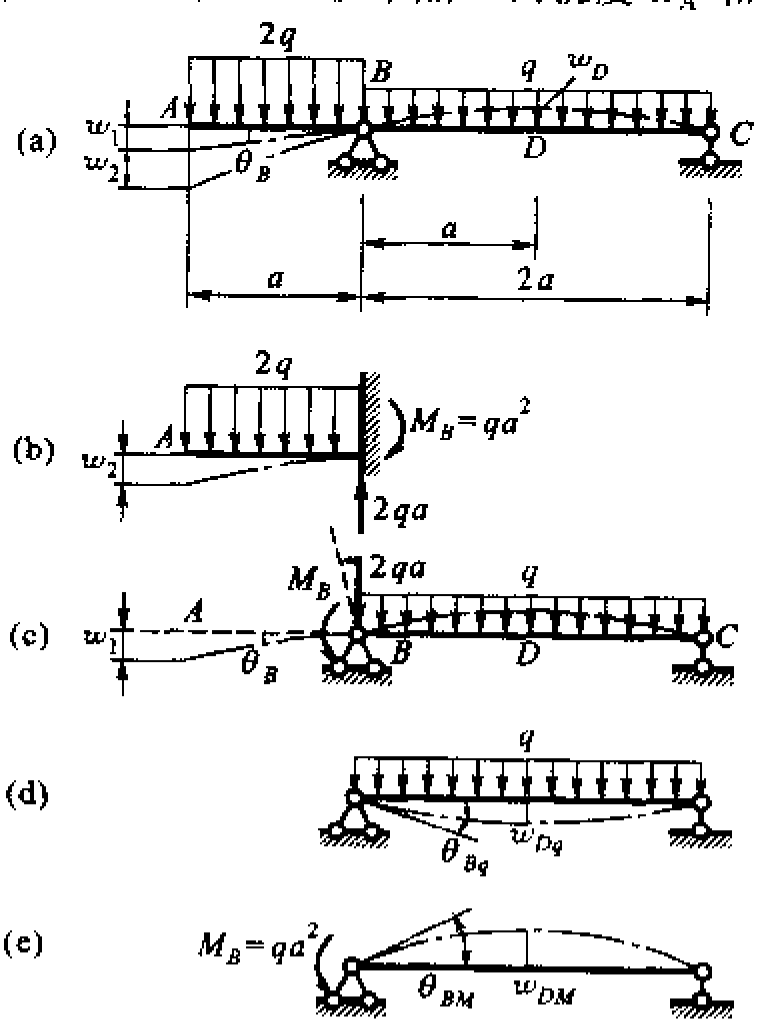
将相应的位移值叠加，即得

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}=\frac{5ql^4}{768EI}(\downarrow)$$

$$\theta_A=\theta_{A1}+\theta_{A2}=\frac{ql^3}{48EI}+\frac{ql^3}{384EI}=\frac{3ql^3}{128EI}(\circlearrowright)$$

$$\theta_B=\theta_{B1}+\theta_{B2}=-\frac{ql^3}{48EI}+\frac{ql^3}{384EI}=-\frac{7ql^3}{384EI}(\circlearrowleft)$$

例题 5－6　一弯曲刚度为 EI 的外伸梁受荷载如图 a 所示，试按叠加原理，求截面 B 的转角 θ_B 以及 A 端和 BC 段中点 D 的挠度 w_A 和 w_D。



例题 5－6 图

解：在附录Ⅳ中给出的是简支梁或悬臂梁的挠度和转角，为此，将这外伸梁沿 B 截面截开，看成是一简支梁和一悬臂梁。显然，在两段梁的截面 B 上应加上互相作用的力 $2qa$ 和力偶矩 $M_B=qa^2$，即截面 B 的剪力和弯矩值。由图 a 及 c(两图中梁的挠曲线是假定的)可见，图 c 中简支梁 BC 的受力情况与原外伸梁的 BC 段受力情况相同，因此，按叠加原理求得的简支梁 BC 的 θ_B 及 w_D，也就是原外伸梁 AC 的 θ_B 及 w_D。简支梁 BC 上的三项荷载中，集中力 $2qa$ 作用在支座处，不会使梁产生弯曲变形；由附录Ⅳ可分别查出由力偶矩 M_B 和均布荷载 q 所引起的 θ_B 和 w_D(图 d 及 e)，得

$$\theta_{Bq}=\frac{ql^3}{24EI}-\frac{q(2a)^3}{24EI}=\frac{1}{3}\frac{qa^3}{EI}$$

$$\theta_{BM}=-\frac{M_Bl}{3EI}=-\frac{qa^2(2a)}{3EI}=-\frac{2}{3}\frac{qa^3}{EI}$$

$$w_{Dq}=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}=\frac{5}{384}\frac{q(2a)^4}{EI}=\frac{5}{24}\frac{qa^4}{EI}$$

$$w_{DM}=-\frac{M_Bl^2}{16EI}=-\frac{qa^2(2a)^2}{16EI}=-\frac{1}{4}\frac{qa^4}{EI}$$

于是，按叠加原理得

$$\theta_B=\theta_{Bq}+\theta_{BM}=-\frac{1}{3}\frac{qa^3}{EI}$$

$$w_D=w_{Dq}+w_{DM}=-\frac{1}{24}\frac{qa^4}{EI}$$

原外伸梁 AC 的 A 端挠度 w_A 也可按叠加原理求得。由图 a，b 和 c 可见，由于截面 B 的转动，带动 AB 段作刚体转动，从而使 A 端产生挠度 w_1，而由 AB 段本身弯曲变形引起的挠度，即为悬臂梁(图 b)的挠度 w_2，因此，A 端的总挠度应为

$$w_A=w_1+w_2=-\theta_B\cdot a+w_2$$

式中的 $\theta_B\cdot a$ 这一项具有负号，是因图 c 中的 θ_B 为负值(逆时针向转动)时将产生正值的 w_1。将 θ_B 及 w_2 值代入上式，得

$$w_A=\frac{1}{3}\frac{qa^4}{EI}+\frac{1}{4}\frac{qa^4}{EI}=\frac{7}{12}\frac{qa^4}{EI}$$

*§5－4 梁挠曲线的初参数方程

本节介绍一种适宜用计算机计算弯曲位移的方法。在这种方法中，不论荷

载如何复杂,梁的挠曲线方程都能用一个统一的方程来表达。

如§5-2中所述,根据等直梁的挠曲线近似微分方程,通过两次积分所得的挠曲线方程,其两个积分常数可用 $EI\theta_0$ 和 EIw_0 来表示。其中 θ_0 和 w_0 分别代表坐标原点 $x=0$ 处截面的转角和挠度,习惯上称为**初参数**。本节将进一步给出用坐标原点处截面上的剪力 F_{S0},弯矩 M_0 以及 θ_0,w_0 四个初参数来表达的挠曲线方程,这种方程称为梁**挠曲线的初参数方程**。为此,先导出等直梁挠曲线的四阶微分方程。

弯曲刚度为 EI 的等直梁挠曲线的近似微分方程为

$$EIw'' = -M(x) \tag{a}$$

又梁的弯矩、剪力与荷载集度间存在着如下的微分关系:

$$M'(x) = F_S(x) \tag{b}$$

$$F'_S(x) = q(x) \tag{c}$$

式中,$q(x)$以向上为正。

将式(a)的两端对 x 取二阶导数,并由(b),(c)两式的关系,即可得等直梁挠曲线的四阶微分方程:

$$EIw'''' = -q(x) \tag{d}$$

应用式(d)推导梁的挠曲线方程,需经过四次积分:

$$EIw''' = -M'(x) = -F_S(x) = -\int q(x)\mathrm{d}x + C_1 \tag{e}$$

$$EIw'' = -M(x) = -\iint q(x)\mathrm{d}x^2 + C_1x + C_2 \tag{f}$$

$$EIw' = EI\theta = -\iiint q(x)\mathrm{d}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3 \tag{g}$$

$$EIw = -\iiiint q(x)\mathrm{d}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4 \tag{h}$$

当以 $x=0$ 代入以上四式时,以 x 为自变量在坐标原点处的一系列定积分 $\int_0^0 q(x)\mathrm{d}x$,$\iint_0^0 q(x)\mathrm{d}x^2$ 等等均等于零,于是,可得积分常数为

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -F_{S0} \\ C_2 &= -M_0 \\ C_3 &= EI\theta_0 \\ C_4 &= EIw_0 \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

式中,F_{S0},M_0,θ_0 和 w_0 分别为坐标原点处横截面上的剪力、弯矩、转角和挠度,均称为初参数。将式(i)代入式(h),即得

$$EIw = -\iiiint q(x)\mathrm{d}x^4 - \frac{F_{S0}}{6}x^3 - \frac{M_0}{2}x^2 + EI\theta_0x + EIw_0 \tag{5-4}$$

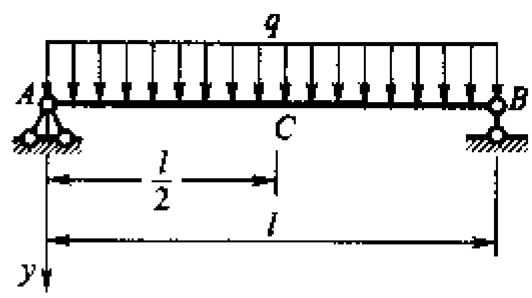
上式即等直梁挠曲线的初参数方程。此外，若将式(i)代入式(g)，从而得到等直梁转角的初参数方程

$$EI\theta=-\iiint q(x)\mathrm{d}x^3-\frac{F_{S0}}{2}x^2-M_0x+EI\theta_0 \qquad (5-5)$$

当简支梁或悬臂梁受满布的分布荷载作用时，应用式(5-4)极易得到挠曲线方程，其中四个初参数 F_{S0}，M_0，θ_0 和 w_0 可由梁端部的边界条件确定。当梁的支座情况和承受的外力较为复杂时，应用初参数方程计算梁的挠度或转角虽比较麻烦，但若采用类似于例题5-3中的规则，并在电子计算机上排出程序进行计算，则有其独到的优点。

例题 5-7　试用初参数方程求图示弯曲刚度为 EI 的简支梁在均布荷载作用下的跨中挠度 w_C 和支座 B 处截面的转角 θ_B。

解：首先求梁挠曲线初参数方程(7-7)中的四个初参数。在坐标原点处的剪力 $F_{S0}=\frac{ql}{2}$，弯矩 M_0 和挠度 w_0 均等于零。而转角 θ_0 则需通过简支梁在右支座 B(即 $x=l$)处挠度等于零的边界条件，由式(5-4)求得。因均布荷载向下，故式中的 q 应加上负号。于是有



例题 5-7 图

$$0=-\frac{(-q)l^4}{24}-\frac{ql^4}{12}+EI\theta_0 l$$

从而可得

$$\theta_0=\frac{ql^3}{24EI} \qquad (1)$$

求得四个初参数后，即可由式(5-4)得到梁的挠曲线方程

$$EIw=-\frac{(-q)x^4}{24}-\frac{ql}{12}x^3+\frac{ql^3}{24}x \qquad (2)$$

以 $x=\frac{l}{2}$ 代入式(2)，即可得梁跨中 C 点处截面的挠度为

$$w_C=\frac{5ql^4}{384EI}$$

将初参数代入梁转角的初参数方程(5-5)，可得梁的转角方程

$$EI\theta=-(-q)\frac{x^3}{6}-\frac{ql}{4}x^2+\frac{ql^3}{24}$$

以 $x=l$ 代入，即可求得支座 B 处截面的转角为

$$\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$$

通过本例可见,在确定初参数时,除要利用支座处位移的边界条件外,还需利用力的边界条件。此外,还需注意各初参数以及荷载的正负号的规定。

§5-5 梁的刚度校核·提高梁的刚度的措施

I. 梁的刚度校核

在按强度条件选择了梁的截面后,往往还需对梁进行刚度校核。若梁的位移超过了规定的限度,则其正常工作条件就得不到保证。在土建结构中,通常对梁的挠度加以限制,例如桥梁的挠度过大,则在机车通过时将发生很大的振动。在机械制造中,往往对挠度和转角都有一定的限制,例如机床主轴的挠度过大,将影响其加工精度;传动轴在支座处转角过大,将使轴承发生严重的磨损等等。

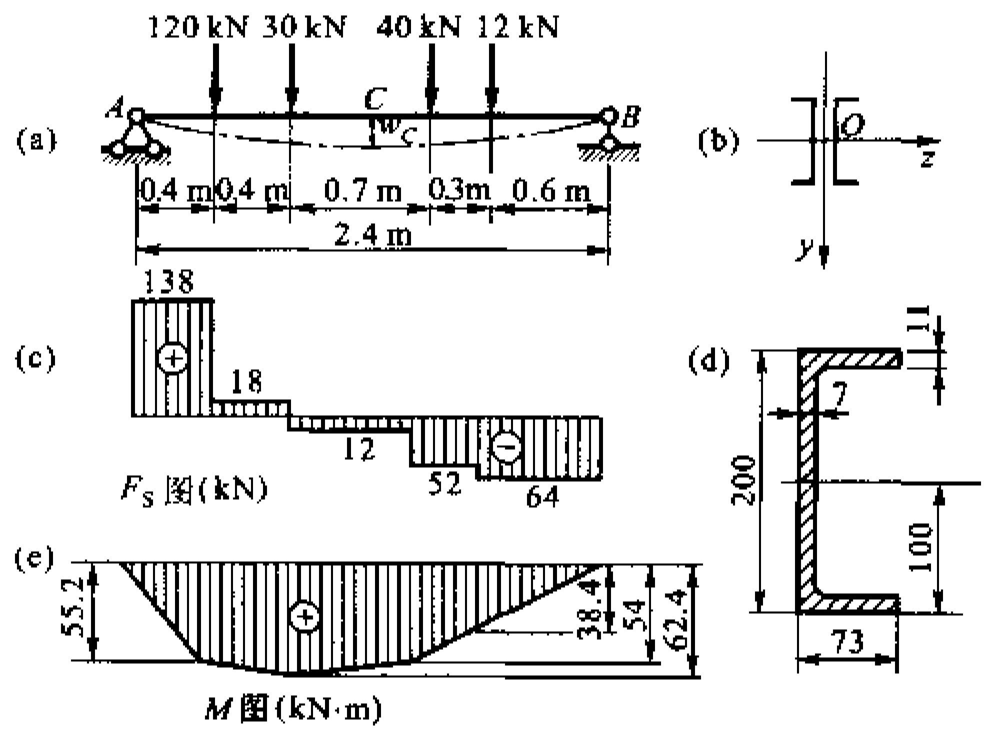
在各类工程设计中,对构件弯曲位移的许可值有不同的规定。对于梁的挠度,其许可值通常用许可的挠度与跨长之比值$\left[\frac{w}{l}\right]$作为标准。例如在土建工程中,$\left[\frac{w}{l}\right]$值常限制在$\frac{1}{250}\sim\frac{1}{1\,000}$范围内;在机械制造工程中,对主要的轴,$\left[\frac{w}{l}\right]$值则限制在$\frac{1}{5\,000}\sim\frac{1}{10\,000}$范围内;对传动轴在支座处的许可转角$[\theta]$一般限制在0.005~0.001 rad范围内。

梁的刚度条件可表达为

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_{max}}{l} &\leqslant \left[\frac{w}{l}\right]\\ \theta_{max} &\leqslant [\theta]\end{aligned}\right\} \qquad (5-6)$$

应当指出,一般土建工程中的构件,强度要求如能满足,刚度条件一般也能满足。因此,在设计工作中,刚度要求常处于从属地位。但当对构件的位移限制很严,或按强度条件所选用的构件截面过于单薄时,刚度条件也可能起控制作用。

例题 5-8 一简支梁承受四个集中荷载,如图a所示。该梁由两根槽钢组成,如图b。已知钢的许用弯曲正应力$[\sigma]=170$ MPa,许用切应力$[\tau]=100$ MPa,弹性模量$E=210$ GPa,梁的许可挠度与跨长之比值为$\left[\frac{w}{l}\right]=\frac{1}{400}$。试按强度条件选择槽钢的型号,并校核梁的刚度。



例题 5-8 图

解：首先，按正应力强度选择槽钢型号。作梁的弯矩图如图 c，最大弯矩值为

$$M_{max}=62.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

按正应力强度条件，梁所需的弯曲截面系数为

$$\frac{M_{max}}{[\sigma]}=\frac{62.4\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{170\times10^6\ \text{Pa}}=367\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

而每一槽钢所需的弯曲截面系数 $W_z=\dfrac{367\times10^{-4}\ \text{m}^3}{2}=183.5\times10^{-6}\ \text{m}^3$。由型钢规格表选用 20a 号槽钢，其弯曲截面系数为

$$W_z=178\ \text{cm}^3$$

当选用两根 20a 号槽钢时，梁内的最大正应力为

$$\sigma_{max}=\frac{62.4\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{2\times(178\times10^{-6}\ \text{m}^3)}=175\times10^6\ \text{Pa}=175\ \text{MPa}$$

超过许用弯曲正应力约 3%，其差值在一般规定的 5% 范围内，是允许的。

其次，校核梁的切应力强度。为此，根据 20a 号槽钢截面简化后的尺寸(图 d)，计算其中性轴一侧的面积对中性轴的静矩

$$\begin{aligned}S^*_{z\max}&=(73\ \text{mm}\times100\ \text{mm}\times50\ \text{mm})-(100-11)\ \text{mm}\times\\&\quad(73-7)\ \text{mm}\times\frac{(100-11)\ \text{mm}}{2}\\&=104\ 000\ \text{mm}^3\end{aligned}$$

由型钢规格表查得 20a 号槽钢的 $I_z=1\ 780\ \text{cm}^4$，而每一槽钢的最大剪力为

$$\frac{F_{S,max}}{2}=\frac{138\times10^3\ \text{N}}{2}=69\times10^3\ \text{N}$$

将上列各值及 $d=7\ \text{mm}$ 代入切应力强度条件(4－17)，有

$$\frac{(69\times10^3\ \text{N})(104\times10^{-6}\ \text{m}^3)}{(1\ 780\times10^{-8}\ \text{m}^4)(7\times10^{-3}\ \text{m})}=57.5\times10^6\ \text{Pa}=57.5\ \text{MPa}<[\tau]$$

可见，20a 号槽钢满足切应力强度条件。

最后，校核梁的刚度条件。由于梁上各集中荷载的指向相同，其挠曲线无拐点，故可将梁跨中点 C 处的挠度 w_C 作为梁的最大挠度 $w_{\max}$，并由叠加原理可得

$$\begin{aligned}w_{\max}\approx w_C&=\sum_{i=1}^{4}\frac{F_ib_i}{48EI}(3l^2-4b_i^2)\\&=\frac{1}{48EI}\Big[(120\times10^3\ \text{N})(0.4\ \text{m})\times(3\times2.4^2\ \text{m}^2-4\times0.4^2\ \text{m}^2)+\\&\quad(30\times10^3\ \text{N})(0.8\ \text{m})\times(3\times2.4^2\ \text{m}^2-4\times0.8^2\ \text{m}^2)+\\&\quad(40\times10^3\ \text{N})(0.9\ \text{m})\times(3\times2.4^2\ \text{m}^2-4\times0.9^2\ \text{m}^2)+\\&\quad(12\times10^3\ \text{N})(0.6\ \text{m})\times(3\times2.4^2\ \text{m}^2-4\times0.6^2\ \text{m}^2)\Big]\\&=\frac{1\ 671\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}^3}{48(210\times10^9\ \text{Pa})(2\times1\ 780\times10^{-8}\ \text{m}^4)}=4.66\times10^{-3}\ \text{m}\end{aligned}$$

注意，在计算 120 kN 和 30 kN 两荷载所引起的挠度时，取支座 A 到荷载作用点的距离作为附录Ⅳ中第 11 种情况中的 b 值，即实质上是将坐标原点取在 B 点来应用上述公式的。

梁的许可挠度为

$$[w]=\left[\frac{w}{l}\right]\times l=\frac{1}{400}\times2.4\ \text{m}=6\times10^{-3}\ \text{m}=6\ \text{mm}$$

由于

$$w_{\max}=4.66\ \text{mm}<[w]$$

因此，所选用的槽钢满足刚度条件的要求。

II. 提高梁的刚度的措施

由梁的位移表(附录Ⅳ)可见，梁的位移(挠度和转角)除了与梁的支承和荷载情况有关外，还取决于以下三个因素，即

材料——梁的位移与材料的弹性模量 E 成反比；

截面——梁的位移与截面的惯性矩 I 成反比；

跨长——梁的位移与跨长 l 的 n 次幂成正比(在各种不同荷载形式下，n 分别等于 1，2，3 或 4)。由此可见，为了减小梁的位移，可以采取下列措施：

1. 增大梁的弯曲刚度 EI　对于钢材来说，采用高强度钢可以显著提高梁的强度，但对刚度的改善并不明显，因高强度钢与普通低碳钢的 E 值是相近的。因此，为增大梁的刚度，应设法增大 I 值。在截面面积不变的情况下，采用适当

形状的截面使截面面积分布在距中性轴较远处，以增大截面的惯性矩 I，这样不仅可降低应力，而且能增大梁的弯曲刚度以减小位移。所以工程上常采用工字形、箱形等截面。

2. 调整跨长和改变结构 由于梁的挠度和转角值与其跨长的 n 次幂成正比，因此，设法缩短梁的跨长，将能显著地减小其挠度和转角值。桥式起重机的钢梁通常采用两端外伸的结构(图 5-5a)，就是为缩短跨长从而减小梁的最大挠度值。同时，由于梁的外伸部分的自重作用，将使梁的 AB 跨产生向上的挠度(图 5-5b)，从而使 AB 跨的向下挠度有所减小。此外，增加梁的支座也可减小其挠度，例如在悬臂梁的自由端或者简支梁的跨中增加一个支座，均可使梁的挠度显著减小。但采取这种措施后，原来的静定梁就变成为超静定梁。关于超静定梁的解法将在第六章中介绍。

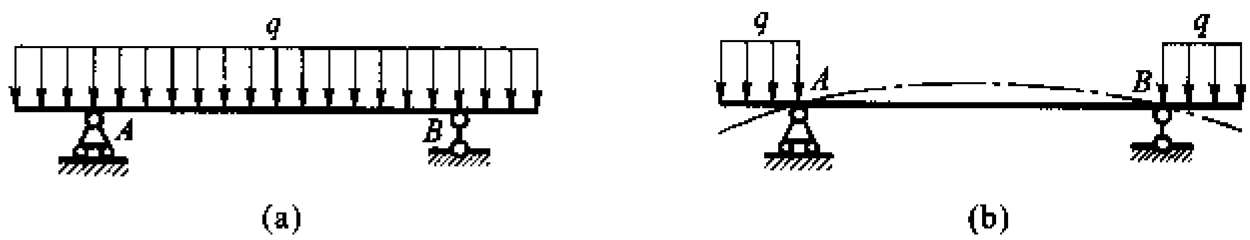


图 5-5

§5-6 梁内的弯曲应变能

当梁弯曲时，梁内将积蓄应变能。先讨论梁在纯弯曲(图 5-6a)时的应变能。在弹性体变形过程中，外力所作的功 W 在数值上等于积蓄在弹性体内的应变能 V_ε。梁在纯弯曲时只受外力偶作用，因此，其弯曲应变能 V_ε 在数值上就等于作用在梁上的外力偶所作的功 W。

由于梁在纯弯曲时各横截面上的弯矩 M 都等于外力偶矩 M_e，即为常数。当梁在线弹性范围内工作时，由式(4-4)可知，梁轴线在弯曲后将成一曲率为 κ

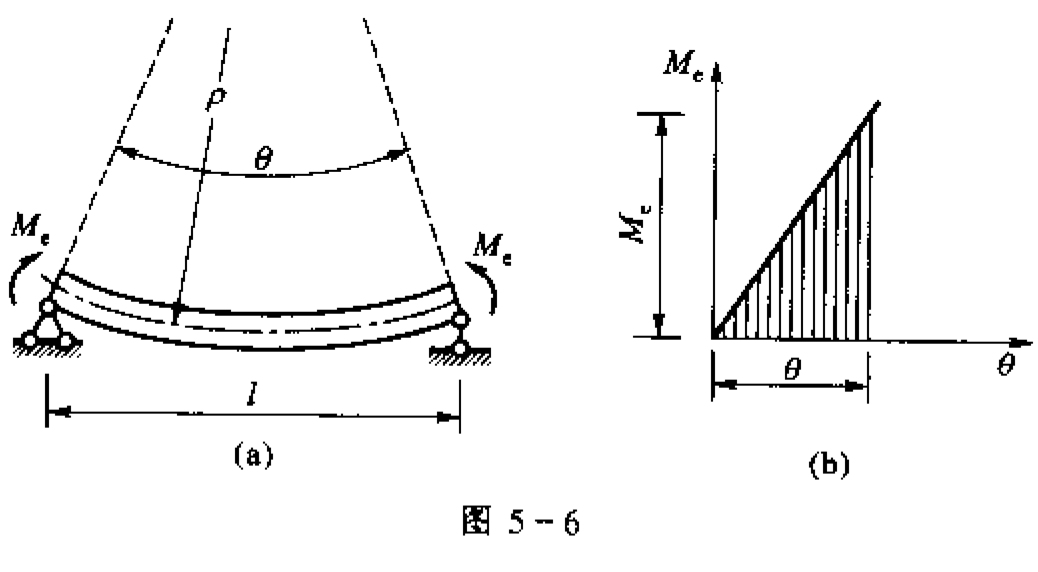


图 5-6

$=\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$的圆弧，其所对的圆心角为

$$\theta=\frac{l}{\rho}=\frac{Ml}{EI} \tag{a}$$

或

$$\theta=\frac{M_e l}{EI} \tag{b}$$

由式(b)得知，θ 与 M_e 间的关系可由图 5-6b 所示直线表示。直线下的三角形面积就代表外力偶所作的功 W，即

$$W=\frac{1}{2}M_e\theta$$

从而得纯弯曲时梁的弯曲应变能为

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}M_e\theta \tag{c}$$

由于 $M=M_e$，故上式又可改写为

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}M\theta \tag{d}$$

将(b)，(a)两式中的 θ 分别代入(c)，(d)两式，即得

$$V_\varepsilon=\frac{M_e^2 l}{2EI} \tag{5-7a}$$

和

$$V_\varepsilon=\frac{M^2 l}{2EI} \tag{5-7b}$$

在横力弯曲时，梁内应变能包含两个部分：与弯曲变形相应的弯曲应变能和与剪切变形相应的剪切应变能。对于弯曲应变能，取长为 dx 的梁段(图 5-7)，其相邻两横截面上的弯矩应分别为 $M(x)$和 $M(x)+dM(x)$，而弯矩的增量为一阶无穷小，可略去不计，于是可按式(5-7b)计算其弯曲应变能为

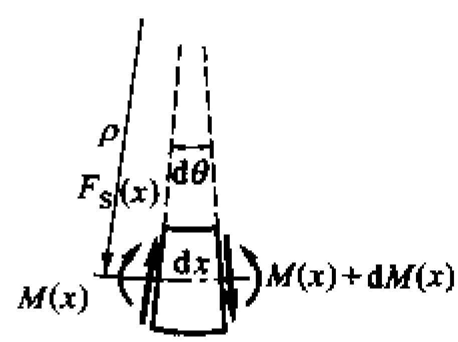


图 5-7

$$dV_\varepsilon=\frac{M^2(x)}{2EI}dx$$

全梁的弯曲应变能则可通过积分求得为

$$V_\varepsilon=\int_l\frac{M^2(x)}{2EI}dx \tag{5-8}$$

式中，$M(x)$为梁任一横截面上的弯矩表达式。当各段梁的弯矩表达式不同时，积分也须分段进行。至于剪切应变能，则将在《材料力学(II)》的第三章中讨论。由于在工程中常用的梁的跨长往往大于横截面高度的 10 倍，因面梁的剪切应变

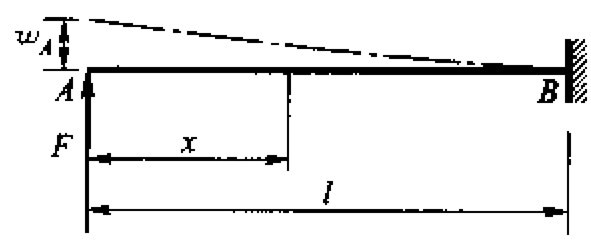
能与弯曲应变能相比常可略去不计。

根据式(5-2b)，$EIw''=-M(x)$，于是，式(5-8)可写为

$$V_\varepsilon=\int_l \frac{(-EIw'')^2}{2EI}\mathrm{d}x=\frac{EI}{2}\int_l (w'')^2\mathrm{d}x \tag{5-9}$$

显然，以上各式只有当梁在线弹性范围内工作时才是适用的。

例题 5-9　弯曲刚度为 EI 的悬臂梁受一集中荷载 F 作用，如图所示。试求梁内积蓄的弯曲应变能 V_ε，并利用功能原理求 A 端的挠度 w_A。



例题 5-9 图

解：梁任一横截面上的弯矩为

$$M(x)=Fx$$

代入式(5-8)，经过积分即得梁内的应变能为

$$V_\varepsilon=\int_0^l \frac{F^2x^2}{2EI}\mathrm{d}x=\frac{F^2l^3}{6EI}$$

荷载 F 所作的功为

$$W=\frac{1}{2}Fw_A$$

应与梁内的应变能 V_ε 相等，即

$$\frac{1}{2}Fw_A=\frac{F^2l^3}{6EI}$$

由此可得 A 端的挠度为

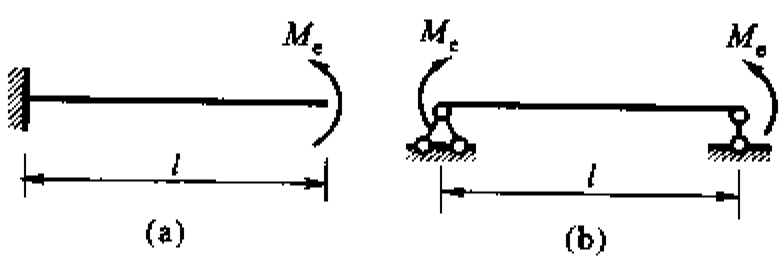
$$w_A=\frac{Fl^3}{3EI}$$

以上求得的 w_A 为正值，由功的概念可知，w_A 与力 F 的指向相同(即向上)。

思　考　题

5-1　梁的截面位移与变形有何区别？有何联系？图 a,b 所示两梁的尺寸及材料完全相同，所受外力也一样，只是支座处的几何约束条件不同。试问：(1) 两梁的弯曲变形是否相同？(2) 两梁相应横截面的位移是否相等？

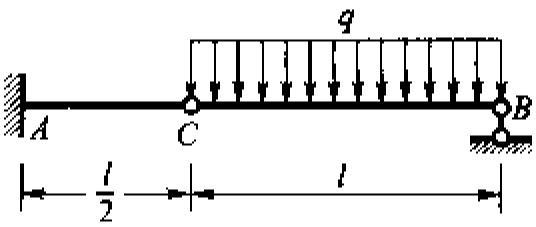
5-2　试用积分法求图示中间铰梁截面 C 的挠度 w_C 及相对转角 θ_C。



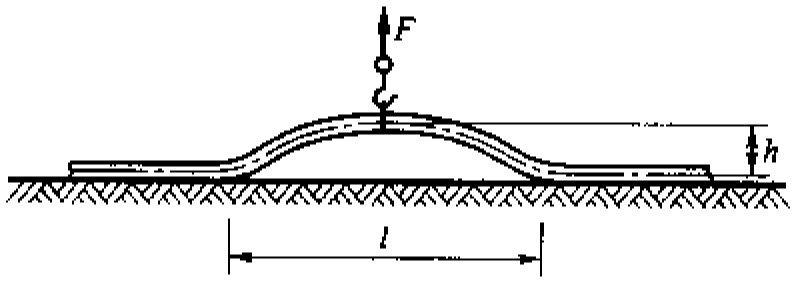
思考题 5-1 图

5－3 外径 $D=500$ mm、壁厚 $\delta=10$ mm 的钢管自由放在地面上，设管子为无限长而地基是刚件的。已知钢管材料的弹性模量 $E=200$ GPa，密度 $\rho=8.0$ kN/m^3。若起吊高度 $h=100$ mm，试问起吊部分的长度 l 及起吊力 F 应为多大？

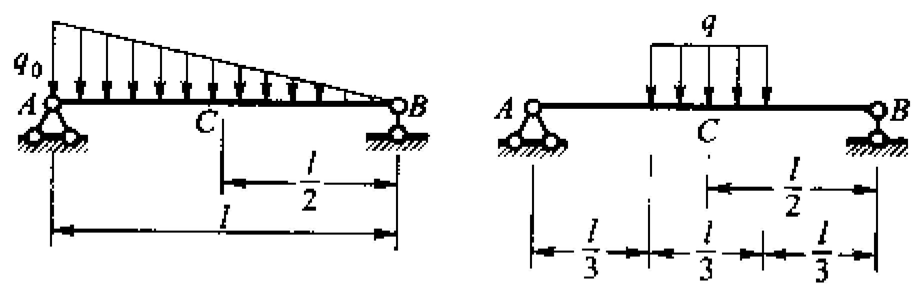
5－4 试按叠加原理并利用附录 IV 求下列梁跨中截面的挠度 w_C



思考题 5－2 图



思考题 5－3 图

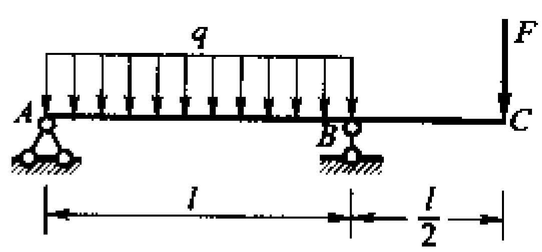


思考题 5－4 图

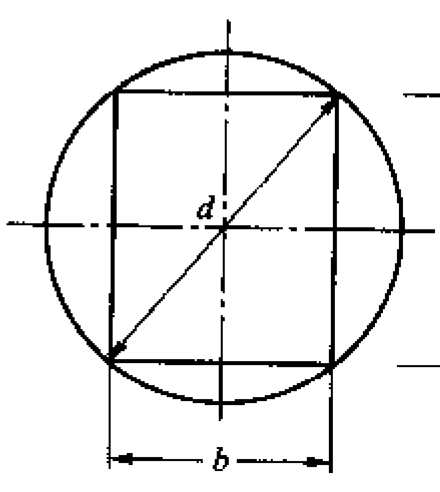
5－5 为使荷载 F 作用点之挠度 w_C 等于零，试求荷载 F 与 q 间的关系。

5－6 等直梁挠曲线的初参数方程(5－4)，在什么条件下可以应用？

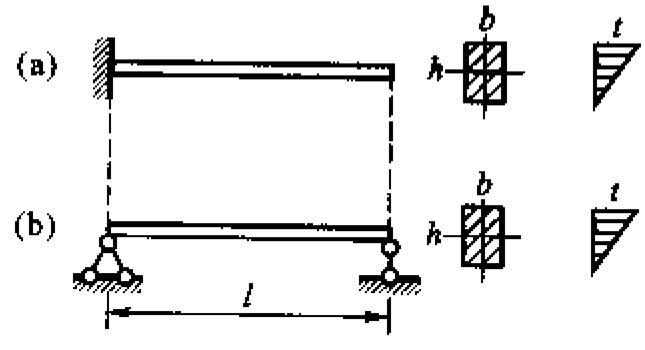
5－7 欲在直径为 d 的圆木中锯出弯曲刚度为最大的矩形截面梁(如图)，试求截面高度 h 与宽度 b 的合理比值。



思考题 5－5 图



思考题 5－7 图



思考题 5－8 图

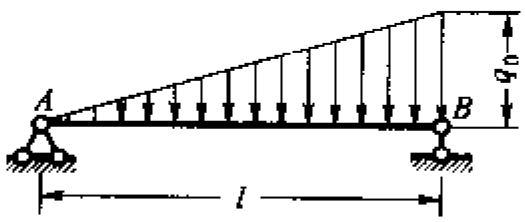
5-8 图示两梁的尺寸、材料均分别相同。当温度沿横截面高度按直线规律变化 t 时，试比较两梁中的最大正应力及最大挠度．已知材料的线膨胀系数为 α_l，弹性模量为 E。

习　题

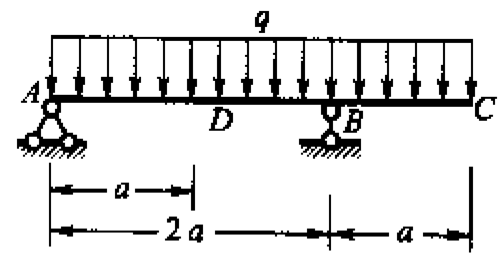
5-1 试用积分法验算附录 IV 中第 1 至第 8 项各梁的挠曲线方程及最大挠度、梁端转角的表达式。

5-2 简支梁承受荷载如图所示，试用积分法求 θ_A，θ_B，并求 w_{max} 所在截面的位置及该挠度的算式。

5-3 外伸梁承受均布荷载如图所示，试用积分法求 θ_A，θ_B 及 w_D，w_C。



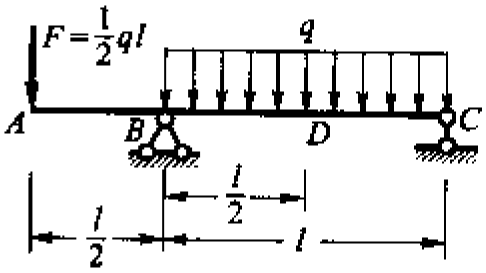
习题 5-2 图



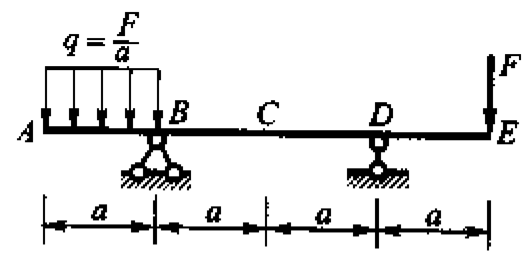
习题 5-3 图

5-4 试用积分法求图示外伸梁的 θ_A，θ_B 及 w_A，w_D。

5-5 外伸梁如图所示，试用积分法求 w_A，w_C 和 w_E。



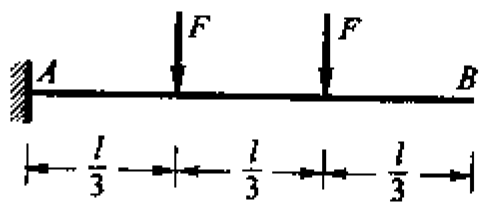
习题 5-4 图



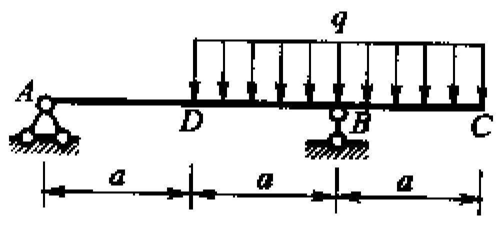
习题 5-5 图

5-6 试用积分法求图示悬臂梁 B 端的挠度 w_B。

5-7 试用积分法求图示外伸梁的 θ_A 和 w_C。



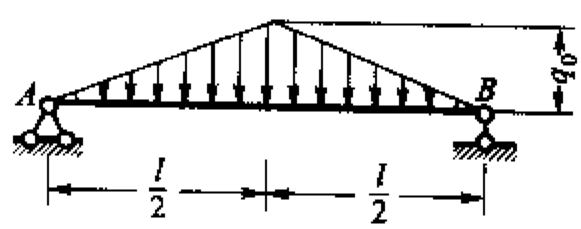
习题 5-6 图



习题 5-7 图

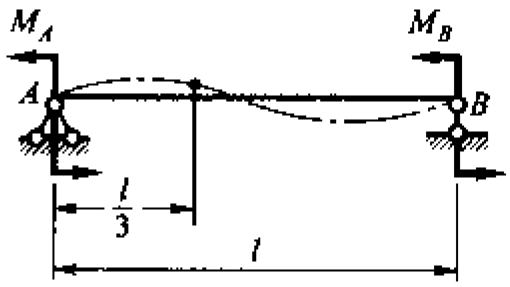
5-8 简支梁承受荷载如图所示，试用积分法求 θ_A，θ_B 和 w_{max}。

5-9 在简支梁的左、右支座上，分别有力偶 M_A 和 M_B 作用，如图所示。为使该梁挠曲线的拐点位于距左端 $\frac{l}{3}$ 处，试求 M_A 与 M_B 间的关系。

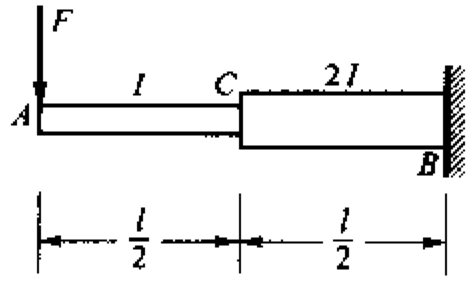


习题 5-8 图

5-10　变截面悬臂梁及其荷载如图所示，试用积分法求梁 A 端的挠度 w_A。



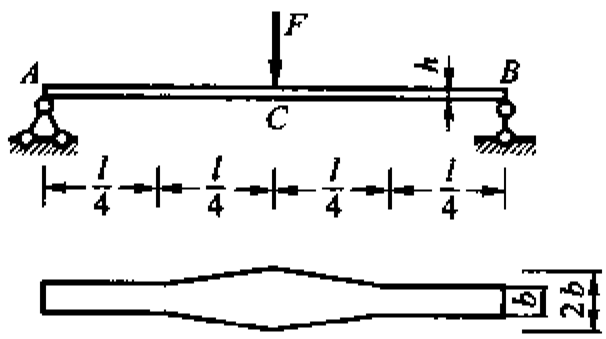
习题 5-9 图



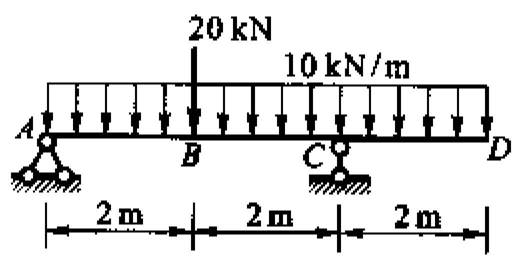
习题 5-10 图

5-11　变截面简支梁及其荷载如图所示，试用积分法求跨中挠度 w_C。

5-12　试用积分法求图示外伸梁 w_B 及 w_D 的值。已知梁由 18 号工字钢制成，$E=210$ GPa。



习题 5-11 图



习题 5-12 图

5-13　试按叠加原理并利用附录 IV 求解习题 5-4。

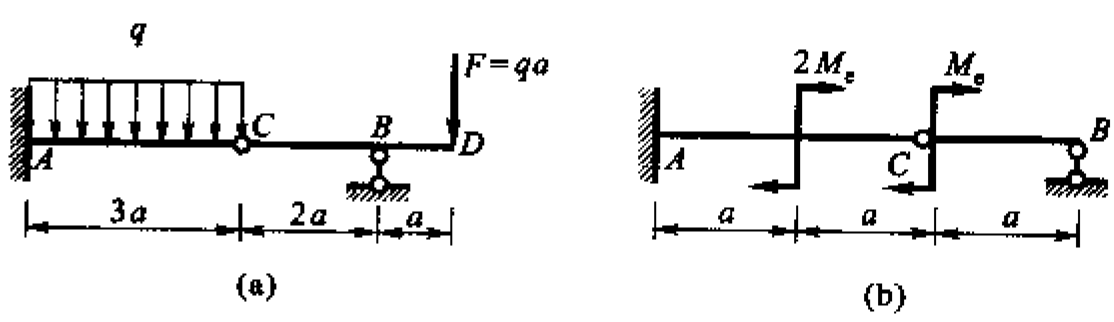
5-14　试按叠加原理并利用附录 IV 求解习题 5-5。

5-15　试按叠加原理并利用附录 IV 求解习题 5-10。

5-16　试按叠加原理并利用附录 IV 求解习题 5-7 中的 w_C。

5-17　试按叠加原理并利用附录 IV 求解习题 5-12。

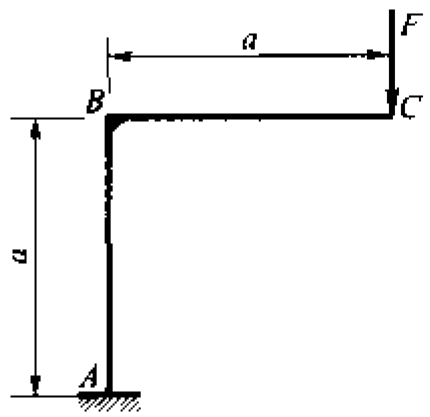
5-18　试按叠加原理求图示梁中间铰 C 处的挠度 w_C，并描出梁挠曲线的大致形状。已知 EI 为常量。



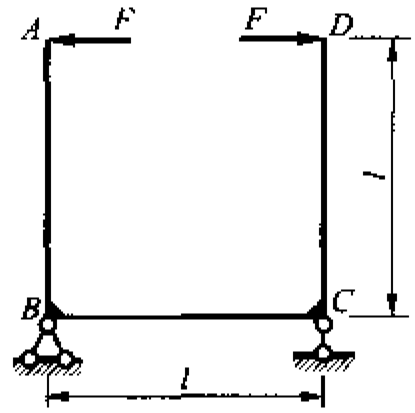
习题 5-18 图

5-19　试按叠加原理求图示平面折杆自由端截面 C 的铅垂位移和水平位移。已知杆各段的横截面面积均为 A，弯曲刚度均为 EI。

5-20　图示结构中，在截面 A、D 处承受一对等值、反向的力 F，已知各段杆的 EI 均相等。试按叠加原理求 A、D 两截面间的相对位移。



习题5－19图



习题5－20图

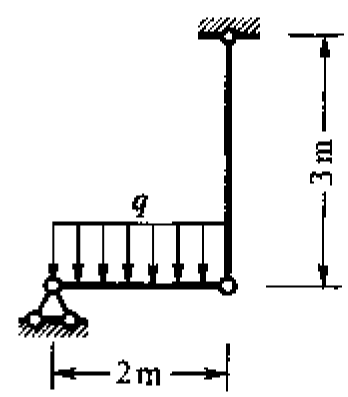
*5－21　试用初参数法验算附录Ⅳ中第2项中梁的最大挠度及梁端转角的表达式。

*5－22　试用初参数法验算附录Ⅳ中第5项中梁的最大挠度及梁端转角的表达式。

*5－23　试用初参数法验算附录Ⅳ中第9项中梁跨中截面的挠度及支座处截面的转角表达式。

*5－24　在简支梁的两支座截面上分别承受外力偶矩 M_A 和 M_B，如题5－9图所示。已知该梁的弯曲刚度为 EI，试用初参数法求 θ_A。

5－25　松木桁条的横截面为圆形，跨长为4 m，两端可视为简支，全跨上作用有集度为 $q=1.82$ kN/m 的均布荷载。已知松木的许用应力 $[\sigma]=10$ MPa，弹性模量 $E=10$ GPa。桁条的许可相对挠度为 $\left[\frac{w}{l}\right]=\frac{1}{200}$。试求桁条横截面所需的直径。(桁条可视为等直圆木梁计算，直径以跨中为准。)



习题5－26图

5－26　图示木梁的右端由钢拉杆支承。已知梁的横截面为边长等于0.20 m的正方形，$q=40$ kN/m，$E_1=10$ GPa；钢拉杆的横截面面积 $A_2=250\ \text{mm}^2$，$E_2=210$ GPa。试求拉杆的伸长 Δl 及梁中点沿铅垂方向的位移 Δ。

第六章　简单的超静定问题

§6-1　超静定问题及其解法

前面所讨论的轴向拉压杆或杆系、受扭转的圆杆以及受弯曲的梁，其约束力或构件内力都能通过静力学的平衡方程求解，这类问题称为**静定问题**。

在工程实际中，有时为减小构件内的应力或变形(位移)，往往采用更多的构件或支座。例如大型承重桁架中某一结点由三杆铰接而成(图6-1a)，由于平面汇交力系仅有2个独立的平衡方程，显然，仅由静力学平衡方程不可能求出3个未知轴力；又如一个长跨度的简支梁，为降低其最大弯矩和最大挠度，在跨中增加一个支座(图6-1b)，由于平面平行力系仅有两个独立的平衡方程，故梁的三个支反力也不可能仅由静力平衡方程确定。这类不能单凭静力学平衡方程求解的问题，称为**超静定问题**。

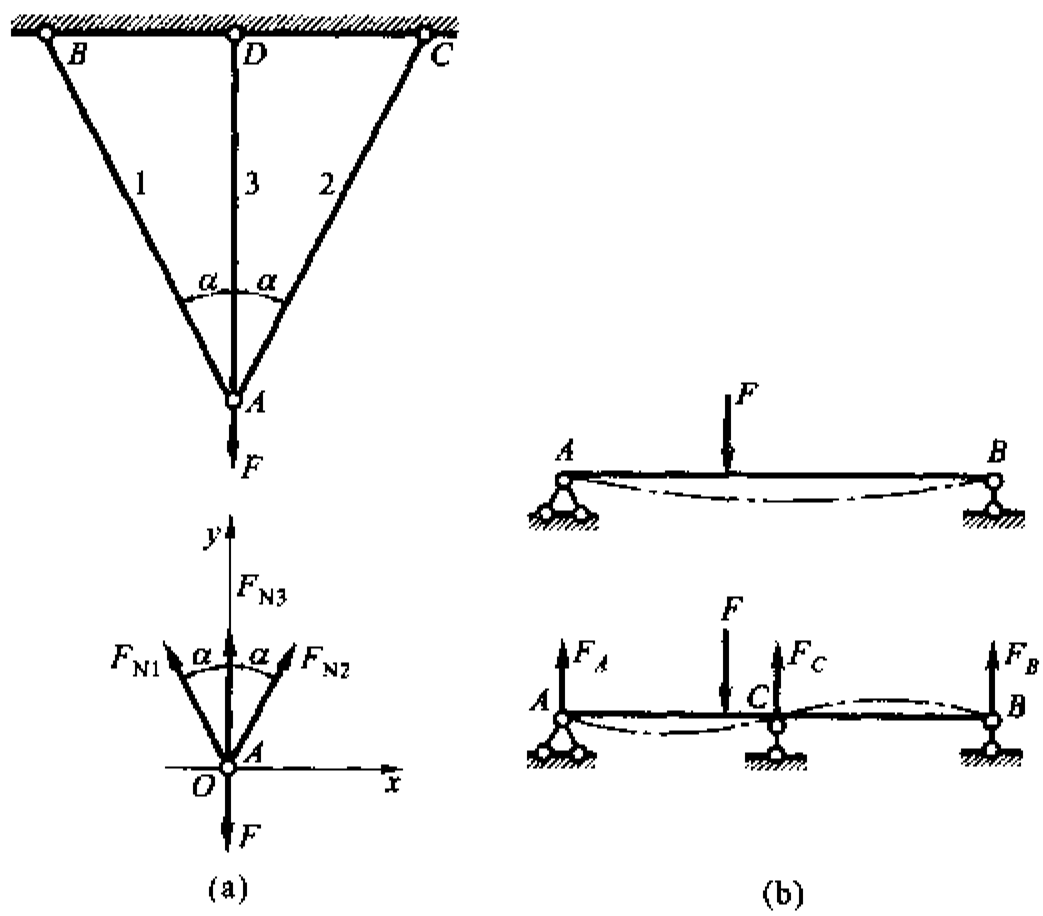


图6-1

在超静定问题中，都存在多于维持平衡所必需的支座或杆件，习惯上称其为**“多余”约束**。由于多余约束的存在，未知力的数目必然多于独立平衡方程的数

目。未知力数超过独立平衡方程数的数目，称为**超静定次数**。与多余约束相应的支反力或内力，习惯上称为**多余未知力**。因此，超静定的次数就等于多余约束或多余未知力的数目。

由于多余未知力的存在，未知力数超过独立的静力平衡方程数，因此，除了静力平衡方程外，还必须寻求补充方程。但是，也正是有“多余”约束的存在，杆件（或结构）的变形受到了多于静定结构的附加限制。于是，根据变形的几何相容条件，可建立附加的**变形几何相容方程**，而变形（或位移）与力（或其他产生变形的因素）间具有一定的物理关系，将物理关系代入变形几何相容方程，即可得补充方程。将静力平衡方程与补充方程联立求解，就可解出全部未知力。这就是综合运用变形的几何相容条件、物理关系和静力学平衡条件三方面，求解超静定问题的方法。实际上，在前面推导杆受轴向拉压、圆杆扭转和梁在对称弯曲下横截面上的应力时，就综合考虑了几何、物理和静力学三个方面，这是因为已知横截面上的内力求其应力的问题具有超静定的性质。

在求解由于支座多于维持平衡所必需的数目而形成的超静定结构时，可设想将某一处的支座当作“多余”约束予以解除，并在该处施加与所解除的约束相对应的支反力（多余未知力），从而得到一个作用有荷载和多余未知力的静定结构，称为原超静定结构的**基本静定系**或**相当系统**。为使基本静定系等同于原超静定结构，基本静定系在多余未知力作用处相应的位移应满足原超静定结构的约束条件，即变形相容条件。将力与位移间的物理关系代入变形相容方程，即可解得多余未知力。求得多余未知力后，基本静定系就等同于原超静定结构，其余的支反力，以及构件的内力、应力或变形（位移）均可按基本静定系进行计算。

下面分别以轴向拉压、扭转和弯曲的超静定问题来说明超静定问题的解法。

§6－2　拉压超静定问题

Ⅰ. 拉压超静定问题解法

如上节所述，对于拉压超静定问题，可综合运用变形的几何相容条件、力－变形间的物理关系和静力学的平衡条件三方面来求解。下面通过例题来说明其解法。

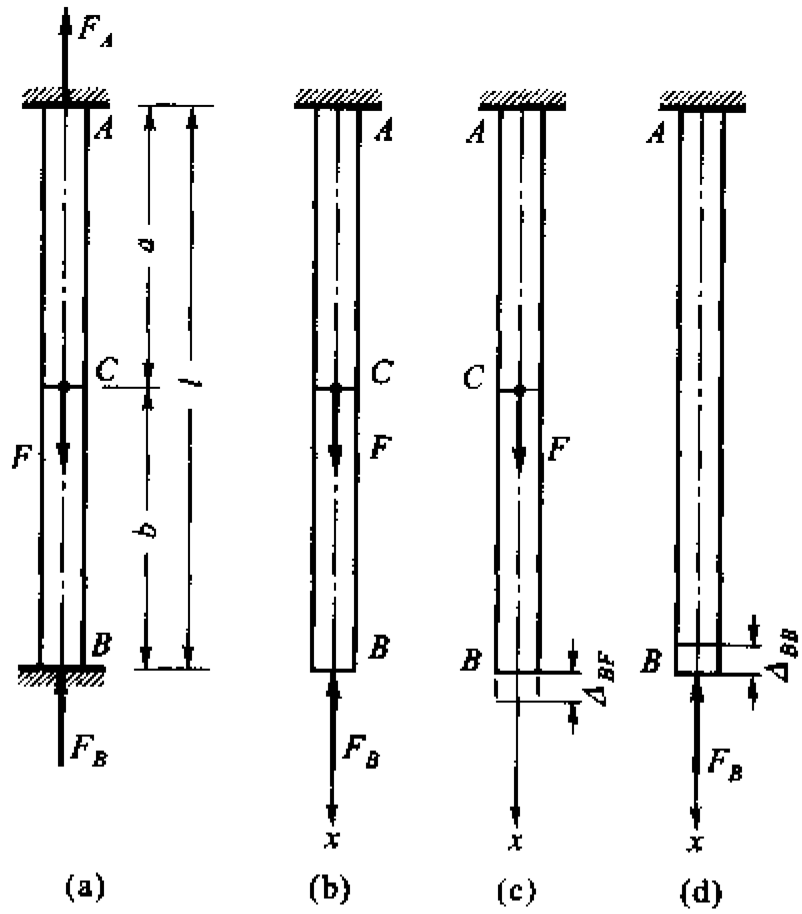
例题 6－1　两端固定的等直杆 AB，在 C 处承受轴向力 F（图 a），杆的拉压刚度为 EA，试求杆的支反力。

解：杆 AB 为轴向拉压杆，故杆上、下端的支反力也均为轴向力。共线力系仅有 1 个独立的平衡方程，故为一次超静定问题。

若选取下固定端 B 为多余约束予以解除，并在 B 端施加相应的多余未知力 F_B，从而得基本静定系如图 b 所示。根据原超静定杆 B 端的约束情况，基本静

定系在 B 端的位移应等于零。设基本静定系分别在荷载 F 和多余未知力 F_B 单独作用下，B 端的位移为 Δ_{BF} 和 Δ_{BB}（图 c 和 d）。于是，按叠加原理，根据变形几何相容条件，可得变形几何方程为

$$\Delta_{BF}+\Delta_{BB}=0 \tag{1}$$



例题 6－1 图

力与位移间的物理关系为

$$\Delta_{BF}=\frac{Fa}{EA} \tag{2}$$

$$\Delta_{BB}=-\frac{F_Bl}{EA} \tag{3}$$

式(3)中的负号，是因为假设 F_B 向上，引起的位移 Δ_{BB} 也向上。将物理关系式(2)、(3)代人式(1)，即得补充方程

$$\frac{Fa}{EA}-\frac{F_Bl}{EA}=0 \tag{4}$$

并由此解得多余未知力为

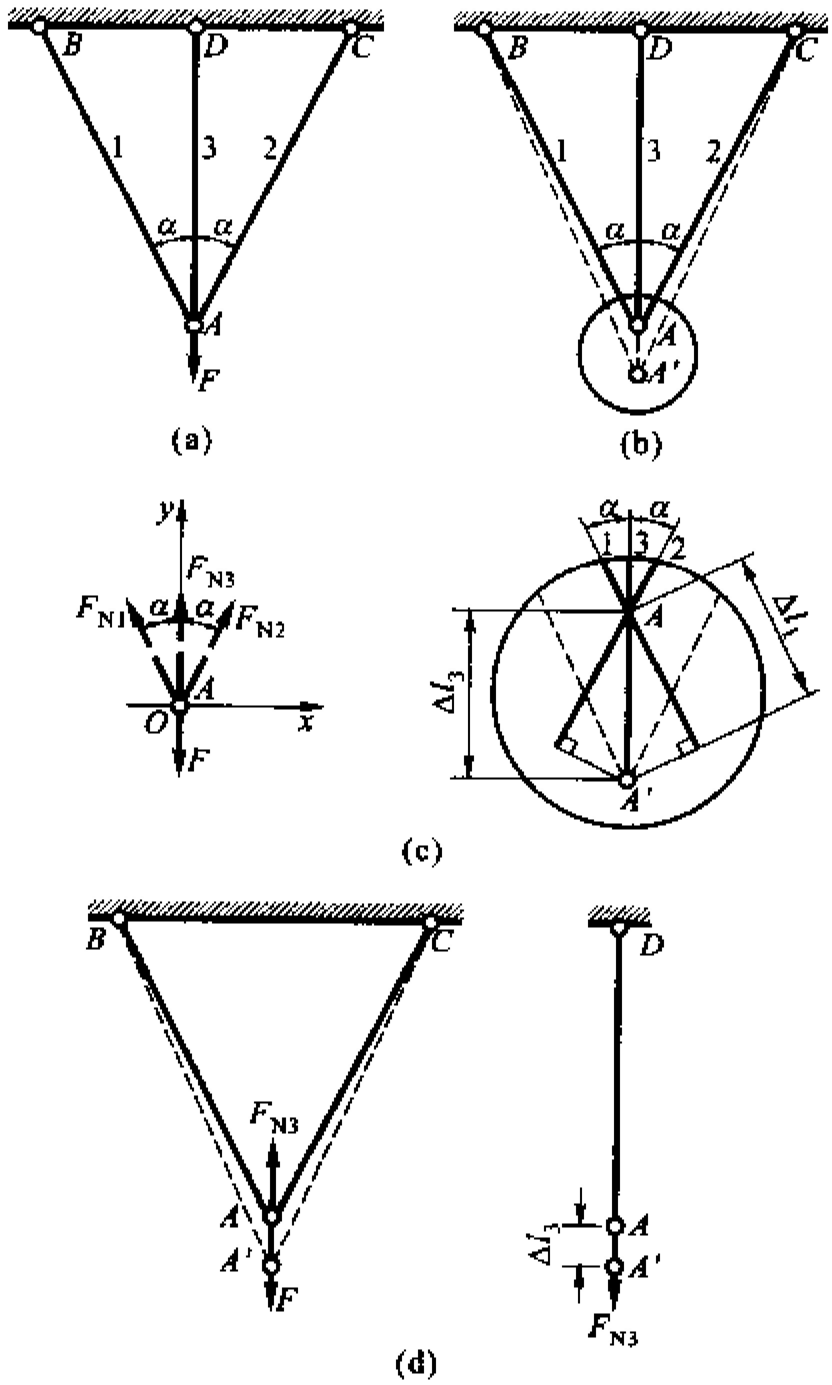
$$F_B=\frac{Fa}{l} \tag{5}$$

所得 F_B 为正号，表明其指向与原来的假设一致。

求得多余未知力 F_B 后，杆件上固定端的支反力 F_A，即可由基本静定系（图 b）的平衡条件求得。对于杆的轴力、应力、变形（位移），以及强度、刚度等计算，

均可按基本静定系进行。

例题 6-2 设 1,2,3 三杆用铰连接如图 a 所示。已知 1,2 两杆的长度、横截面面积及材料均相同,即 $l_1 = l_2 = l$, $A_1 = A_2 = A$, $E_1 = E_2 = E$;杆 3 的长度为 l_3,横截面面积为 A_3,其材料的弹性模量为 E_3。试求在沿铅垂方向的外力 F 作用下各杆的轴力。



例题 6-2 图

解:杆系共有三杆汇交于 A 点,其轴力都是未知量,但平面汇交力系仅有 2 个独立的平衡方程,故为一次超静定问题。

根据变形相容条件建立变形几何方程。由于三杆在下端连接于 A 点,故三杆在受力变形后,其下端仍应连接在一起,如 A' 点。由于问题在几何、物性及受力方面都是对称的,可见 A 点位移应铅垂向下,此时三杆均将伸长。1,2 两杆的伸长量 Δl_1 与杆 3 伸长量 Δl_3 之间的关系如图 b 所示。由此可得变形几何

方程为

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha \tag{1}$$

变形 Δl_1、Δl_3 与所求轴力 F_{N1}，F_{N3} 之间的物理关系式为

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l}{EA} \tag{2}$$

和

$$\Delta l_3 = \frac{F_{N3} l \cos\alpha}{E_3 A_3} \tag{3}$$

将式(2)和(3)代入式(1)，得补充方程为

$$F_{N1} = F_{N3} \frac{EA}{E_3 A_3} \cos^2\alpha \tag{4}$$

最后，建立结点 A 的平衡方程。由于在变形分析中，已认为三杆均为伸长，因此三杆的轴力均应相应地假定为拉力，如图 c 所示。由对称关系可知

$$F_{N1} = F_{N2} \tag{5}$$

另一平衡方程为

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1}\cos\alpha + F_{N2}\cos\alpha + F_{N3} - F = 0 \tag{6}$$

这里也因变形微小，略去了由各杆变形所引起的 α 角的微小改变。

联解(4)，(5)，(6)三式，整理后即得

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F}{2\cos\alpha + \dfrac{E_3 A_3}{EA\cos^2\alpha}} \tag{7}$$

$$F_{N3} = \frac{F}{1 + 2\dfrac{EA}{E_3 A_3}\cos^3\alpha} \tag{8}$$

所得结果均为正，说明原先假定三杆轴力均为拉力是正确的。上列结果表明，在超静定杆系问题中，各杆的轴力与该杆本身的刚度和其他杆的刚度之比有关。一般地讲，增加某杆的拉压刚度，该杆的轴力亦相应增大。

本例中也可把杆 3 看作多余约束，相应的多余未知力为 F_{N3}。这时，基本静定系如图 d 所示。同样可得变形几何方程为

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha$$

只是补充方程中包含有未知轴力 F_{N1} 和多余未知力 F_{N3}，仍需与平衡方程联立求解。

例题 6－2 是一次超静定问题，仅有一个多余约束，若再添一杆 AG（图6－2），则又增加了一个多余约束而成为二次超静定问题。此时为满足四杆在受力变形后仍然连接于一点的变形相容条

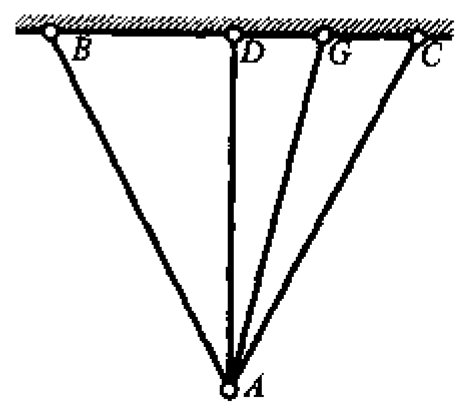


图 6－2

件，于是，可列出两个变形几何方程。依此类推，对于高于一次的超静定问题，总可以找到必要的变形几何方程，从而得到相应的补充方程，其补充方程和静力学平衡方程相合，就可求解超静定问题中的全部未知力。

II. 装配应力 · 温度应力

一、装配应力

杆件在制成后，其尺寸有微小误差往往是难免的。在静定问题中，这种误差本身只会使结构的几何形状略有改变，并不会在杆中产生附加的内力。但在超静定问题中，由于有了多余约束，就将产生附加的内力。例如在例题 6-2 图 a 所示杆系中，若杆 3 的尺寸较其应有的长度 DA 短了 Δe，如图 6-3 所示(图中的 Δe 是夸大了的)，则在杆系装配后，各杆将处于如图中虚线所示的位置，并因而产生轴力。此时杆 3 的轴力为拉力，而 1,2 两杆的轴力则为压力。像这种附加的内力称为**装配内力**。与之相应的应力则称为**装配应力**。装配应力是杆在荷载作用以前已经具有的应力，称为**初应力**。计算装配应力的关键仍然是根据变形相容条件列出变形几何方程。在图 6-3 所示的例子中，三杆装配后，与其约束相适应的变形相容条件是其下端必须汇交于同一点 A'。

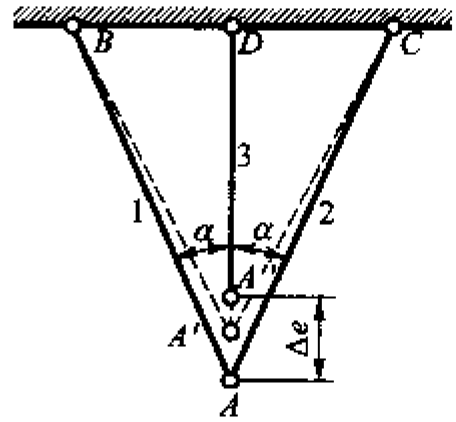


图 6-3

例题 6-3 两铸件用两钢杆 1,2 连接，其间距为 $l=200$ mm(图 a)。现需将制造得过长 $\Delta e=0.11$ mm 的铜杆 3(图 b)装入铸件之间，并保持三杆的轴线平行且有等间距 a。试计算各杆内的装配应力。已知：钢杆直径 $d=10$ mm，铜杆横截面为 20 mm×30 mm 的矩形，钢的弹性模量 $E=210$ GPa，铜的弹性模量 $E_3=100$ GPa。铸件很厚，其变形可略去不计。

解：本题中三根互相平行杆的轴力均为未知，但平面平行力系仅有两个独立的平衡方程，故为一次超静定问题。

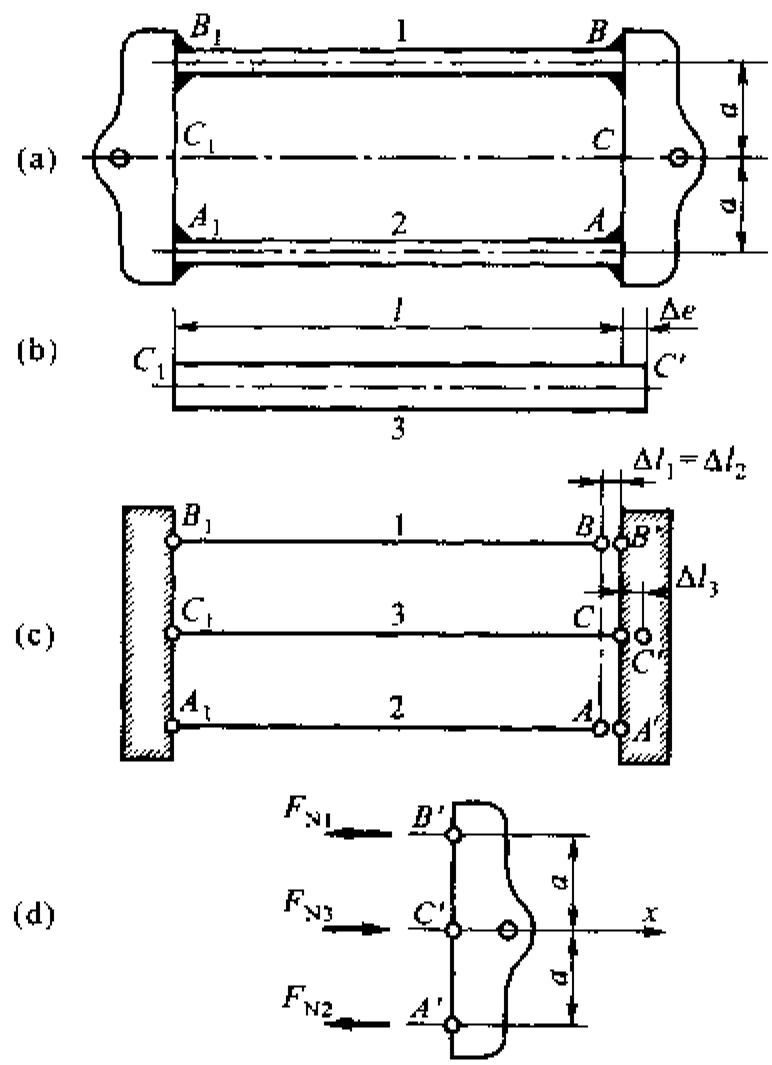
因铸件可视作刚体，其变形相容条件是三杆变形后的端点须在同一直线上。由于结构在几何和物性均对称于杆 3，故其变形关系图如图 c 所示。从而可得变形几何方程为

$$\Delta l_3 = \Delta e - \Delta l_1 \tag{1}$$

物理关系为

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l}{EA} \tag{2}$$

$$\Delta l_3 = \frac{F_{N3} l}{E_3 A_3} \tag{3}$$



例题 6－3 图

以上两式中的 A 和 A_3 分别为钢杆和铜杆的横截面面积。式(3)中的 l 在理论上应是杆 3 的原长度 $l+\Delta e$，但由于 Δe 与 l 相比甚小，故用 l 代替。

将(2)，(3)两式中的 Δl_1 和 Δl_3 代入式(1)，即得补充方程

$$\frac{F_{N3}l}{E_3A_3}=\Delta e-\frac{F_{N1}l}{EA} \tag{4}$$

在建立平衡方程时，由于上面已判定 1，2 两杆伸长而杆 3 缩短，故须相应地假定杆 1，2 的轴力为拉力而杆 3 的轴力为压力。于是，铸件的受力如图 d 所示。由对称关系可知

$$F_{N1}=F_{N2} \tag{5}$$

另一平衡方程为

$$\sum F_x=0,\quad F_{N3}-F_{N1}-F_{N2}=0 \tag{6}$$

联解(4)，(5)及(6)三式，整理后即得装配内力为

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{\Delta eEA}{l}\left(\frac{1}{1+2\dfrac{EA}{E_3A_3}}\right) \tag{7}$$

$$F_{N3}=\frac{\Delta eE_3A_3}{l}\left[\frac{1}{1+\dfrac{E_3A_3}{2EA}}\right] \tag{8}$$

所得结果均为正,说明原先假定杆1,2为拉力和杆3为压力是正确的。

将已知数据代入上面结果中,并利用式(2-2),可得装配应力为

$$\sigma_1=\frac{F_{N1}}{A}=\frac{\Delta eE}{l}\left[\frac{1}{1+2\dfrac{EA}{E_3A_3}}\right]$$

$$=\frac{(0.11\times10^{-3}\ \mathrm{m})(210\times10^9\ \mathrm{Pa})}{(0.2\ \mathrm{m})}\times$$

$$\left[\frac{1}{1+\dfrac{2(210\times10^9\ \mathrm{Pa})\dfrac{\pi}{4}(10\times10^{-3}\ \mathrm{m})^2}{(100\times10^9\ \mathrm{Pa})(20\times10^{-3}\ \mathrm{m})(30\times10^{-3}\ \mathrm{m})}}\right]=74.53\times10^6\ \mathrm{Pa}$$

$=74.53\ \mathrm{MPa}$(拉应力)

$$\sigma_3=\frac{F_{N3}}{A_3}=\frac{\Delta eE_3}{l}\left[\frac{1}{1+\dfrac{E_3A_3}{2EA}}\right]=19.51\ \mathrm{MPa}(\text{压应力})$$

从上面的例题可以看出,在超静定问题里,杆件尺寸的微小误差,会产生相当可观的装配应力。这种装配应力既可能引起不利的后果,也可能带来有利的影响。土建工程中的预应力钢筋混凝土构件,就是利用装配应力来提高构件承载能力的例子。这类问题在计算原理上与前述例题是一致的。

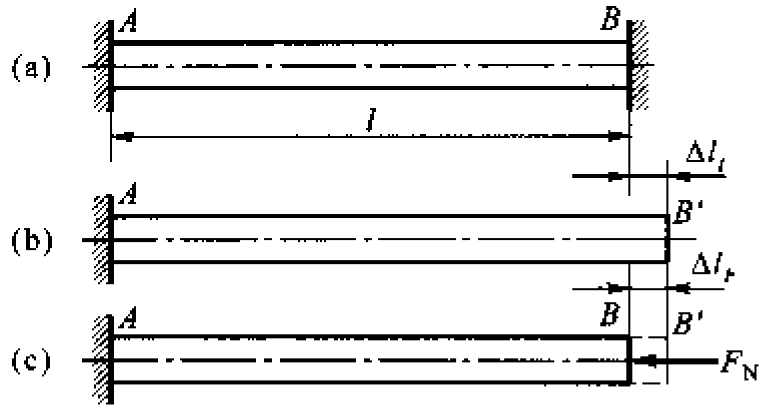
二、温度应力

在工程实际中,结构物或其部分杆件往往会遇到温度变化(例如工作条件中的温度改变或季节的更替)。若杆的同一截面上各点处的温度变化相同,则杆将仅发生伸长或缩短变形。在静定问题中,由于杆能自由变形,由温度所引起的变形不会在杆中产生内力。但在超静定问题中,由于有了多余约束,杆由温度变化所引起的变形受到限制,从而将在杆中产生内力。这种内力称为**温度内力**。与之相应的应力则称为**温度应力**。计算温度应力的关键也同样是根据问题的变形相容条件列出变形几何方程。与前面不同的是,杆的变形包括两部分,即由温度变化所引起的变形,以及与温度内力相应的弹性变形。

例题6-4　图a所示的等直杆AB的两端分别与刚性支承连接。设两支承间的距离(即杆长)为l,杆的横截面面积为A,材料的弹性模量为E,线膨胀系数为γ_l。试求温度升高Δt时杆内的温度应力。

解: 如果杆只有一端(例如A端)固定,则温度升高以后,杆将自由地伸长(图b)。现因刚性支承B的阻挡,使杆不能伸长,相当于在杆的两端加了压力而将杆顶住。由平衡方程可知两端的轴向压力相等,而压力的大小仍不知道。因

此为一次超静定，须建立一个补充方程。



例题6 4图

设想刚性支承 B 为多余约束，解除后施加相应的多余未知力 F_N，得基本静定系如图c。由于支承 B 是刚性的，故与其相应的变形相容条件是杆的总长度不变，即 $\Delta l=0$。注意到杆的变形包括由温度升高引起的变形 Δl_t 以及与轴向压力 F_N（亦即温度内力）相应的弹性变形 Δl_F 两个部分，故其变形几何方程为

$$\Delta l = \Delta l_t - \Delta l_F = 0 \tag{1}$$

式中，Δl_t 和 Δl_F 均取绝对值。

物理关系为

$$\Delta l_F = \frac{F_N l}{EA} \tag{2}$$

$$\Delta l_t = \alpha_l \Delta t l \tag{3}$$

将(2)，(3)两式代入式(1)，即得温度内力为

$$F_N = \alpha_l EA\Delta t \tag{4}$$

由此得温度应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \alpha_l E\Delta t \tag{5}$$

结果为正，说明原先认为杆受轴向压力是对的，该杆的温度应力为压应力。

若杆为钢杆，其 $\alpha_l=1.2\times10^{-5}/(℃)$，$E=210$ GPa，则当温度升高 $\Delta t=40$ ℃时，杆内的温度应力由式(5)算得为

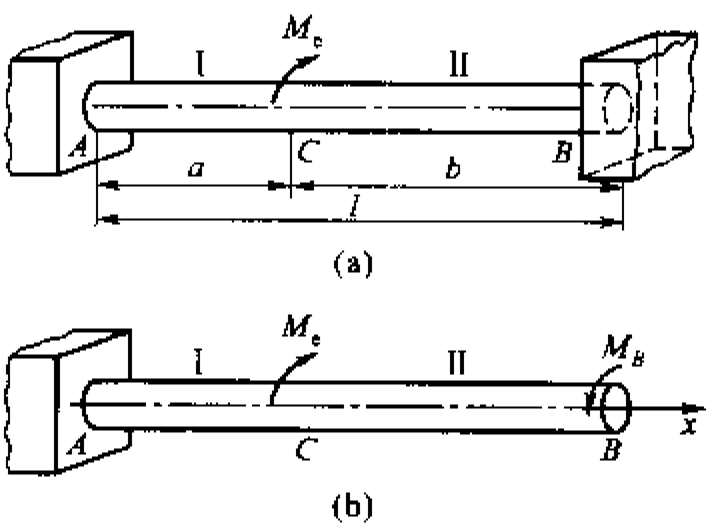
$$\begin{aligned}\sigma &= \alpha_l E\Delta t = [1.2\times10^{-5}/(℃)](210\times10^9\ \text{Pa})(40\ ℃) = 100\times10^6\ \text{Pa}\\ &= 100\ \text{MPa}(\text{压应力})\end{aligned}$$

以上计算表明，在超静定结构中，温度应力是一个不容忽视的因素。在铁路钢轨接头处，以及混凝土路面中，通常都留有空隙；高温管道隔一段距离要设一个弯道，都为考虑温度的影响，调节因温度变化而产生的伸缩。如果忽视了温度变化的影响，将会导致破坏或妨碍结构物的正常工作。

§6-3 扭转超静定问题

扭转超静定问题的解法，同样是综合考虑静力、几何、物理三个方面。下面通过一些例题来说明其解法。

例题 6-5 两端固定的圆截面杆 AB，在截面 C 处受一扭转力偶矩 M_e 作用，如图 a 所示。已知杆的扭转刚度为 GI_p，试求杆两端的支反力偶矩。



例题 6-5 图

解：有 2 个未知的支反力偶矩，而平衡方程只有 1 个 $\sum M_x=0$，故为一次超静定。

设想固定端 B 为多余约束，解除后加上相应的多余未知力偶矩 M_B，得基本静定系如图 b。根据原超静定杆的约束情况，基本静定系在 B 端的扭转角应等于零。因此，分别由外力偶矩 M_e 引起的 B 端扭转角 φ_{BM} 与由多余未知力偶矩 M_B 引起的 B 端扭转角 φ_{BB} 的绝对值相等。由此可得变形几何方程为

$$\varphi_{BM}=\varphi_{BB} \tag{1}$$

当杆处于线弹性范围时，扭转角与力偶矩间的物理关系为

$$\varphi_{BM}=\frac{M_e a}{GI_p} \tag{2}$$

和

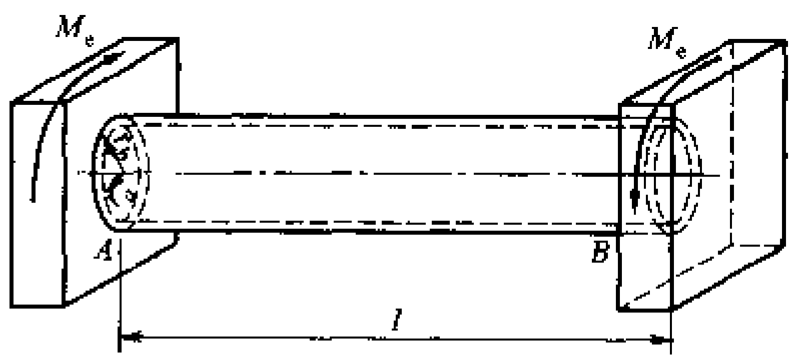
$$\varphi_{BB}=\frac{M_B l}{GI_p} \tag{3}$$

将式(2)，(3)代入式(1)，即得补充方程，并由此解得多余反力偶矩为

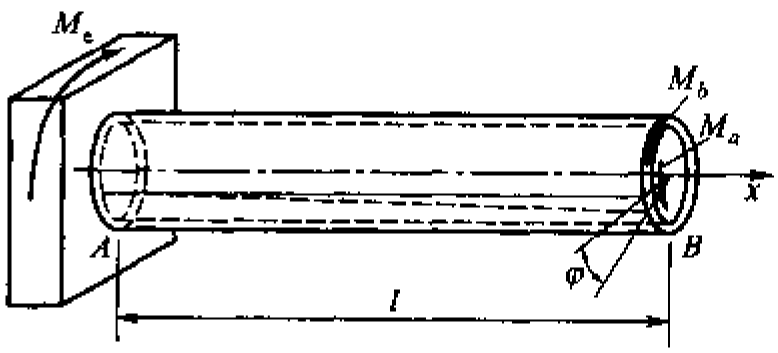
$$M_B=\frac{M_e a}{l} \tag{4}$$

求得多余反力偶矩 M_B 后，固定端 A 的支反力偶就不难由平衡方程求得。

例题 6-6 图 a 示一长为 l 的组合杆，由不同材料的实心圆截面杆和空心圆截面杆套在一起而组成，内、外两杆均在线弹性范围内工作，其扭转刚度分别为 G_aI_{pa} 和 G_bI_{pb}。当组合杆的两端面各自固结于刚性板上，并在刚性板处受一对扭转力偶矩 M_e 作用(图 a)时，试求分别作用在内、外杆上的扭转力偶矩。



(a)



(b)

例题 6-6 图

解：对于杆只能写出 1 个平衡方程 $\sum M_x=0$，而未知量却有 2 个——M_a，M_b(图 b)，故是一次超静定，须建立 1 个补充方程。

由于原杆两端各自与刚性板固结在一起，故内、外杆的扭转变形相同。由此建立的变形几何方程为

$$\varphi_{Ba}=\varphi_{Bb} \tag{1}$$

式中，φ_{Ba} 和 φ_{Bb} 分别是内、外两杆的 B 端相对于 A 端的相对扭转角，在图 b 中都用 φ 表示。

相对扭转角与扭转力偶间的物理关系为

$$\varphi_{Ba}=\frac{M_al}{G_aI_{pa}} \tag{2}$$

和

$$\varphi_{Bb}=\frac{M_bl}{G_bI_{pb}} \tag{3}$$

式中，I_{pa}，I_{pb} 分别为内、外两杆横截面的极惯性矩。

将物理关系式(2)、(3)代入变形几何方程(1)，经简化后即得补充方程为

$$M_a = \frac{G_a I_{pa}}{G_b I_{pb}} M_b \tag{4}$$

组合杆(图 b)的平衡方程为

$$\sum M_x = 0, \qquad M_a + M_b = M_e \tag{5}$$

联解补充方程(4)和平衡方程(5),经整理后即得

$$M_a = \frac{G_a I_{pa}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} \cdot M_e \tag{6}$$

和

$$M_b = \frac{G_b I_{pb}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} \cdot M_e \tag{7}$$

结果均为正,表明原先假定的 M_a,M_b 的转向是正确的。

§6-4 简单超静定梁

I. 超静定梁的解法

求解超静定梁,同样是综合运用静力、几何、物理三个方面。由例题 6-1 和 6-5 可见,对于由约束多于维持平衡所必需的数目而形成的超静定问题。根据选取的多余约束(基本静定系),由变形几何方程和力-变形(位移)物理关系所

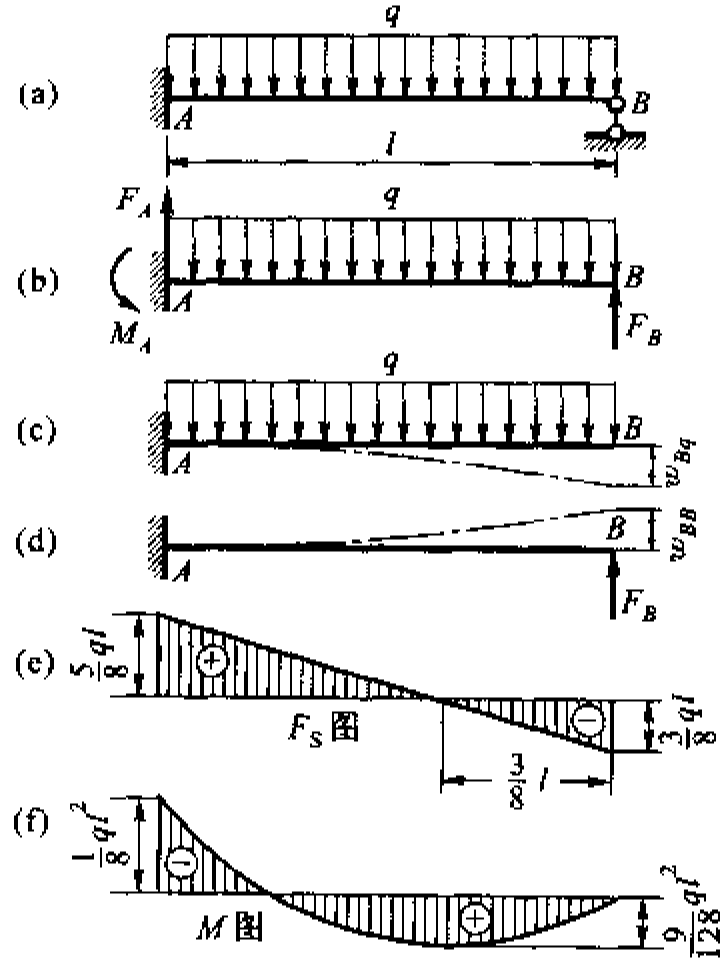


图 6-4

得的补充方程，即可解得多余未知力。解得多余未知力后，其余的支反力以及杆件的内力、应力和变形(位移)就可按基本静定系求解。大多数的超静定梁是由约束多于维持平衡所必需的数目而形成的，因此，就按上述方法主要求解其多余未知力。例如图 6－4a 所示弯曲刚度为 EI 的一次超静定梁，设想支座 B 为多余约束，相应的多余未知力为 F_B(假设指向向上)，则基本静定系为一悬臂梁(图 6－4b)。设悬臂梁分别在均布荷载和多余未知力单独作用下，B 点的挠度为 w_{Bq} 和 w_{BB}(图 6－4c 和 d)，按叠加原理，根据变形相容条件，可得变形几何方程为

$$w_{Bq}+w_{BB}=0 \tag{a}$$

由附录 IV 可得力与挠度间的物理关系为

$$w_{Bq}=\frac{ql^4}{8EI} \tag{b}$$

$$w_{BB}=-\frac{F_Bl^3}{3EI} \tag{c}$$

由于假设 F_B 向上，相应的 w_{BB} 也向上，故取负值。

将物理关系式(b)、(c)代入式(a)，即得补充方程

$$\frac{ql^4}{8EI}-\frac{F_Bl^3}{3EI}=0 \tag{d}$$

并由此解得多余反力 F_B 为

$$F_B=\frac{3}{8}ql$$

所得 F_B 为正号，表明原来假设的指向是正确的。

求得多余反力 F_B 后，即可按基本静定系(图 6－4b)，由静力平衡方程求出梁固定端的两个支反力为

$$F_A=\frac{5}{8}ql,\qquad M_A=\frac{1}{8}ql^2$$

并可绘出其剪力图和弯矩图，分别如图 6－4e,f 所示。也就是说，在解得的多余反力作用下，基本静定系与原来的超静定梁两者是等价的。

以上是取支座 B 作为“多余”约束来求解的。同样，也可以取支座 A 处阻止梁端面转动的约束作为“多余”约束，将其解除并加上相应的多余反力偶矩 M_A 后，所得的基本静定系如图 6－5 所示的静定简支梁。根据原超静定梁端面 A 的转角应等于零的变形相容条件，即可写出其变形几何方程，从而建立一个补充方程，

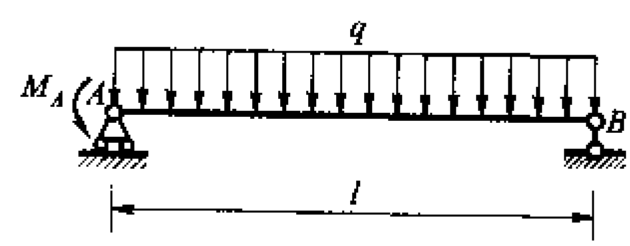
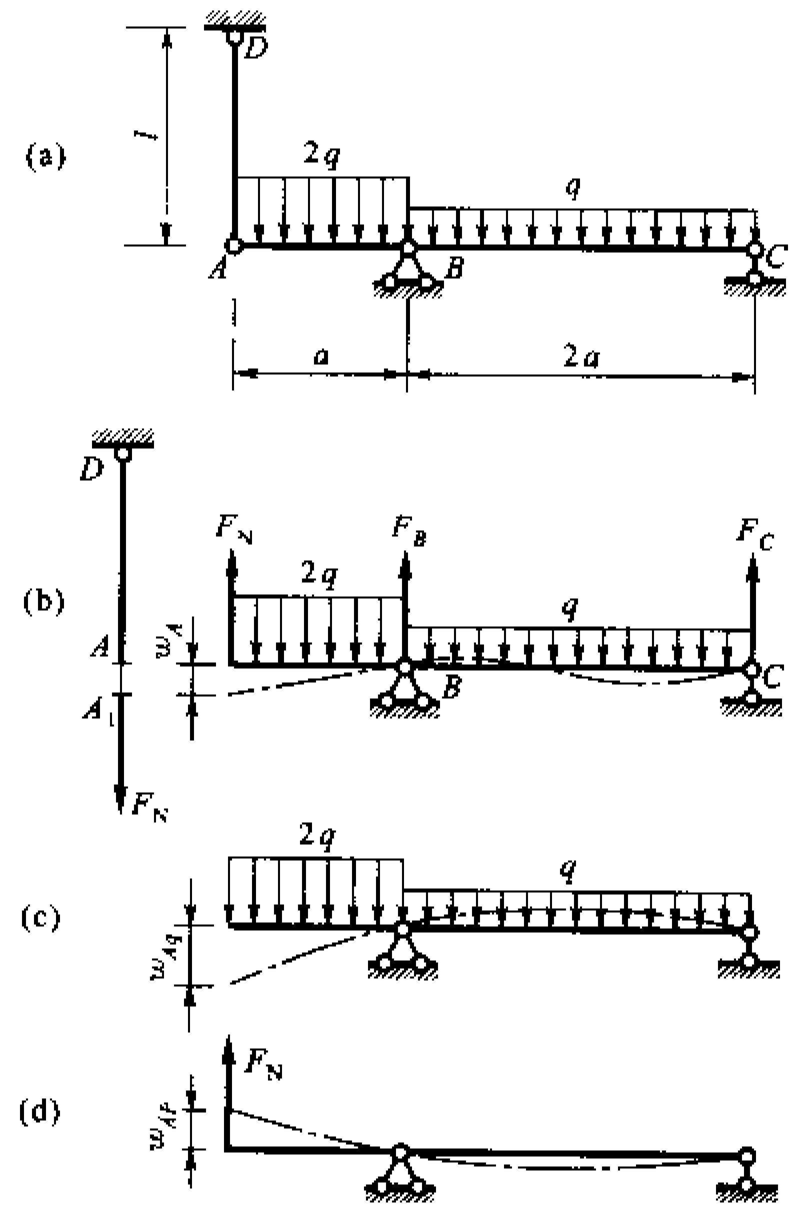


图 6－5

并由该方程解出 M_A。虽然所选的多余约束及其对应的基本静定系不同于上面的悬臂梁(图 6-4b),但两者所求得的全部支反力是相同的,建议读者自行验证。

例题 6-7 梁 AC 如图 a 所示,B,C 处分别为固定铰支座和可动铰支座,梁的 A 端用一钢杆 AD 与梁 AC 铰接。在梁受荷载作用以前,杆 AD 内没有内力。已知梁和拉杆用同样的钢材制成,材料的弹性模量为 E,梁横截面的惯性矩为 I,拉杆横截面的面积为 A,其余尺寸见图 a。试求钢杆 AD 内的拉力 F_N。



例题 6-7 图

解:梁上承受荷载后,A 点将产生向下的位移而在杆 AD 内产生拉力 F_N。于是,共有 F_B,F_C 和 F_N 3 个未知力,但平面平行力系仅有 2 个独立的平衡方程,所以是一次超静定。

设想将拉杆 AD 与梁 AC 之间的连接铰看作多余约束,相应的多余未知力为一对分别作用在拉杆 AD 和梁 AC 上的拉力 F_N。解除多余约束并加上多余未知力后,可得基本静定系如图 b 所示。A 点处的变形相容条件是拉杆和梁在

受力变形后仍连接于 A 点，即外伸梁 A 端的挠度 w_A 与拉杆 AD 的 A 端的向下位移相等，即

$$w_A = \Delta l \tag{1}$$

外伸梁在荷载与拉力 F_N 共同作用下，其 A 端的挠度 w_A(图 b)等于两者分别作用时，A 端挠度 w_{Aq} 和 w_{AF}(图 c,d)的代数和，即

$$w_A = w_{Aq} + w_{AF} \tag{2}$$

将上式代入式(1)，即得变形几何方程为

$$w_{Aq} + w_{AF} = \Delta l \tag{3}$$

在例题 5－6 中已经求得 $w_{Aq} = \dfrac{7qa^4}{12EI}$，而 $w_{AF} = -\dfrac{F_N a^3}{EI}$，从而有

$$w_A = w_{Aq} + w_{AF} = \frac{7qa^4}{12EI} - \frac{F_N a^3}{EI} \tag{4}$$

而拉杆 AD 的伸长

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \tag{5}$$

式(4)、(5)即为物理关系式。

将物理关系式(4)、(5)代入式(3)，得补充方程为

$$\frac{7qa^4}{12EI} - \frac{F_N a^3}{EI} = \frac{F_N l}{EA}$$

由此解得

$$F_N = \frac{7qa^4 A}{12(Il + Aa^3)}$$

求得 F_N 后，梁的支反力 F_B 和 F_C 就可由外伸梁(图 b)的静力平衡方程求得。

例题 6－8　弯曲刚度 $EI = 5 \times 10^6\ \text{N}\cdot\text{m}^2$ 的梁如图 a 所示，试求梁的支反力，并绘梁的剪力图和弯矩图。

解：梁为一次超静定梁。如取支座 B 截面上的阻止截面相对转动的约束为多余约束，则相应的多余未知力为分别作用于简支梁 AB 和 BC 在 B 端处的一对弯矩 M_B。基本静定系为在支座 B 截面上安置铰的静定梁，如图 b 所示。支座 B 处的变形相容条件是简支梁 AB 的截面 B 转角和 BC 梁截面 B 的转角相等，即

$$\theta'_B = \theta''_B \tag{1}$$

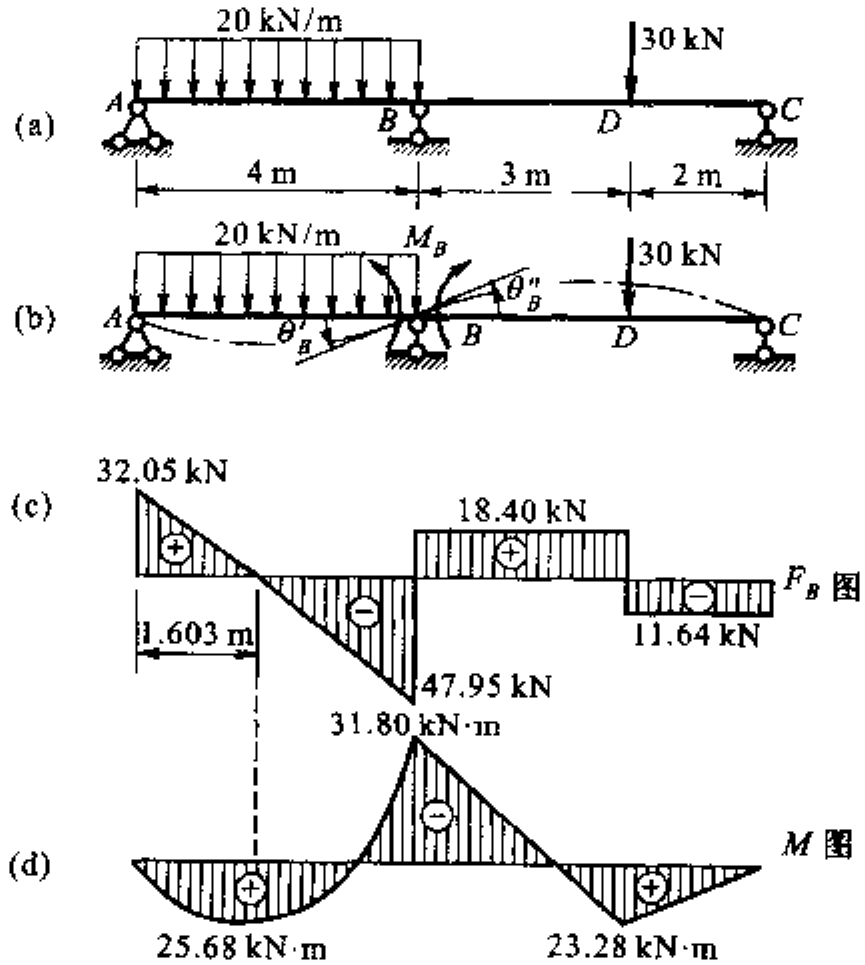
利用附录 IV 得物理关系为

$$\theta'_B = -\frac{(20 \times 10^3\ \text{N/m})(4\ \text{m})^3}{24EI} - \frac{M_B \times 4\ \text{m}}{3EI}$$

$$= -\left(\frac{1\,280\times10^3\ \mathrm{N\cdot m^2}}{24EI}+\frac{M_B\times4\ \mathrm{m}}{3EI}\right)$$

$$\theta''_B = \frac{(30\times10^3\ \mathrm{N})(3\ \mathrm{m})(2\ \mathrm{m})(5\ \mathrm{m}+2\ \mathrm{m})}{6EI\times5\ \mathrm{m}}+\frac{M_B\times5\ \mathrm{m}}{3EI}$$

$$=\frac{42\times10^3\ \mathrm{N\cdot m^2}}{EI}+\frac{M_B\times5\ \mathrm{m}}{3EI}$$



例题 6-8 图

将 θ'_B 和 θ''_B 值代入式(1),得补充方程

$$-\frac{1\,280\times10^3\ \mathrm{N\cdot m^2}}{24EI}-\frac{M_B\times4\ \mathrm{m}}{3EI}=\frac{42\times10^3\ \mathrm{N\cdot m^2}}{EI}+\frac{M_B\times5\ \mathrm{m}}{3EI}$$

解得

$$M_B=-31.80\ \mathrm{kN\cdot m}$$

其中负号表明支座 B 处的弯矩与所假设的方向相反,即为负弯矩。求得多余未知力 M_B 后,可由基本静定系,根据平衡条件求得其余支反力为 $F_A=32.05\ \mathrm{kN}$, $F_B=66.35\ \mathrm{kN}$, $F_C=11.64\ \mathrm{kN}$。然后在基本静定系上绘出剪力图(图 c)和弯矩图(图 d)。

若梁具有更多的中间支座,称为**连续梁**。对于连续梁,选取中间支座截面上阻止截面相对转动的约束为多余约束,所得基本静定系为一系列简支梁,可使求

解大为简化。由此推得的每一补充方程中，仅包含相邻三支座处的弯矩，称为**三弯矩方程**。关于连续梁三弯矩方程的推导，可参阅有关教材。[①]

*II. 支座沉陷和温度变化对超静定梁的影响

在工程中，有些梁由于地基下沉等原因，各支座可能发生不同程度的沉陷；有些梁由于受到周围环境的影响，使其上、下表面的温度变化有较大的差别。这些因素，对于静定梁将只影响其几何外形，对梁的内力和应力在一般情况下并无影响，然而对超静定梁将不仅影响其几何外形，并且对其内力和应力也将产生明显的影响。

一、支座沉陷的影响

图 6-6a 所示的一次超静定梁，受集度为 q 的均布荷载作用，梁的弯曲刚度为 EI，若梁的三个支座均发生了沉陷，沉陷后三个支座的顶部 A_1，B_1 和 C_1 不在同一直线上，三支座的沉陷量 Δ_A，Δ_B 和 Δ_C 均远比梁的跨长 l 为小，并设 $\Delta_B>\Delta_C>\Delta_A$，如图所示。下面来分析图 6-6a 中超静定梁的三个支反力 F_A，F_B 和 F_C。

设想将支座 B_1 处的约束当作"多余"约束解除，并在 B_1 点处施加相应的多余未知力 F_B，即得基本静定系为图 6-6b 所示的静定简支梁 A_1C_1。基本静定系应满足的变形相容条件是梁在受力变形后仍与中间支座在 B_1 处相连。

值得注意的是，原超静定梁在 B 点处的位移由两部分所组成。第一部分是由于 A，C 两支座的沉陷而引起的刚体位移，而使 B 点移至 B_0 点。显然，这部分的位移并不引起支座反力。第二部分是简支梁 A_1C_1 在均布荷载和多余未知力 F_B 共同作用下，发生弯曲变形后 B_0 点的位移 $\overline{B_0B_1}$（图 6-6a），这部分的位移才引起超静定梁的支座反力。

以 Δ_1，w_B 分别表示上述两部分位移 $\overline{BB_0}$ 和 $\overline{B_0B_1}$。由图 6-6a，b 可见 $\Delta_1=\dfrac{\Delta_A+\Delta_C}{2}$，而 $w_B=\Delta_B-\Delta_1$，于是，从已知的 Δ_A，Δ_B 和 Δ_C 可求得

$$w_B=\Delta_B-\frac{\Delta_A+\Delta_C}{2} \tag{a}$$

由于支座沉陷后斜线 A_1C_1 的斜度甚小，故基本静定系 A_1C_1 仍可近似地当作水平放置的梁来计算。梁 A_1C_1 在均布荷载和力 F_B 的共同作用下，其 B_0 点的挠度为

$$w_B=w_{Bq}+w_{BF} \tag{b}$$

① 例如，单辉祖编著《材料力学(II)》，高等教育出版社，1999 年。

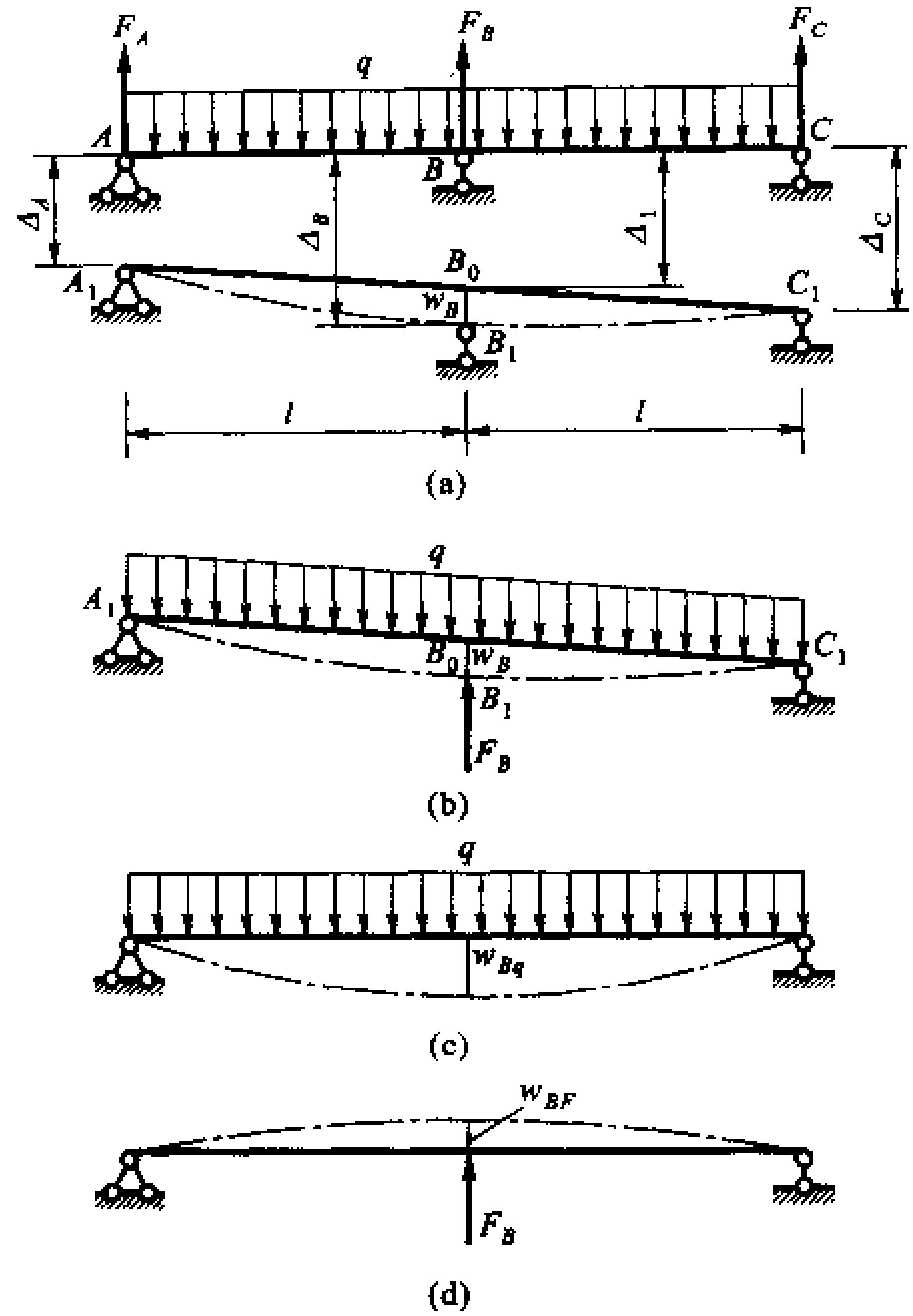


图 6-6

由变形相容条件可知,式(a),(b)中的 w_B 值相等,于是,可得变形几何方程为

$$w_{Bq} + w_{BF} = \Delta_B - \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2} \tag{c}$$

式中,w_{Bq}及 w_{BF}由附录 IV 可得

$$w_{Bq} = \frac{5}{384}\frac{q(2l)^4}{EI} = \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI}$$

$$w_{BF} = -\frac{F_B(2l)^3}{48EI} = -\frac{F_Bl^3}{6EI}$$

将其代入式(c),即得补充方程

$$\frac{5ql^4}{24EI} - \frac{F_Bl^3}{6EI} = \Delta_B - \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}$$

由此可解得

$$F_B = \frac{1}{4}\left[5ql - \frac{24EI}{l^3}\left(\Delta_B - \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}\right)\right] \tag{d}$$

然后，由静力平衡方程求得

$$F_A = F_C = \frac{3ql}{8} + \frac{3EI}{l^3}\left(\Delta_B - \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}\right) \tag{e}$$

(d)，(e)两式中含有 $\Delta_B - \dfrac{\Delta_A + \Delta_C}{2}$ 的项，反映了支座沉陷对支反力的影响。根据支反力受到支座沉陷的影响还可推知，支座沉陷对超静定梁的剪力及弯矩值等均有影响。

二、梁上、下表面温度变化不同的影响

以图 6－7a 所示的两端固定梁为例，讨论梁上、下表面温度变化不同对超静定梁的影响。设梁在安装以后，由于上、下表面工作条件不同，其顶面的温度由安装时的 t_0 上升为 t_1，而底面的温度则由 t_0 上升为 t_2，且 $t_2 > t_1$。梁材料的弹性模量 E、线膨胀系数 α_l 及截面惯性矩 I 均为已知，不计梁的自重。

梁共有 6 个未知支反力，而平面一般力系只有 3 个独立的静力平衡方程，所以，是三次超静定梁，须建立 3 个补充方程。

设想将其支座 B 处的 3 个约束当作“多余”约束解除，并在 B 点处施加与之

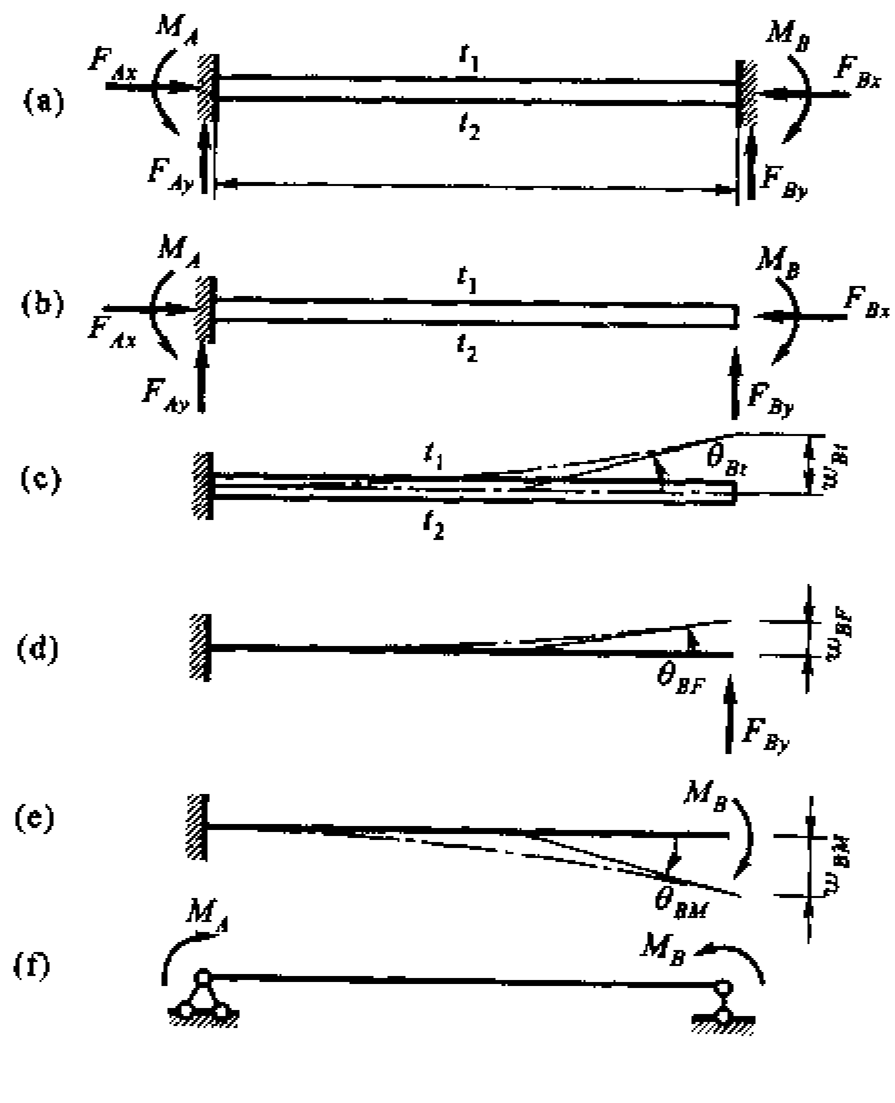


图 6－7

相应的 3 个多余未知力 M_B，F_{By} 和 F_{Bx}，从而得到基本静定系如图 6-7b 所示的悬臂梁。假设 3 个支反力的转向或指向如图所示。

由于 F_{Ax} 和 F_{Bx} 是梁沿轴向的支反力，在变形微小时，其对挠度和转角的影响均可略去不计。因此，可先不加考虑，而将梁看作是二次超静定的，并利用原超静定梁的变形相容条件 $w_B=0$ 和 $\theta_B=0$ 来求解 M_B 和 F_{By}。

对于图 6-7b 所示的基本静定系，由于温度变化后梁底面的温度 t_2 大于其顶面的温度 t_1，因此，其底面长度将大于其顶面长度，从而使梁的 B 端产生挠度 w_{Bt} 和转角 θ_{Bt}（图 6-7c）。此外，当 F_{By} 单独作用时，B 端将产生挠度 w_{BF} 和转角 θ_{BF}；而当 M_B 单独作用时，B 端将产生 w_{BM} 和 θ_{BM}（图 6-7d，e）。于是，根据变形相容条件，并利用叠加原理，可得变形几何方程为

$$w_B = w_{Bt} + w_{BF} + w_{BM} = 0 \tag{f}$$

$$\theta_B = \theta_{Bt} + \theta_{BF} + \theta_{BM} = 0 \tag{g}$$

先分别找出上述各种因素单独存在时，梁在截面 B 处的挠度和转角表达式，也就是建立其物理方程，然后将它们代入(f)，(g)两式，即可得到两补充方程，以求解多余未知力 F_{By} 和 M_B。

(1) 由于梁上、下表面的温度变化不同所引起的梁在 B 端的转角和挠度。假设梁的顶面到底面的温度是按线性规律变化的。取长为 $\mathrm{d}x$ 的梁段来分析（图 6-8a）。梁段的底面长度 $\mathrm{d}x$ 在温度从 t_0 上升到 t_2 时将增至 $\mathrm{d}x+\alpha_l(t_2-t_0)\mathrm{d}x$，而顶面长度 $\mathrm{d}x$ 在温度从 t_0 上升到 t_1 时将增至 $\mathrm{d}x+\alpha_l(t_1-t_0)\mathrm{d}x$（图 6-8b）。由于假设温度是按线性规律变化的，因此，$\mathrm{d}x$ 微段的变形情况将如图 6-8b 中 $mnn'm'$ 所示，即微段左、右两横截面将发生相对转角 $\mathrm{d}\theta$。作辅助线 $m'n_0$ 平行于 mn（图 6-8b），可得

$$\overline{n_0n'} = h\mathrm{d}\theta \tag{h}$$

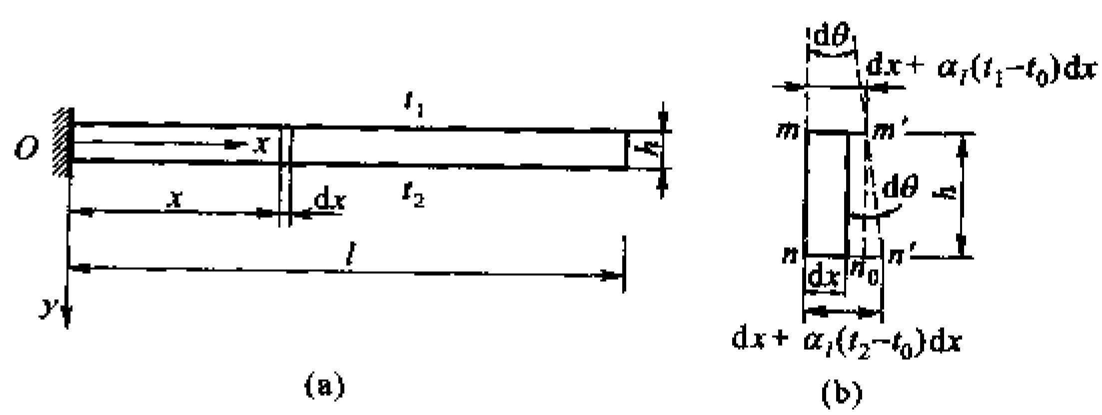


图 6-8

而 $\overline{n_0n'}=\overline{nn'}-\overline{mm'}=\mathrm{d}x+\alpha_l(t_2-t_0)\mathrm{d}x-[\mathrm{d}x+\alpha_l(t_1-t_0)\mathrm{d}x]=\alpha_l(t_2-t_1)\mathrm{d}x$，将其代入式(h)并整理后即得相对转角为

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\alpha_l(t_2-t_1)}{h}\mathrm{d}x \tag{i}$$

应该指出，在 t_2 大于 t_1 的情况下，上式右边为正值，但在图 6－8a 所示坐标系中，因取 y 轴向下为正，故图 6－8b 所示的转角 $\mathrm{d}\theta$ 为负值，因此，在式(i)右边应加上负号。于是可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)}{h} \tag{j}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} \tag{k}$$

由式(j)，(k)即得梁因温度影响而弯曲的挠曲线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)}{h} \tag{l}$$

将式(l)所表示的微分方程积分，并应用边界条件 $x=0,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0$ 及 $x=0$，$w=0$定出积分常数，即可得梁因温度影响而弯曲的转角方程及挠曲线方程分别为

$$\theta=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)}{h}x \tag{m}$$

和

$$w=-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)}{2h}x^2 \tag{n}$$

将 B 点的坐标 $x=l$ 代入式(m)和(n)，即得梁在 B 端的转角和挠度为

$$\theta_{Bt}=-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)l}{h} \tag{o}$$

和

$$w_{Bt}=-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)l^2}{2h} \tag{p}$$

(2) 在 F_{By}和M_B 分别作用下，梁在 B 端的转角和挠度分别按附录 IV 中的有关公式可得

$$\left.\begin{aligned}\theta_{BF}&=-\frac{F_{By}l^2}{2EI}\\ w_{BF}&=-\frac{F_{By}l^3}{3EI}\end{aligned}\right\} \tag{q}$$

$$\left.\begin{aligned}\theta_{BM} &= \frac{M_B l}{EI}\\ w_{BM} &= \frac{M_B l^2}{2EI}\end{aligned}\right\} \tag{r}$$

以上式(o)~(r)即为物理关系式。

将物理关系式(o)~(r)代入变形几何方程(f)和(g),即得补充方程

$$-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)l^2}{2h}-\frac{F_{By}l^3}{3EI}+\frac{M_B l^2}{2EI}=0 \tag{s}$$

$$-\frac{\alpha_l(t_2-t_1)l}{h}-\frac{F_{By}l^2}{2EI}+\frac{M_B l}{EI}=0 \tag{t}$$

联解(s)和(t)两式,可得

$$F_{By}=0,\ M_B=\frac{\alpha_l EI(t_2-t_1)}{h}$$

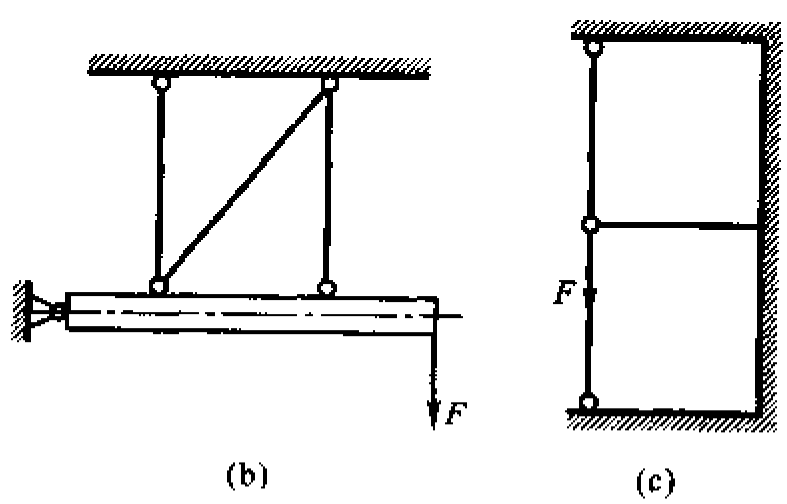
这里的 M_B 为正号,故其转向如图 6-7b 中所示。

若考虑到梁的结构和温度变化均对称于梁的跨中截面,则由对称性条件可得 $F_{Ay}=F_{By}, M_A=M_B$。当梁上无横向荷载作用时,则由平衡方程 $\sum F_y=0$,可得 $F_{Ay}=F_{By}=0$。于是,可进一步简化为一次超静定梁,其基本静定系将如图 6-7f 所示。然后,按与前述类似的程序,即可解得 $M_A=M_B=\frac{\alpha_l EI(t_2-t_1)}{h}$。作为练习,建议读者自行求解。

关于轴向支反力 F_{Bx},可根据梁的平均温度 $t_m=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$与安装时的温度 t_0 之差,参照例题 6-4 的解法求得。

思 考 题

6-1 试判别图示各结构是静定的,还是超静定的?若是超静定,则为几次超静定?

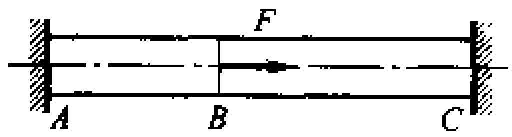


思考题 6-1 图

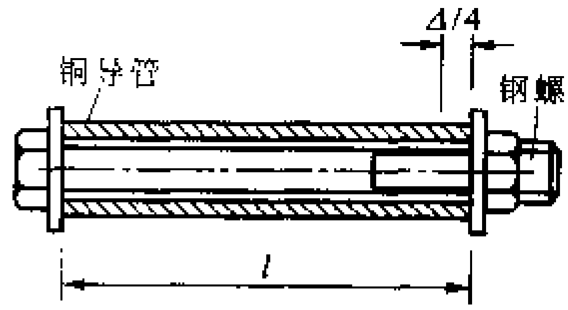
6-2 超静定结构的基本静定系和变形几何方程是不是惟一的？其解答是不是惟一的？如图示两端固定的超静定杆，试给出其三个不同形式的基本静定系及其相应的变形几何方程。

6-3 在例题6-2中，若1、2、3三杆的材料及横截面面积均相同，试问有何办法可使各杆同时达到材料的许用应力$[\sigma]$？

6-4 长度为l的钢螺旋，螺距为Δ，外面套一铜导管。在使螺母与导管正好密合（无间隙也无应力）后，再将螺母旋紧1/4圈，为求螺栓和导管内的应力，试列出其变形几何方程。

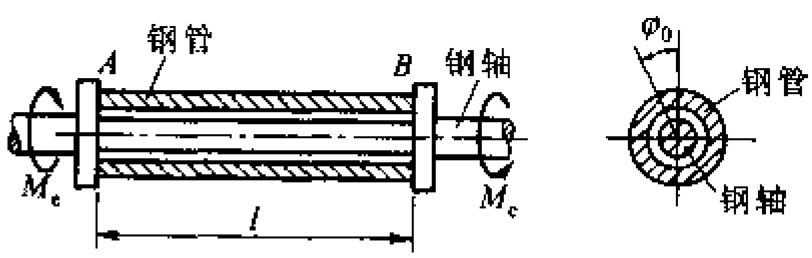


思考题6-2图



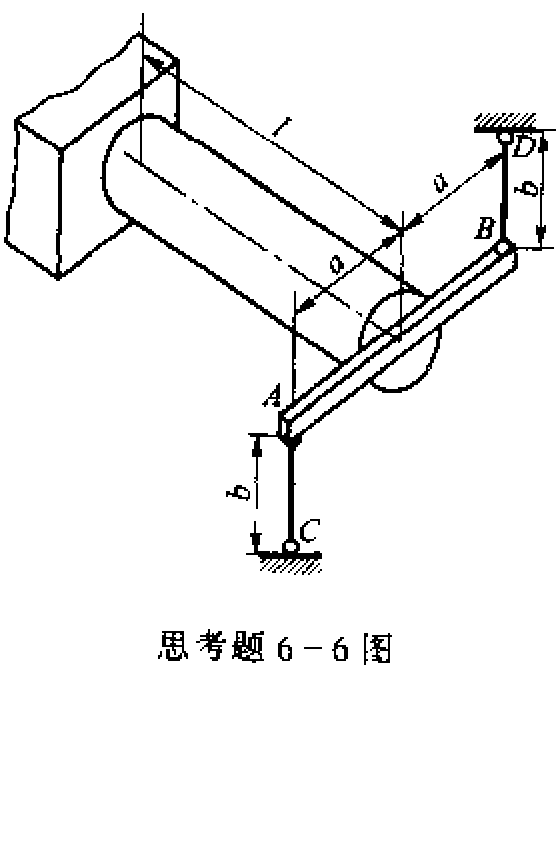
思考题6-4图

6-5 一扭转刚度为GI_{p1}的钢轴，承受扭转力偶矩M_e，轴在受扭情况下，在AB段内与一扭转刚度为GI_{p2}的钢管焊接如图。焊牢后，卸除扭转力偶矩M_e，为求AB段内轴和钢管横截面上的切应力，试分别列出静力平衡方程、变形几何方程和物理关系式。



思考题6-5图

6-6 长度为l、直径为D的实心圆轴，一端固定，另一端与长度为$2a$的刚性臂AB焊成一体，而刚臂的A和B端又与长度均为b的AC与BD两相同的杆铰接，如图所示。若使

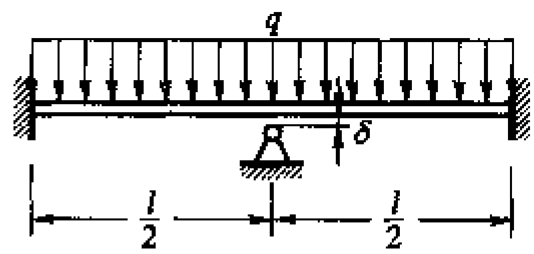


思考题6-6图

杆 AC, BD 的温度下降 Δt，并使轴内的最大切应力值与杆内的正应力值相等，试求杆的横截面面积。已知圆轴的切变模量为 G，杆 AC 和 BD 的弹性模量为 E，横截面面积为 A。

6-7　例题 6-8 中的超静定梁，试再选取两种不同形式的基本静定系，并列出其相应的变形几何方程。比较所选基本静定系与例题 6-8 中的基本静定系的优缺点。

6-8　弯曲刚度为 EI 的两端固定梁，在梁跨中点下有一支座，但与梁底边相距 δ，如图所示。当梁承受均布荷载 q 后，梁与中间支座接触。试问该梁为几次超静定，并列出其变形几何方程和物理关系式。

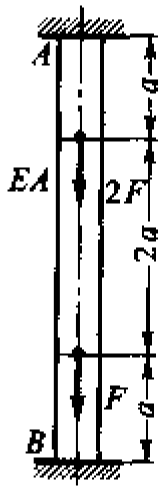


思考题 6-8 图

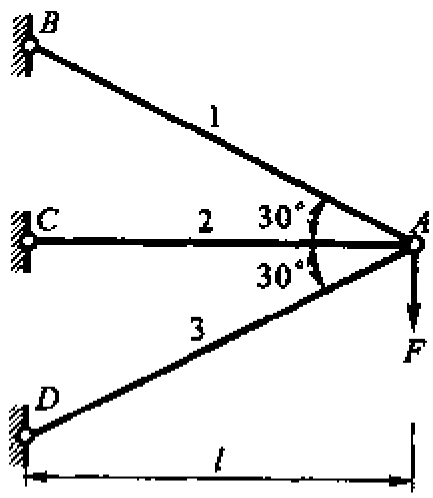
习　　题

6-1　试作图示等直杆的轴力图。

6-2　图示支架承受荷载 $F=10$ kN，1，2，3 各杆由同一材料制成，其横截面面积分别为 $A_1=100\ \text{mm}^2$，$A_2=150\ \text{mm}^2$ 和 $A_3=200\ \text{mm}^2$。试求各杆的轴力。



习题 6-1 图



习题 6-2 图

6-3　一刚性板由四根支柱支撑，四根支柱的长度和截面都相同，如图所示。如果荷载 F 作用在 A 点，试求这四根支柱各受力多少。

6-4　刚性杆 AB 的左端铰支，两根长度相等、横截面面积相同的钢杆 CD 和 EF 使该刚性杆处于水平位置，如图所示。如已知 $F=50$ kN，两根钢杆的横截面面积 $A=1\ 000\ \text{mm}^2$，试求两杆的轴力和应力。

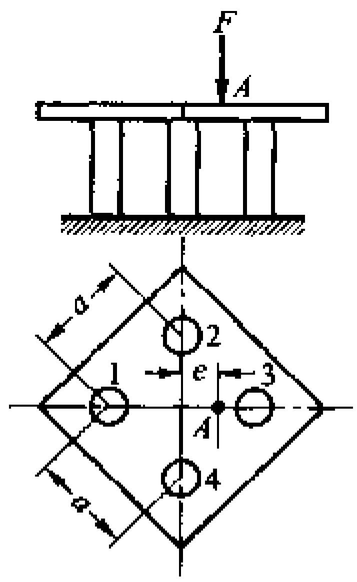
6-5　图示刚性梁受均布荷载作用，梁在 A 端铰支，在 B 点和 C 点由两根钢杆 BD 和 CE 支承。已知钢杆 BD 和 CE 的横截面面积 $A_2=200\ \text{mm}^2$ 和 $A_1=400\ \text{mm}^2$，钢的许用应力 $[\sigma]=170$ MPa，试校核钢杆的强度。

6-6　试求图示结构的许可荷载 $[F]$。已知杆 AD, CE, BF 的横截面面积均为 A，杆材料的许用应力为 $[\sigma]$，梁 AB 可视为刚体。

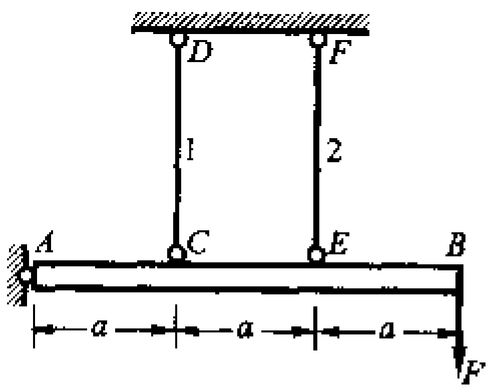
6-7　横截面为 250 mm×250 mm 的短木柱，用四根 40 mm×40 mm×5 mm 的等边角钢加固，并承受压力 F，如图所示。已知角钢的许用应力 $[\sigma]_s=160$ MPa，弹性模量 $E_s=200$ GPa；木

材的许用应力$[\sigma]_w = 12$ MPa，弹性模量 $E_w = 10$ GPa。试求短木柱的许可荷载$[F]$。

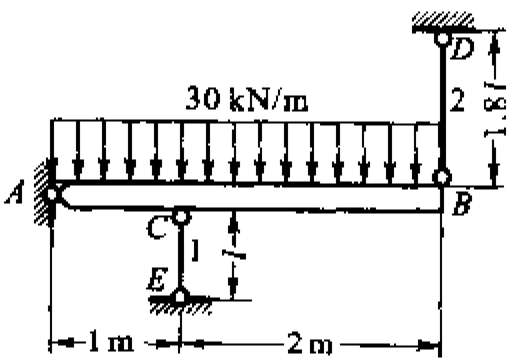
6－8 水平刚性横梁 AB 上部由杆 1 和杆 2 悬挂，下部由铰支座 C 支承，如图所示。由于制造误差，杆 1 的长度短了 $\delta = 1.5$ mm。已知两杆的材料和横截面面积均相同，且 $E_1 = E_2 = E = 200$ GPa，$A_1 = A_2 = A$。试求装配后两杆的应力。



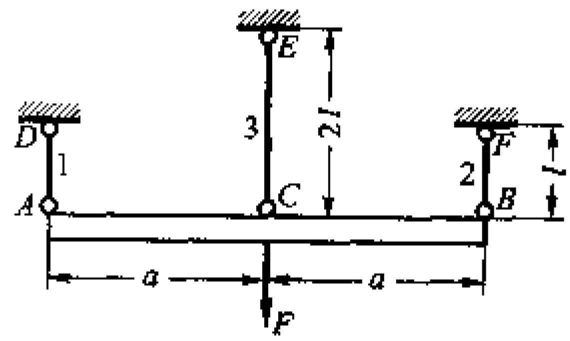
习题 6－3 图



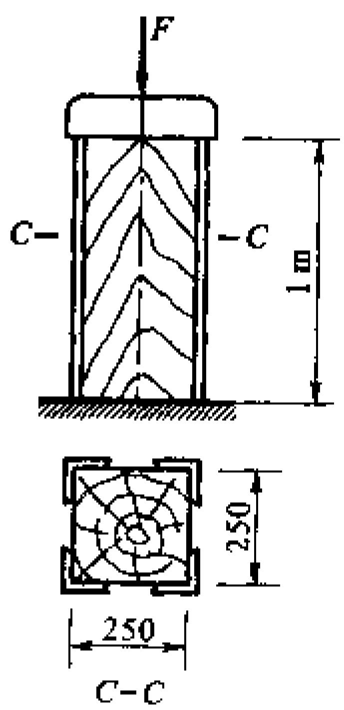
习题 6－4 图



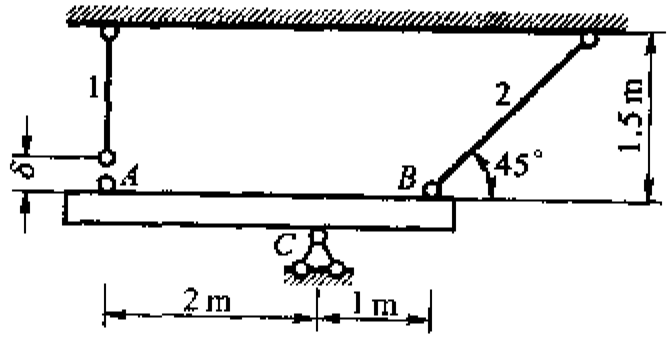
习题 6－5 图



习题 6－6 图



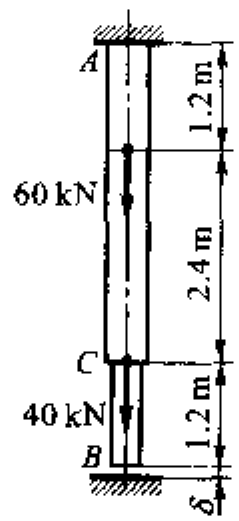
习题 6－7 图



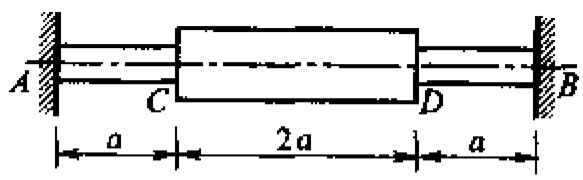
习题 6－8 图

6-9　图示阶梯状杆,其上端固定,下端与支座距离 $\delta=1$ mm。已知上、下两段杆的横截面面积分别为 600 mm^2 和 300 mm^2,材料的弹性模量 $E=210$ GPa。试作图示荷载作用下杆的轴力图。

6-10　两端固定的阶梯状杆如图所示。已知 AC 段和 BD 段的横截面面积为 A,CD 段的横截面面积为 $2A$;杆材料的弹性模量为 $E=210$ GPa,线膨胀系数 $\alpha_l=12\times10^{-6}(℃)^{-1}$。试求当温度升高 30 ℃后,该杆各部分产生的应力。



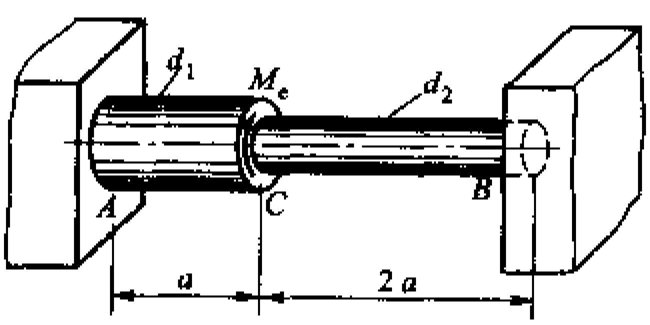
习题 6-9 图



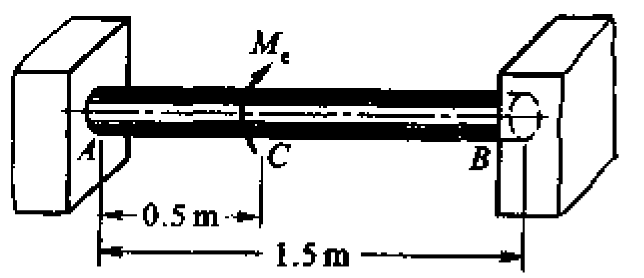
习题 6-10 图

6-11　图示为一两端固定的阶梯状圆轴,在截面突变处承受外力偶矩 M_e。若 $d_1=2d_2$,试求固定端的支反力偶矩 M_A 和 M_B,并作扭矩图。

6-12　图示一两端固定的钢圆轴,其直径 $d=60$ mm。轴在截面 C 处承受一外力偶矩 $M_e=3.8$ kN·m。已知钢的切变模量 $G=80$ GPa。试求截面 C 两侧横截面上的最大切应力和截面 C 的扭转角。

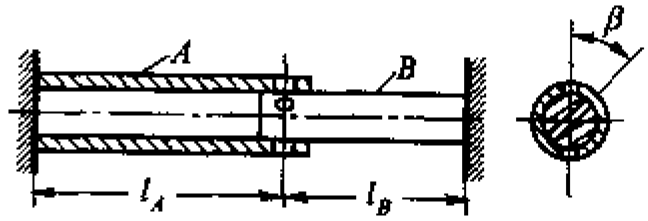


习题 6-11 图



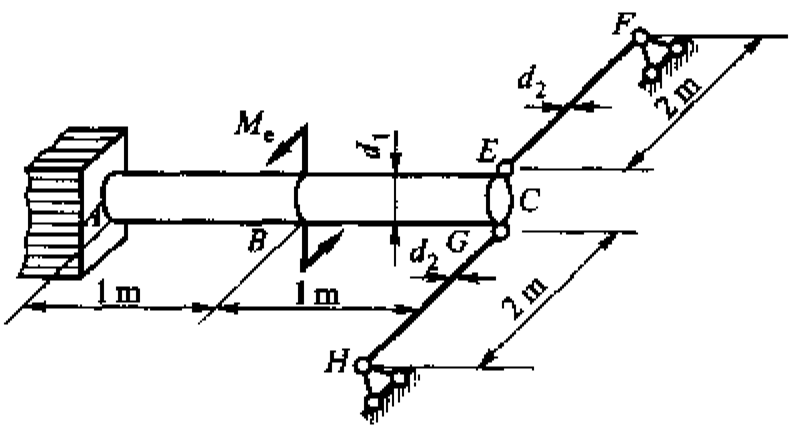
习题 6-12 图

6-13　一空心圆管 A 套在实心圆杆 B 的一端,如图所示。两杆在同一横截面处各有一直径相同的贯穿孔,但两孔的中心线构成一个 β 角。现在杆 B 上施加外力偶使杆 B 扭转,以使两孔对准,并穿过孔装上销钉。在装上销钉后卸除施加在杆 B 上的外力偶。试问管 A 和杆 B 横截面上的扭矩为多大?已知杆 A 和杆 B 的极惯性矩分别为 I_{pA} 和 I_{pB};两杆的材料相同,其切变模量为 G。



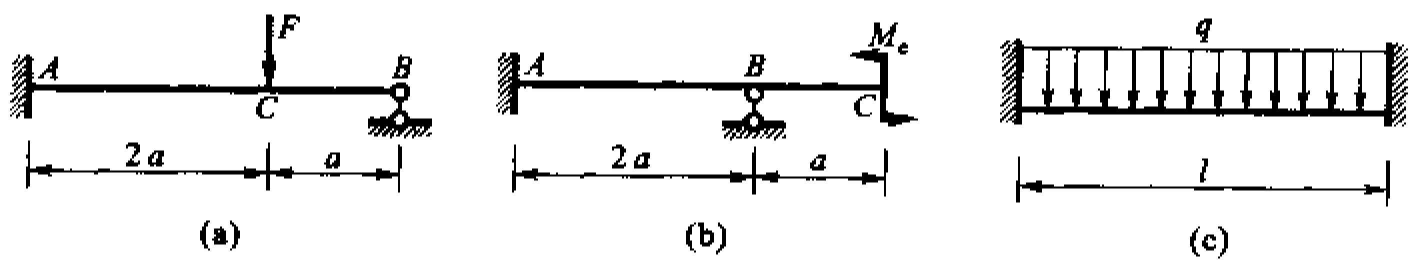
习题 6-13 图

6－14　图示圆截面杆 AC 的直径 $d_1 = 100$ mm，A 端固定，在截面 B 处承受外力偶矩 $M_e = 7$ kN·m，截面 C 的上、下两点处与直径均为 $d_1 = 20$ mm 的圆杆 EF、GH 铰接。已知各杆材料相同，弹性常数间的关系为 $G = 0.4E$。试求杆 AC 中的最大切应力。



习题 6－14 图

6－15　试求图示各超静定梁的支反力。



习题 6－15 图

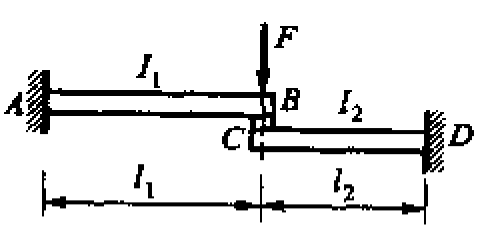
6－16　荷载 F 作用在梁 AB 及 CD 的连接处，试求每根梁在连接处所受的力。已知其跨长比和刚度比分别为

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{2} \quad 和 \quad \frac{EI_1}{EI_2} = \frac{4}{5}$$

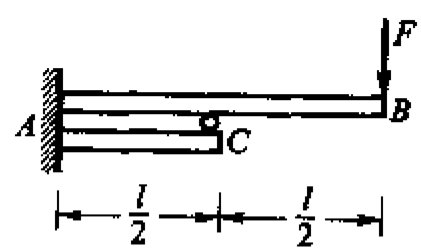
6－17　梁 AB 因强度和刚度不足，用同一材料和同样截面的短梁 AC 加固，如图所示。试求：

(1) 二梁接触处的压力 F_C；

(2) 加固后梁 AB 的最大弯矩和 B 点的挠度减小的百分数。



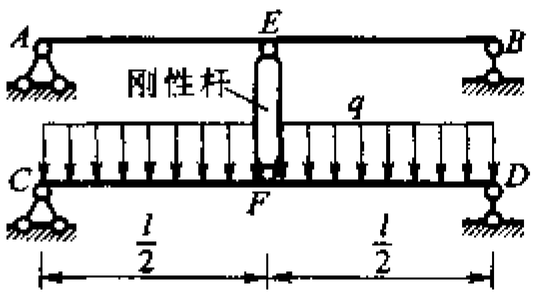
习题 6－16 图



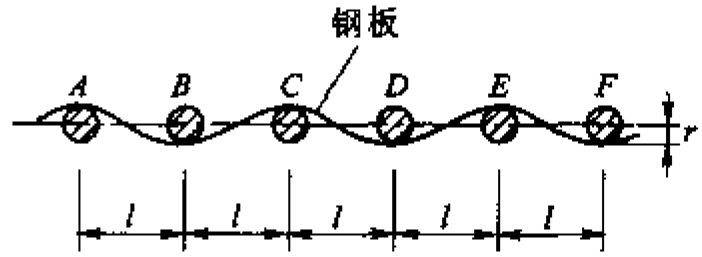
习题 6－17 图

6－18　图示结构中梁 AB 和梁 CD 的尺寸及材料均相同，已知 EI 为常量。试绘出梁 CD 的剪力图和弯矩图。

***6－19**　在一直线上打入 n 个半径为 r 的圆桩，桩的间距均为 l。将厚度为 δ 的平钢板按图示方式插入圆桩之间，钢板的弹性模量为 E，试求钢板内产生的最大弯曲正应力。



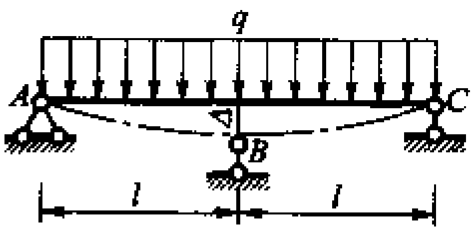
习题 6－18 图



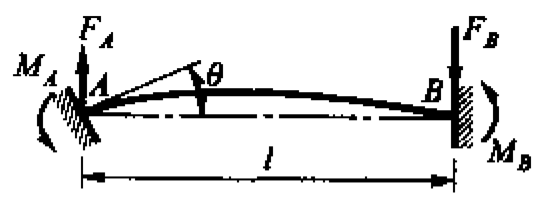
习题 6－19 图

*6－20　直梁 ABC 在承受荷载前搁置在支座 A 和 C 上，梁与支座 B 间有一间隙 Δ。当加上均布荷载后，梁在中点处与支座 B 接触，因而三个支座都产生约束力。为使这三个约束力相等，试求其 Δ 值。

*6－21　梁 AB 的两端均为固定端，当其左端转动了一个微小角度 θ 时，试确定梁的约束反力 M_A，F_A，M_B 和 F_B。

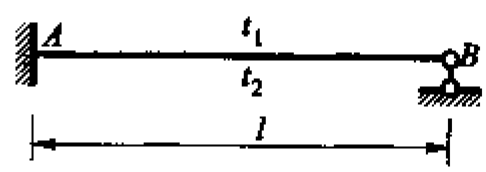


习题 6－20 图



习题 6－21 图

*6－22　梁 AB 的左端固定而右端铰支如图所示。梁的横截面高为 h。设梁在安装后其顶面温度为 t_1 而底面温度为 t_2，设 $t_2 > t_1$，且沿截面高度 h 成线性变化。梁的弯曲刚度为 EI，材料的线膨胀系数为 α_l。试求梁的约束反力。



习题 6－22 图

第七章 应力状态和强度理论

§7-1 概 述

在前面的轴向拉压、圆杆扭转和对称弯曲各章中,构件的强度条件为

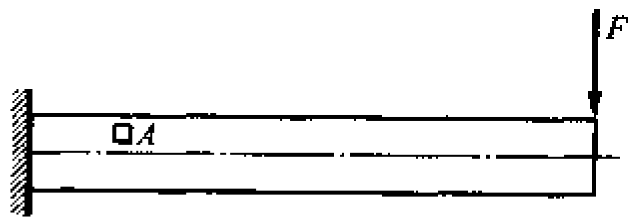
$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] \quad 或 \quad \tau_{max} \leqslant [\tau]$$

式中,工作应力 σ_{max} 或 τ_{max} 由相关的应力公式计算;材料的许用应力 $[\sigma]$ 或 $[\tau]$,应用直接试验的方法(如拉伸试验或扭转试验),测得材料相应的极限应力并除以安全因数来求得,没有也毋须考虑材料失效(断裂或屈服)的原因。此外,由构件的应力分析可知,在受力构件的同一截面上,各点处的应力一般是不同的。而通过受力构件内的同一点处,不同方位截面上的应力一般也是不同的(参见§2-3中拉压杆斜截面上应力和§3-4中受扭圆杆斜截面上应力的分析)。对于轴向拉压和对称弯曲中的正应力,由于杆件危险点处横截面上的正应力是通过该点各方位截面上正应力的最大值,且处于单轴应力状态,故可将其与材料在单轴拉伸(压缩)时的许用应力相比较来建立强度条件。同样,对于圆杆扭转和对称弯曲中的切应力,由于杆件危险点处横截面上的切应力是通过该点各方位截面上切应力的最大值,且处于纯剪切应力状态,故可将其与材料在纯剪切下的许用应力相比较来建立强度条件。但是,在一般情况下,受力构件内的一点处既有正应力,又有切应力(如对称弯曲中,构件横截面上距中性轴为某一距离的任一点处)。若需对这类点的应力进行强度计算,则不能分别按正应力和切应力来建立强度条件,而需综合考虑正应力和切应力的影响。这时,一方面要研究通过该点各不同方位截面上应力的变化规律,从而确定该点处的最大正应力和最大切应力及其所在截面的方位。受力构件内一点处不同方位截面上应力的集合,称为**一点处的应力状态**。也就是说,需研究受力构件内一点处的应力状态。另一方面,由于该点处的应力状态较为复杂,而应力的组合形式又有无限多的可能性,因此,就不可能用直接试验的方法来确定每一种应力组合情况下材料的极限应力。于是,就需探求材料破坏(断裂或屈服)的规律。如果能确定引起材料破坏的共同因素,那就可以通过较简单的应力状态(如单轴应力状态或纯剪切应力状态)下的试验结果,来确定该共同因素的极限值,从而建立相应的强度条件。关于材料破坏规律的假说,称为**强度理论**。也就是说,需研究材料破坏规律的强度理论。

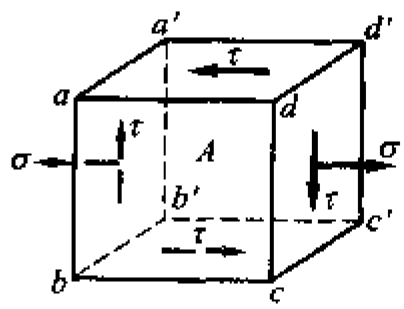
本章先讨论受力构件内一点处的应力状态，然后研究关于材料破坏规律的强度理论。从而为在各种应力状态下的强度计算提供必要的基础。

§7-2 平面应力状态的应力分析·主应力

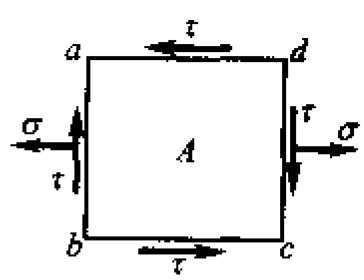
为了研究受力构件内某一点处的应力状态，可以围绕该点取出一个单元体。例如，研究图7-1a所示矩形截面悬臂梁内 A 点处的应力状态，可用三对相互垂直的平面，围绕 A 点取出一个单元体，如图7-1b所示。由于单元体各边长均为无穷小量，故可认为在单元体各个表面上的应力都是均匀的，而且任意一对平行平面（例如图7-1b中的两侧面 ab' 和 dc' 或前、后面 ac 和 $a'c'$）上的应力是相等的。为了简便起见，将这种前、后两个面上应力为零的单元体，用平面图形来表示（图7-1c）。至于梁横截面上 A 点处的应力，则可分别按式(4-5)和(4-10)求得。由切应力互等定理，即可确定该单元体上、下表面上的切应力。



(a)



(b)



(c)

图7-1

若单元体有一对平面上的应力等于零，即不等于零的应力分量均处于同一坐标平面内，则称为平面应力状态。平面应力状态的普遍形式如图7-2a所示，即在其他两对平面上分别有正应力和切应力（σ_x，τ_x 和 σ_y，τ_y）。现研究在普遍形式的平面应力状态下，根据单元体各面上已知的应力分量来确定其任一斜截面上的未知应力分量，并从而确定该点处的最大正应力及其所在截面的方位。

一、斜截面上的应力

已知一平面应力状态单元体上的应力为 σ_x，τ_x 和 σ_y，τ_y，如图7-2a所示。

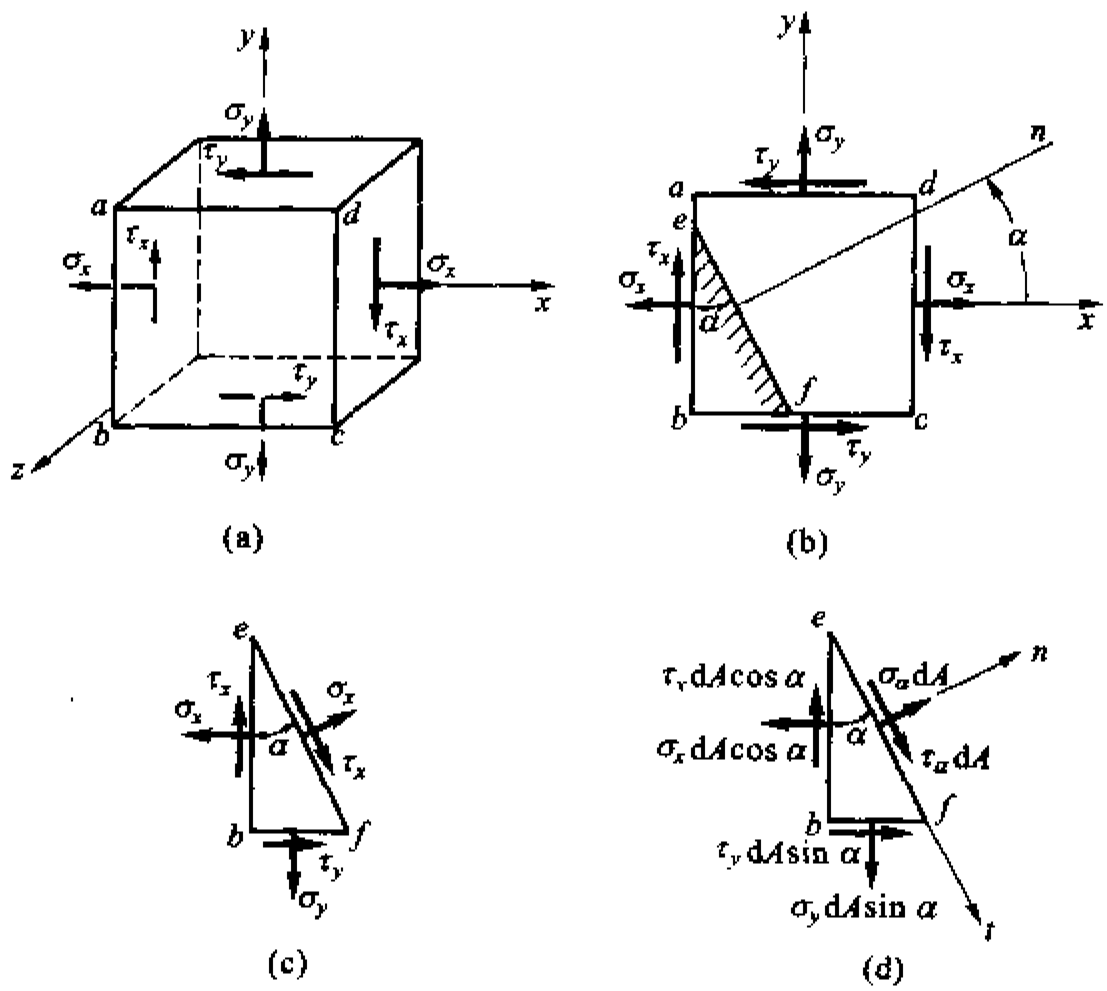


图 7-2

如前所述，由于其前、后两平面上没有应力，可将该单元体用平面图形来表示(图 7-2b)。为求该单元体与前、后两平面垂直的任一斜截面上的应力，可应用截面法。设斜截面 ef 的外法线 n 与 x 轴间的夹角(方位角)为 α(图 7-2b)，简称为 α 截面，并规定从 x 轴到外法线 n 逆时针转向的方位角 α 为正值。α 截面上的应力分量用 σ_α 和 τ_α 表示。对正应力 σ_α，规定以拉应力为正，压应力为负；对切应力 τ_α，则以其对单元体内任一点的矩为顺时针转向者为正，反之为负。这与以前对正应力 σ 和切应力 τ 的正负号规定是一致的。

假想地沿斜截面 ef 将单元体截分为二，留下左边部分的体元 ebf 作为研究对象(图 7-2c)。设斜截面 ef 的面积为 dA，斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α 均为正值。考虑作用在体元各面上力的平衡，对于斜截面的法线 n 和切线 t 两参考轴(图 7-2d)列出的平衡方程分别为

$$\sigma_\alpha dA + (\tau_x dA\cos\alpha)\sin\alpha - (\sigma_x dA\cos\alpha)\cos\alpha + (\tau_y dA\sin\alpha)\cos\alpha - (\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha = 0$$

$$\tau_\alpha dA - (\tau_x dA\cos\alpha)\cos\alpha - (\sigma_x dA\cos\alpha)\sin\alpha + (\tau_y dA\sin\alpha)\sin\alpha + (\sigma_y dA\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

由切应力互等定理可知，τ_x 和 τ_y 的数值相等(其指向已表示在图 7-2c 中)。据

此，即可得任一斜截面（α 截面）上的应力分量为

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \tag{7-1}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \tag{7-2}$$

上列两式就是平面应力状态（图 7-2a）下，任一 α 截面上应力 σ_α 和 τ_α 的计算公式。

二、应力圆

由上述两公式可知，当已知一平面应力状态单元体上的应力 σ_x，τ_x 和 σ_y，$\tau_y(=-\tau_x)$时，任一 α 截面上的应力 σ_α 和 τ_α 均以 2α 为参变量。从上两式中消去参变量 2α 后，即得

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2 \tag{a}$$

由上式可见，当斜截面随方位角 α 变化时，其上的应力 σ_α，τ_α 在 $\sigma-\tau$ 直角坐标系内的轨迹是一个圆，其圆心位于横坐标轴（σ 轴）上，其横坐标为$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$，半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$，如图 7-3 所示。该圆习惯上称为**应力圆**，或称为**莫尔**（O. Mohr）**应力圆**。

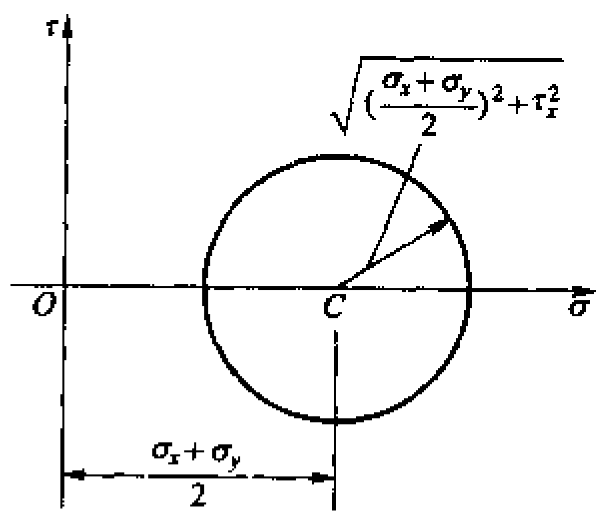


图 7-3

下面根据所研究单元体上的已知应力 σ_x，τ_x 和σ_y，$\tau_y(=-\tau_x)$（图 7-4a），作出相应的应力圆，并确定 α 截面上的应力σ_α 和τ_α。在 $\sigma-\tau$ 直角坐标系内，按选定的比例尺，量取$\overline{OB_1}=\sigma_x$，$\overline{B_1D_1}=\tau_x$ 得 D_1 点；量取$\overline{OB_2}=\sigma_y$，$\overline{B_2D_2}=\tau_y$ 得 D_2 点（图 7-4b）。连接 D_1 和 D_2 两点的直线与 σ 轴相交于 C 点，以 C 点为圆心，$\overline{CD_1}$或$\overline{CD_2}$为半径作圆。显然，该圆的圆心 C 点的横坐标为$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$，半径$\overline{CD_1}$或$\overline{CD_2}$等于$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$，因而，该圆就是相应于该单元体应力状态的应力圆。由于 D_1 点的坐标为（σ_x，τ_x），因而，D_1 点代表单元体 x 平面上的应力。若要求单元体某一 α 截面上的应力σ_α 和 τ_α，可从应力圆的半径$\overline{CD_1}$按方位角 α 的转向转动 2α 角，得到半径$\overline{CE}$，圆周上 E 点的σ，τ 坐标分别满足（7-1）和（7-2）两式，就分别代表 α 截面上的σ_α 和 τ_α。现证明如下。

从图 7-4b 可见，E 点的横坐标为

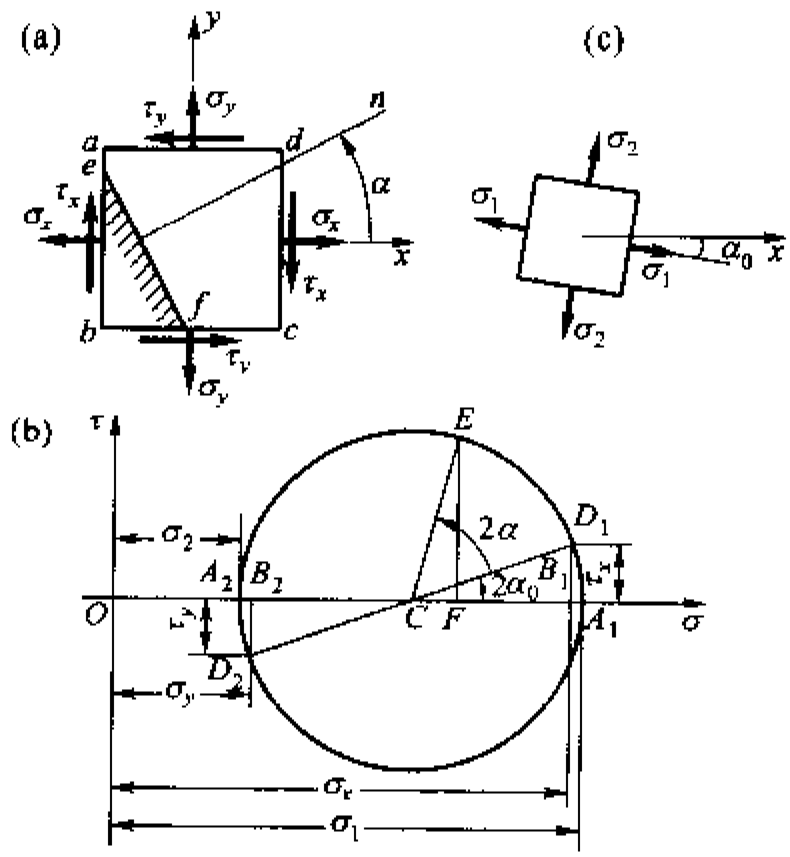


图 7-4

$$\overline{OF}=\overline{OC}+\overline{CF}$$
$$=\overline{OC}+\overline{CE}\cos(2\alpha_0+2\alpha)$$
$$=\overline{OC}+\overline{CE}\cos 2\alpha_0\cos 2\alpha-\overline{CE}\sin 2\alpha_0\sin 2\alpha$$

式中，$\overline{OC}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$；$\overline{CE}\cos 2\alpha_0=\overline{CD_1}\cos 2\alpha_0=\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)$；$\overline{CE}\sin 2\alpha_0=\overline{CD_1}\sin 2\alpha_0=\tau_x$。于是，得

$$\overline{OF}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha=\sigma_\alpha$$

上式即为式(7-1)。按类似方法可证明 E 点的纵坐标为

$$\overline{EF}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha=\tau_\alpha$$

即为式(7-2)。

从以上作图及证明可以看出，应力圆上的点与单元体上的面之间的对应关系：单元体某一面上的应力，必对应于应力圆上某一点的坐标；单元体上任意 A，B 两个面的外法线之间的夹角若为 β，则在应力圆上代表该两个面上应力的两点之间的圆弧段所对的圆心角必为 2β，且两者的转向一致(图 7-5)。实质上，这种对应关系是应力圆的参数表达式(7-1)和(7-2)以两倍方位角为参变量的必然结果。

应力圆直观地反映了一点处平面应力状态下任意斜截面上应力随截面方位

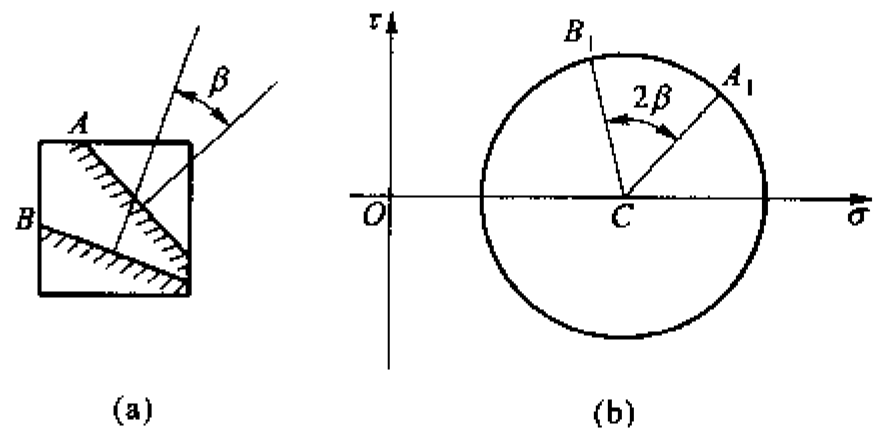


图 7-5

角而变化的规律，以及一点处应力状态的特征。在实际应用中，并不一定把应力圆看作为纯粹的图解法，可以利用应力圆来理解有关一点处应力状态的一些特征，或从图上的几何关系来分析一点处的应力状态。

三、主应力与主平面

由图 7-4b 所示应力圆上可见，A_1 和 A_2 两点的横坐标分别为该单元体各截面上正应力中的最大值和最小值，在该两截面上的切应力（即 A_1，A_2 两点的纵坐标）均等于零[①]。一点处切应力等于零的截面称为**主平面**，主平面上的正应力称为**主应力**。主应力是过一点处不同方位截面上正应力的极值。可以证明，一点处必定存在这样一个单元体，其三个相互垂直的面均为主平面。三个相互垂直的主应力分别记为 σ_1，σ_2 和 σ_3，且规定按代数值大小的顺序排列，即 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$（参见§7-3）。

下面研究如何确定该单元体的主平面位置和主应力数值。在图 7-4b 所示的应力圆上，A_1 和 A_2 两点的纵坐标均等于零，而横坐标分别为主应力 σ_1 和 σ_2[②]。由图可见，A_1 和 A_2 两点的横坐标分别为

$$\overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1}, \qquad \overline{OA_2} = \overline{OC} - \overline{CA_1}$$

式中，$\overline{OC}$ 为应力圆圆心的横坐标，$\overline{CA_1}$ 为应力圆半径。于是，可得两主应力值为

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} \tag{7-3}$$

---

① 在切应力等于零的截面上正应力为极值，这可从式（7-1）和（7-2）中得到证明。因为 $\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)}$ 和 τ_α 两表达式只差一个负号，因此，在 $\tau_\alpha = 0$ 时 $\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)} = 0$，这就是 σ_α 为极值的条件。

② 在平面应力状态中有一个主应力为零（如图 7-4a 所示的单元体中，与纸面平行的平面是主平面，其相应的主应力为零）。暂假设其他两个主应力均大于零，故记为 σ_1，σ_2（$\sigma_3 = 0$），即三个主应力按代数值大小的顺序排列。若求得的两个主应力一为拉应力而另一为压应力，则前者应为 σ_1 而后者为 σ_3，另一主应力 $\sigma_2 = 0$。同理，若求得的两主应力都是压应力，则它们应分别为 σ_2 及 σ_3，而 $\sigma_1 = 0$。

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} \tag{7-4}$$

由于圆上 D_1 点和 A_1 点分别对应于单元体上的 x 平面和 σ_1 主平面，$\angle D_1CA_1 = 2\alpha_0$ 为上述两平面间夹角 α_0 的两倍.所示单元体上从 x 平面转到 σ_1 主平面的转角为顺时针转向,按规定应为负值。因此,由应力圆可得

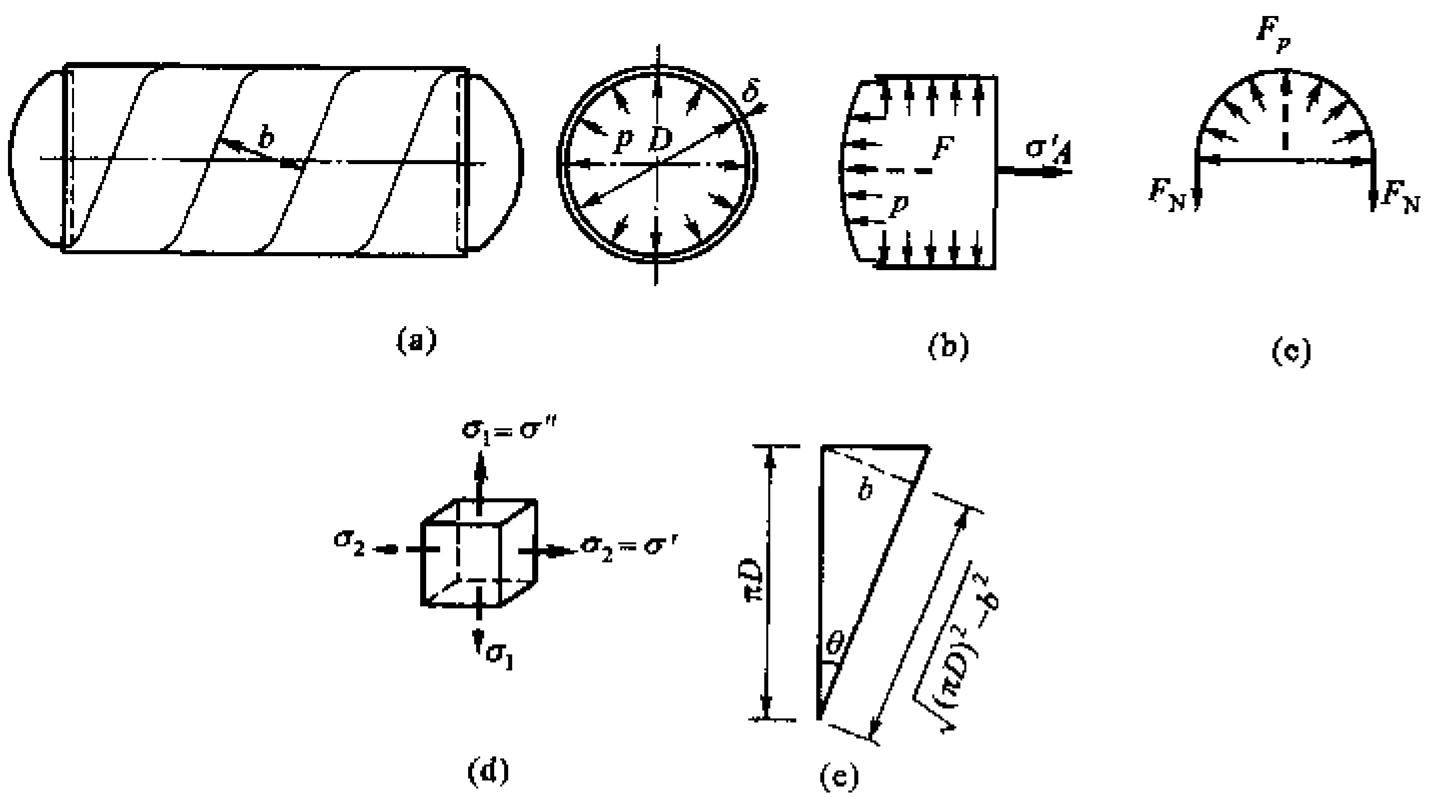
$$\tan(-2\alpha_0) = \frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\tau_x}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}$$

从而解得表示主应力 σ_1 所在主平面位置的方位角为

$$2\alpha_0 = \arctan\left(\frac{-2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \tag{7-5}$$

由于$\overline{A_1A_2}$ 为应力圆的直径,因而,σ_2 主平面与 σ_1 主平面相垂直。

例题 7-1 一两端密封的圆柱形压力容器,圆筒部分由壁厚为 δ,宽度为 b 的塑条滚压成螺旋状并熔接面成。圆筒的内直径为 D,且 $\delta \ll D$,如图 a 所示。容器承受的内压的压强为 p,若熔接部分承受的拉应力不得超过塑条中最大拉应力的 80%,试求塑条的许可宽度 b。



例题 7-1 图

解：由圆筒及其受力的对称性可知,圆筒部分的横截面上各点处的正应力 σ'可认为相等,即可按轴向拉伸计算其正应力 σ',于是,由图 b 即得

$$\sigma' = \frac{F}{A} \approx \frac{p \times \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D\delta} = \frac{pD}{4\delta} \tag{1}$$

因为 $\delta \ll D$，所以，在计算中采用了近似公式 $A \approx \pi D\delta$。

为计算圆筒纵截面上的正应力 σ''，假想地截取一段单位长的圆筒，沿纵截面将其截开，并研究上半部分(图 c)。由于圆筒上、下部分的对称性，所以纵截面上没有切应力。对于 $\delta \ll D$ 的薄壁圆筒，可认为纵截面上各点处的正应力 σ'' 相等。而该段圆筒内表面上压力的合力 $F_R = pD$，于是，由上半部分圆筒的平衡方程

$$F_p - 2F_N = 0 \quad 或 \quad pD - 2\sigma'' \times \delta \times 1 = 0$$

即得

$$\sigma'' = \frac{pD}{2\delta} \tag{2}$$

容器内表面上任一点处沿径向的正应力为

$$\sigma''' = -p$$

于是，可得圆筒内表面上各点的应力分别为

$$\sigma_1 = \sigma'' = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_2 = \sigma' = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_3 = \sigma''' = -p$$

由于 $\frac{D}{4\delta}$ 远大于 1，即 σ_3 的绝对值远小于 σ_1 和 σ_2，故可认为 $\sigma_3 = 0$，即圆筒各点处于平面应力状态(图 d)。

由图 e 可得塑条熔接缝方位角 θ 的正弦和余弦分别为

$$\sin\theta = \frac{b}{\pi D}; \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{(\pi D)^2 - b^2}}{\pi D}$$

由题意可得熔接缝拉应力 σ_θ 应满足的条件为

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \sin^2\theta + \sigma_2 \cos^2\theta \leqslant 0.8\sigma_1$$

将 σ_1，σ_2 和 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 值代入上式，经整理后即得

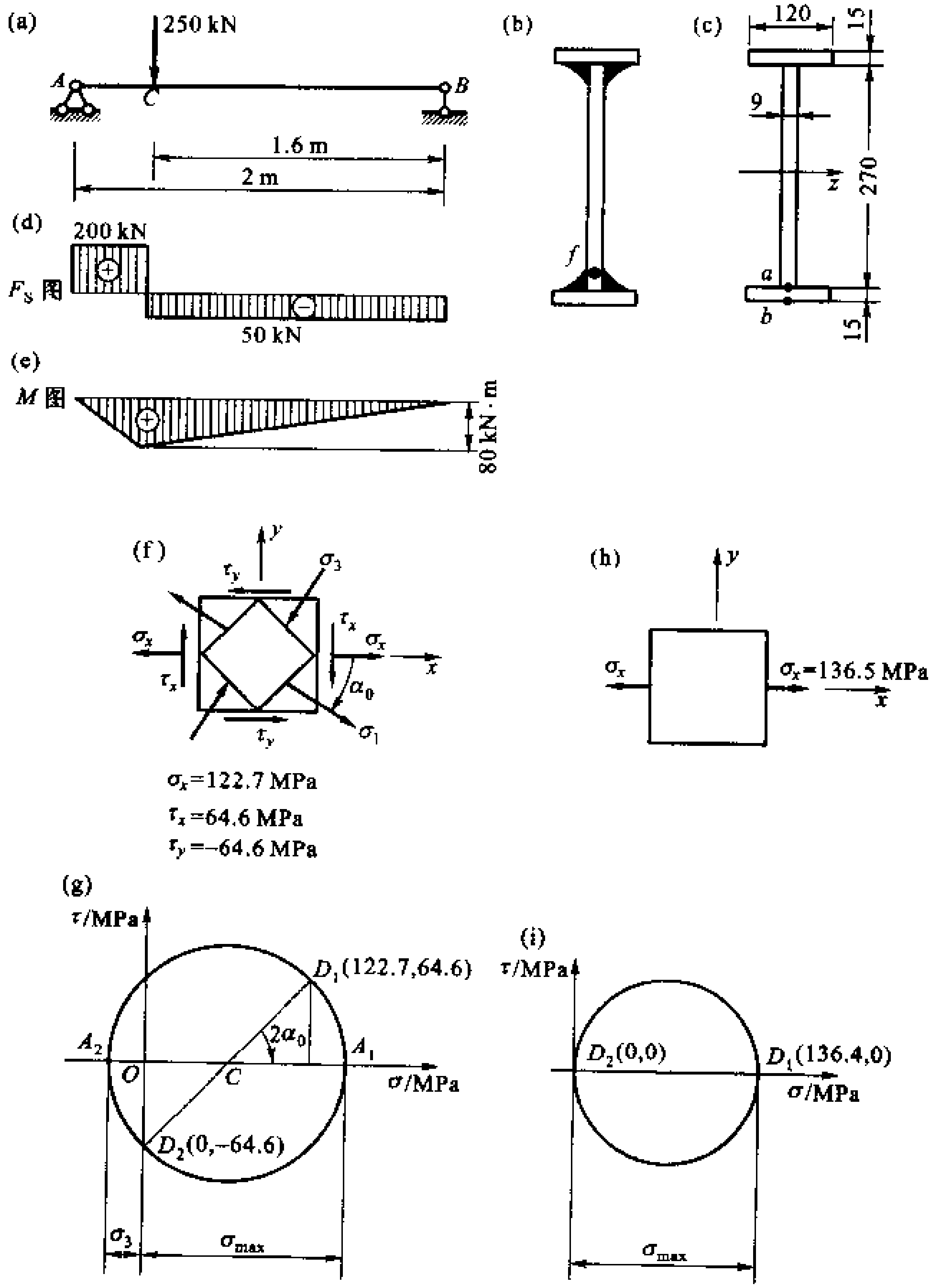
$$b^2 \leqslant 0.6(\pi D)^2, \qquad b \leqslant 2.43D$$

例题 7-2 两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图 a 和 b 所示，梁的横截面尺寸示于图 c 中。试分别绘出截面 C(图 a)上 a 和 b 两点处(图 c)的应力圆，并用应力圆求出这两点处的主应力。

解：计算支反力，并作出梁的剪力图和弯矩图如图 d 和 e 所示。然后根据截面 C 的弯矩 $M_C = 80\ \text{kN·m}$ 及截面 C 左侧的剪力值 $F_{SC} = 200\ \text{kN}$，计算横截面上 a，b 两点处的应力。为此，先算出横截面(图 c)的惯性矩 I_z 和求 a 点处切应力时需用的静矩 S_{za}^* 等：

$$I_z = \frac{(120\ \text{mm})(300\ \text{mm})^3}{12} - \frac{(111\ \text{mm})(270\ \text{mm})^3}{12} = 88 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$S_{za}^* = (120\ \text{mm} \times 15\ \text{mm})(150\ \text{mm} - 7.5\ \text{mm}) = 256\,000\ \text{mm}^3$$



例题 7－2 图

$y_a = 135\ \text{mm}$

由以上各数据可算得横截面 C 上 a 点处的应力为

$$\sigma_a = \frac{M}{I_z}y_a = \frac{80\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{88\times10^{-6}\ \text{m}^4}\times0.135\ \text{m} = 122.7\times10^6\ \text{Pa} = 122.7\ \text{MPa}$$

$$\tau_a = \frac{F_S S_{za}^*}{I_z d} = \frac{(200\times10^3\ \mathrm{N})(256\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3)}{(88\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4)(9\times10^{-3}\ \mathrm{m})} = 64.6\times10^6\ \mathrm{Pa} = 64.6\ \mathrm{MPa}$$

据此，可绘出 a 点处单元体的 x，y 两对平面上的应力，如图 f 所示。在绘出坐标轴及选定适当的比例尺后，根据单元体上的应力值即可绘出相应的应力圆（图 g）。由图 g 可见，应力圆与 σ 轴的两交点 A_1，A_2 的横坐标分别代表 a 点处的两个主应力 σ_1 和 σ_3，可按选定的比例尺量得，或由应力圆的几何关系求得[①]

$$\sigma_1 = \overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1} = 150\ \mathrm{MPa}$$

和

$$\sigma_3 = \overline{OA_2} = \overline{OC} - \overline{CA_2} = -27\ \mathrm{MPa}(\text{压应力})$$

$$2\alpha_0 = -\arctan\left(\frac{64.6\ \mathrm{MPa}}{61.35\ \mathrm{MPa}}\right) = -46.4°$$

故由 x 平面至 σ_1 所在截面的夹角 α_0 应为 $-23.2°$。显然，σ_3 所在截面应垂直于 σ_1 所在截面（图 f）。

对于横截面 C 上 b 点处的应力，由 $y_b = 150\ \mathrm{mm}$ 可得

$$\sigma_b = \frac{M}{I_z}y_b = \frac{80\times10^3\ \mathrm{N\cdot m}}{88\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4}\times0.15\ \mathrm{m} = 136.4\times10^6\ \mathrm{Pa} = 136.4\ \mathrm{MPa}$$

$$\tau_b = 0$$

据此，可绘出 b 点处所取单元体各面上的应力如图 h 所示。其相应的应力圆如图 i 所示。由此圆可见，b 点处的三个主应力分别为 $\sigma_1 = \sigma_x = 136.4\ \mathrm{MPa}$，$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$。$\sigma_1$ 所在截面就是 x 平面，亦即梁的横截面 C。

§7-3　空间应力状态的概念

对于受力物体内一点处的应力状态，最普遍的情况是所取单元体三对平面上都有正应力和切应力，而且切应力可分解为沿坐标轴方向的两个分量，如图 7-6所示。图中 x 平面上有正应力 σ_x，切应力 τ_{xy} 和 τ_{xz}。切应力的两个下标中，第一个下标表示切应力所在平面，第二个下标表示切应力的方向。同理，在 y 平面上有应力 σ_y，τ_{yz} 和 τ_{yx}；在 z 平面上有应力 σ_z，τ_{zx} 和 τ_{zy}。这种单元体所代表的应力状态，称为一般的**空间应力状态**。

在一般的空间应力状态的 9 个应力分量中，根据切应力互等定理，在数值上

---

① 此处是按图 c 中的 a 点作应力计算的，实际上梁由钢板焊接而成，a 点处不连续，因而并无切应力 τ_a。对于这种梁，在全面强度校核中，真正要计算切应力的应该是图 b 中的 f 点。但在工程计算中为了简便并偏于安全，往往就计算图 c 中 a 点处的应力以代替图 b 中 f 点处的应力。

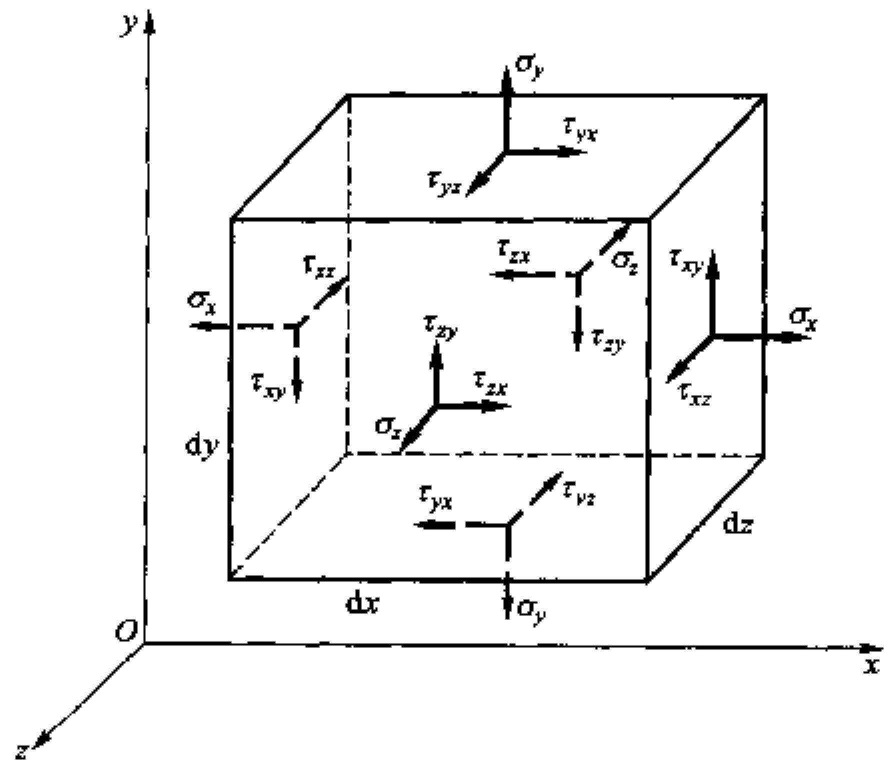


图 7－6

有 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$ 和 $\tau_{zx}=\tau_{xz}$，因而，独立的应力分量是 6 个，即 σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}。

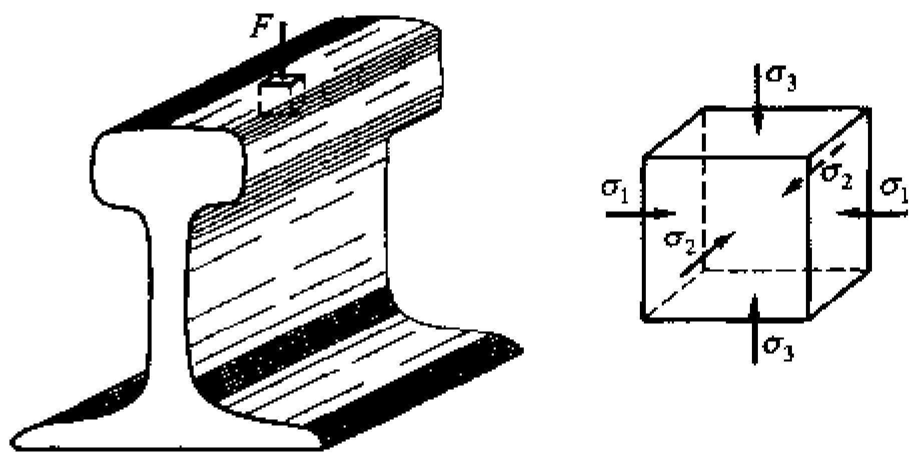
可以证明[①]，在受力物体内的任一点处一定可以找到一个单元体，其三对相互垂直的平面均为主平面，三对主平面上的主应力分别为 σ_1，σ_2，σ_3。

图 7－7a 所示为钢轨的轨头部分受车轮的静荷载作用时，围绕接触点用横截面、与接触面平行的面和铅垂纵截面截取的一个单元体，其三个相互垂直的平面都是主平面，在表面上有接触压应力 σ_3，在横截面和铅垂纵截面上分别有压应力 σ_2 和 σ_1（图 7－7b）。这是三个主应力均为压应力的空间应力状态。螺钉在拉伸时，其螺纹根部内的单元体则处于三个主应力均为拉应力的空间应力状态。

空间应力状态是一点处应力状态中最为一般的情况，§7－2 中所讨论的平面应力状态可看作是空间应力状态的特例，即有一个主应力等于零。仅一个主应力不等于零的应力状态，称为单轴应力状态。空间应力状态所得的某些结论，也同样适用于平面或单轴应力状态。

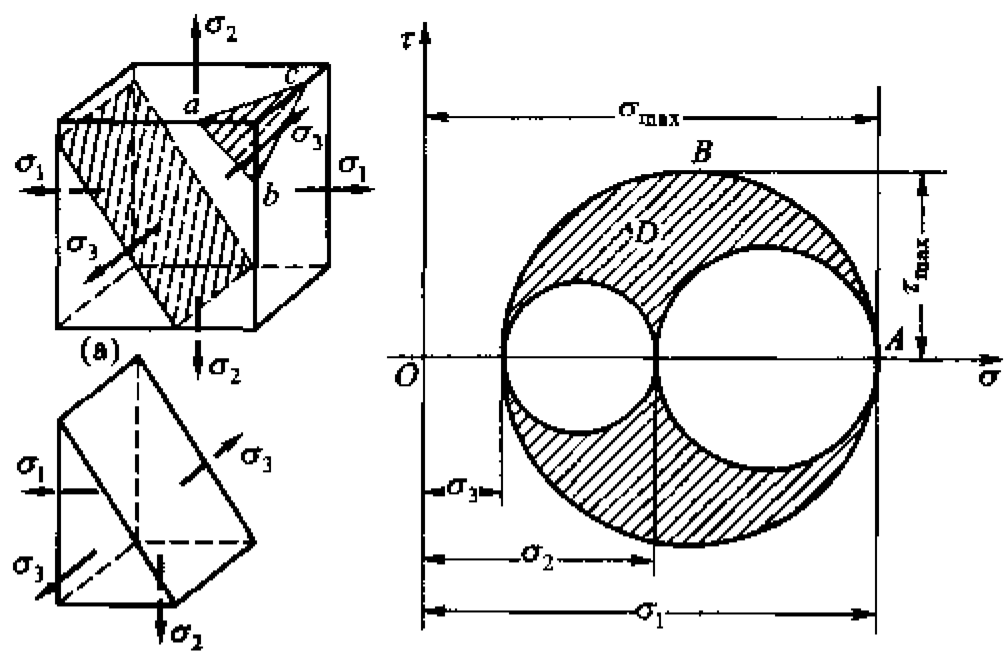
对于危险点处于空间应力状态下的构件进行强度计算，通常需确定其最大正应力和最大切应力。当受力物体内某一点处的三个主应力 σ_1，σ_2 和 σ_3 均为已知时（图 7－8a），利用应力圆，可确定该点处的最大正应力和最大切应力。首先，研究与其中一个主平面（例如主应力 σ_3 平面）垂直的斜截面上的应力。为

① 例如，参看刘鸿文主编《高等材料力学》，上册，§7－3，高等教育出版社，1985 年。



(a)　(b)

图 7-7



(a)　(b)　(c)

图 7-8

此，沿该斜截面将单元体截分为二，并研究其左边部分的平衡（图 7-8b）。由于主应力 σ_3 所在的两平面上是一对自相平衡的力，因而该斜截面上的应力 σ，τ 与 σ_3 无关。于是，这类斜截面上的应力可由 σ_1 和 σ_2 作出的应力圆上的点来表示，而该应力圆上的最大和最小正应力分别为 σ_1 和 σ_2。同理，在与 σ_2（或 σ_1）主平面垂直的斜截面上的应力 σ 和 τ，可用由 σ_1，σ_3（或 σ_2，σ_3）作出的应力圆上的点来表示。进一步的研究证明[①]，表示与三个主平面斜交的任意斜截面（图 7-8a中的 abc 截面）上应力 σ 和 τ 的 D 点，必位于上述三个应力圆所围成的阴影范围（图 7-8c）以内。

① 参看 F.B.Seely, J.O. Smith, Advanced Mechanics of Materials, Chap 3, §1, John Wiley & Sons, Inc. 1955

根据以上分析可知，在图 7－8a 所示的空间应力状态下，该点处的最大正应力(代数值)等于最大的应力圆上 A 点的横坐标σ_1(图 7－8c)，即

$$\sigma_{max}=\sigma_1 \tag{7-6}$$

而最大切应力则等于最大的应力圆上 B 点的纵坐标(图 7－8c)，为

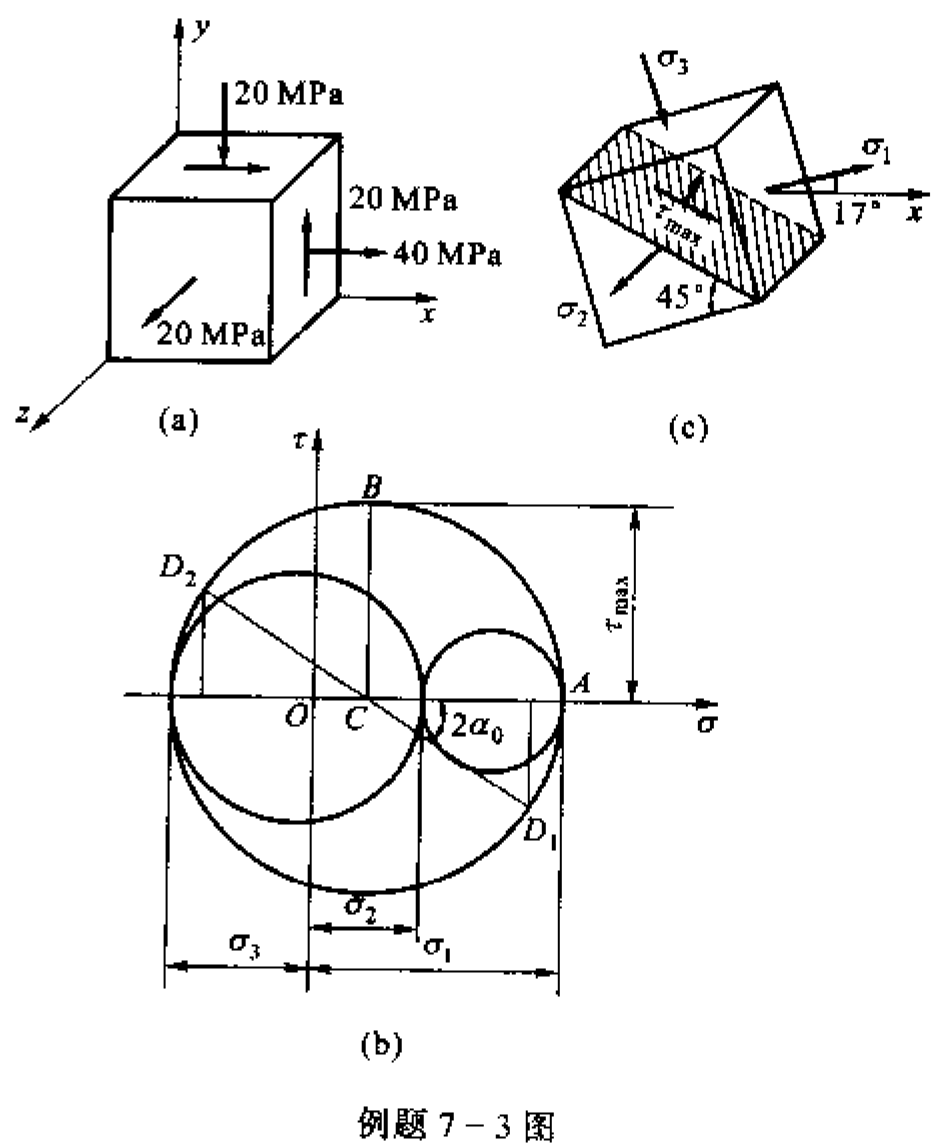
$$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) \tag{7-7}$$

由 B 点的位置可知，最大切应力所在的截面与σ_2主平面相垂直，并与σ_1和σ_3主平面各成 45°角。

上述两公式同样适用于平面应力状态(其中有一个主应力等于零)或单轴应力状态(其中有两个主应力等于零)，只需将具体问题中的主应力求出，并按代数值$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$的顺序排列。

例题 7－3 单元体各面上的应力如图 a 所示。试作应力圆，并求出主应力和最大切应力值及其作用面方位。

解：该单元体有一个已知的主应力$\sigma_z=20$ MPa。因此，与该主平面正交的各截面上的应力与主应力σ_z无关，于是，可依据 x 截面和 y 截面上的应力画出应力圆(图 b)。由应力图上可得两个主应力值为 46 MPa 和 －26 MPa。将该单



例题 7－3 图

元体的三个主应力按其代数值的大小顺序排列为

$$\sigma_1 = 46\ \text{MPa},\quad \sigma_2 = 20\ \text{MPa},\quad \sigma_3 = -26\ \text{MPa}$$

依据三个主应力值，便可作出三个应力圆如图 b 所示。在其中最大的应力圆上，B 点的纵坐标（该圆的半径）即为该单元体的最大切应力，其值为

$$\tau_{max} = \overline{BC} = 36\ \text{MPa}$$

且 $2\alpha_0 = 34°$，据此便可确定 σ_1 主平面方位及其余各主平面的位置。其中最大切应力所在截面与 σ_2 平行，与 σ_1 和 σ_3 所在的主平面各成 45°夹角，如图 c 所示。

例题 7-4　已知某结构物中一点处为平面应力状态，$\sigma_x = -180$ MPa，$\sigma_y = -90$ MPa，$\tau_x = \tau_y = 0$。试求该点处的最大切应力。

解：根据给定的应力可知，主应力 $\sigma_1 = \sigma_z = 0$，$\sigma_2 = \sigma_y = -90$ MPa，$\sigma_3 = \sigma_x = -180$ MPa。将有关的主应力值代入式(7-7)可得

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}[0 - (-180\ \text{MPa})] = 90\ \text{MPa}$$

§7-4　应力与应变间的关系

前面讨论了受力构件内一点处的应力状态，在一般空间应力状态下有 6 个独立的应力分量：σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}，与之相应的有 6 个独立的应变分量：ε_x，ε_y，ε_z，γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx}。本节主要讨论在线弹性范围内、小变形条件下，空间应力状态下应力分量与应变分量间的关系，通常称为**广义胡克定律**。

一、各向同性材料的广义胡克定律

一般空间应力状态下单元体（图 7-9a）的 6 个独立应力分量中，3 个正应力分量的正负号规定同前，即拉应力为正，压应力为负；而 3 个切应力分量的正负号则重新规定如下：若正面（外法线与坐标轴正向一致的平面）上切应力矢的指向与坐标轴正向一致，或负面（外法线与坐标轴负向一致的平面）上切应力矢的指向与坐标轴负向一致，则该切应力为正，反之为负。图 7-9a 中所表示的各应力分量均为正值。至于 6 个应变分量的正负号规定，仍与以前相同，即线应变 ε_x，ε_y，ε_z 以伸长为正，缩短为负；切应变 γ_{xy}，γ_{yz} 和 γ_{zx}（依次表示直角 $\angle xOy$，$\angle yOz$ 和 $\angle zOx$ 的变化）均以使直角减小者为正，增大者为负。按这样的正负号规定，正值的切应力就对应于正值的切应变。

对于各向同性材料，沿各方向的弹性常数 E，G，ν 均分别相同。而且，由于各向同性材料沿任一方向对于其弹性常数都具有对称性（即绕该方向旋转 180°后，材料的弹性常数保持不变），因而，在线弹性范围、小变形条件下，沿坐标轴

(或应力矢)方向,正应力只引起线应变,而切应力只引起同一平面内的切应变[①]。

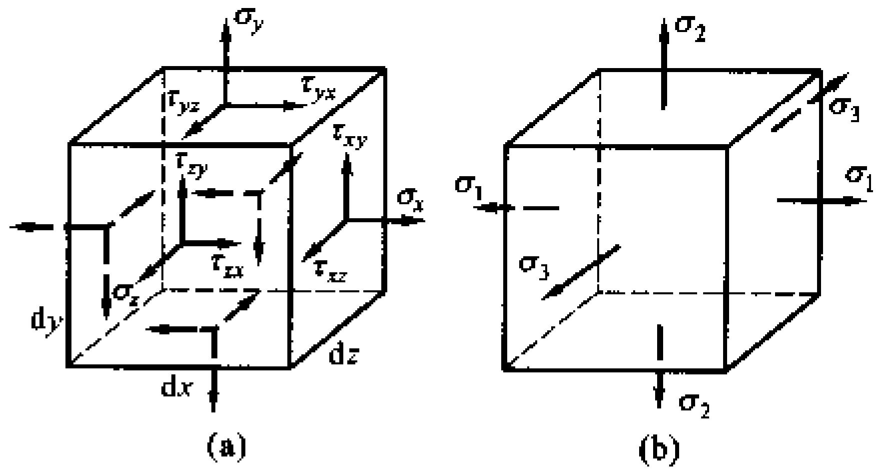


图 7-9

线应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 与正应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 之间的关系,可应用叠加原理求得。在 σ_x, σ_y 和 σ_z 分别单独存在时,x 方向的线应变 ε_x 依次分别为

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_x'' = -\nu\frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_x''' = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$

于是,在 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 同时存在时,可得 x 方向的线应变,同理,可得 y 和 z 方向的线应变,分别为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\right\} \tag{7-8a}$$

至于切应变 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 与切应力 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 之间的关系,则分别为

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\right\} \tag{7-8b}$$

式(7-8a,b)即为一般空间应力状态下,在线弹性范围内、小变形条件下各向同性材料的广义胡克定律。

在平面应力状态下,设 $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$,则由(7-8a)和(7-8b)两式

① 其证明可参看王龙甫编《弹性理论》,§4-5,科学出版社,1978年。

可得

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{7-8c}
$$

若已知空间应力状态下单元体的三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$（图 7-9b），则沿主应力方向只有线应变，而无切应变。与主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 相应的线应变分别记为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$，称为**主应变**。主应变为一点处各方位线应变中的最大与最小值，其证明将在《材料力学(II)》的第五章中讨论。

广义胡克定律可用主应力与主应变表示为

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]
\end{aligned}\right\} \tag{7-9a}
$$

在已知主应力的平面应力状态下，设 $\sigma_3 = 0$，则由式(7-9a)可得

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \\
\varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)
\end{aligned}\right\} \tag{7-9b}
$$

由上式可见，平面应力状态的 $\sigma_3 = 0$，但其相应的主应变 $\varepsilon_3 \neq 0$。值得注意的是，在线弹性范围内，由于各向同性材料的正应力只引起线应变，因此，任一点处的主应力指向与相应的主应变方向是一致的。而且，材料的三个弹性常数 E，G 和 ν 间存在着如下关系：

$$
G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{7-10}
$$

例题 7-5 已知一受力构件自由表面上某点处的两主应变值为 $\varepsilon_1 = 240 \times 10^{-6}$，$\varepsilon_3 = -160 \times 10^{-6}$。构件材料为 Q235 钢，其弹性模量 $E = 210$ GPa，泊松比 $\nu = 0.3$。试求该点处的主应力数值，并求该点处另一主应变 ε_2 的数值和方向。

解：由于主应力 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 与主应变 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 相对应，故根据题意可知该点处 $\sigma_2=0$，而处于平面应力状态。因此，由平面应力状态下的广义胡克定律得

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\sigma_1)$$

联立上列两式，即可解得

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3) = \frac{210\times10^9\ \text{Pa}}{1-0.3^2}(240-0.3\times160)\times10^{-6}$$
$$= 44.3\times10^6\ \text{Pa} = 44.3\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_3 + \nu\varepsilon_1) = \frac{210\times10^9\ \text{Pa}}{1-0.3^2}(-160+0.3\times240)\times10^{-6}$$
$$= -20.3\times10^6\ \text{Pa} = -20.3\ \text{MPa}$$

主应变 ε_2 的数值可由式(7－9a)求得

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_3) = -\frac{0.3}{210\times10^9\ \text{Pa}}(44.3\times10^6\ \text{Pa} - 20.3\times10^6\ \text{Pa})$$
$$= -34.3\times10^{-6}$$

由此可见，主应变 ε_2 是缩短，其方向必与 ε_1 及 ε_3 垂直，即沿构件表面的法线方向。

*二、各向异性材料的广义胡克定律

在§2－6中已经指出，木材、玻璃钢纤维增强复合材料的力学性能是与受力方向有关的，即是各向异性材料。

当各向异性材料的受力构件内一点处于一般空间应力状态时（图7－9a），由于这类材料不存在关于材料性能的弹性对称轴（或应力方向不与材料的弹性对称轴平行），因而每一个应力分量将引起所有的6个应变分量，即正应力不仅引起线应变，同时也引起三个切应变；切应力也将引起所有的切应变和线应变。但在线弹性范围内、小变形条件下，应变与应力间仍为线性关系，因而，其应力分量与应变分量间的关系可表达为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{yz} + C_{15}\tau_{zx} + C_{16}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y &= C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{yz} + C_{25}\tau_{zx} + C_{26}\tau_{xy}\\
\varepsilon_z &= C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{yz} + C_{35}\tau_{zx} + C_{36}\tau_{xy}\\
\gamma_{yz} &= C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{yz} + C_{45}\tau_{zx} + C_{46}\tau_{xy}\\
\gamma_{zx} &= C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{yz} + C_{55}\tau_{zx} + C_{56}\tau_{xy}\\
\gamma_{xy} &= C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{yz} + C_{65}\tau_{zx} + C_{66}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\quad(7-11)$$

上式称为各向异性材料的广义胡克定律。式中，弹性常数 C_{ij} 用两个下标表示：

第一个下标与应变分量有关($i=1,2,\cdots,6$ 分别对应于 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\cdots,\gamma_{xy}$);第二个下标与应力分量有关($j=1,2,\cdots,6$ 分别对应于 $\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy}$)。总共有 36 个弹性常数。可以证明[①],当下标次序转置时,弹性常数是相等的,即 $C_{ij}=C_{ji}$,因此,各向异性材料独立的弹性常数是 21 个。值得注意的是,由于正应力也将引起切应变,因而,当单元体在 3 个主应力作用下,将同时引起线应变和切应变。这也就是说,一点处的主应力方向与主应变方向是不重合的。

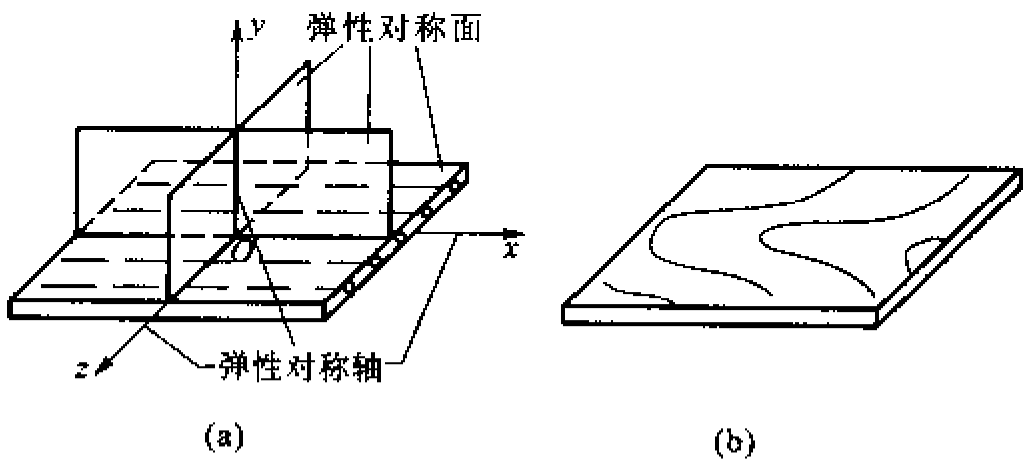


图 7-10

在工程实际中,各向异性材料往往具有一些关于弹性性能的对称面,而弹性对称面的交线为弹性对称轴。若材料具有 3 个相互垂直的弹性对称轴,且沿 3 个正交的弹性对称轴方向的材料性能各不相同,则称为正交异性材料。例如,所有纤维都排列成同一方向的单向复合材料(图 7-10a)就是正交异性材料,木材(图 7-10b)也可近似地看作是正交异性材料。

当正交异性材料的单元体上 6 个应力分量都平行于材料的弹性对称轴时,由对称性可知,对于与应力分量平行的棱边,正应力将只引起线应变,切应力也将只引起其自身平面内的切应变。于是,正交异性材料的广义胡克定律为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=C_{11}\sigma_x+C_{12}\sigma_y+C_{13}\sigma_z\\\varepsilon_y&=C_{21}\sigma_x+C_{22}\sigma_y+C_{23}\sigma_z\\\varepsilon_z&=C_{31}\sigma_x+C_{32}\sigma_y+C_{33}\sigma_z\\\gamma_{yz}&=C_{44}\tau_{yz}\\\gamma_{zx}&=C_{55}\tau_{zx}\\\gamma_{xy}&=C_{66}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{7-12}$$

考虑到 $C_{12}=C_{21},C_{13}=C_{31},C_{23}=C_{32}$,因而,正交异性材料独立的弹性常数是 9 个。

① 例如,参看钱伟长、叶开源编《弹性力学》,§4-2,科学出版社,1980 年。

三、各向同性材料的体应变

构件在受力变形后，通常将引起体积变化。每单位体积的体积变化，称为**体应变**，用 θ 表示。现研究各向同性材料在空间应力状态下（图 7－11）的体应变。

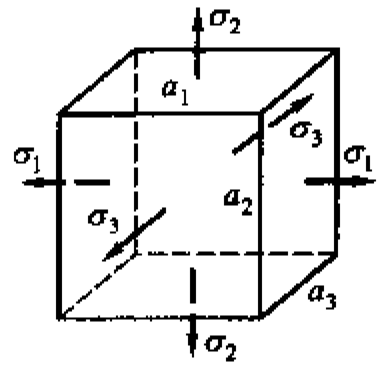


图 7－11

设单元体的三对平面为主平面，其三个边长分别为 a_1, a_2, a_3，变形后的边长则分别为 $a_1(1+\varepsilon_1)$，$a_2(1+\varepsilon_2)$，$a_3(1+\varepsilon_3)$，因此，变形后单元体的体积为

$$V' = a_1(1+\varepsilon_1)\cdot a_2(1+\varepsilon_2)\cdot a_3(1+\varepsilon_3)$$

由体应变的定义，并在小变形条件下略去线应变乘积项的高阶微量，可得

$$\theta = \frac{V'-V}{V} = \frac{a_1(1+\varepsilon_1)\cdot a_2(1+\varepsilon_2)\cdot a_3(1+\varepsilon_3) - a_1a_2a_3}{a_1a_2a_3}$$

$$\approx \frac{a_1a_2a_3(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - a_1a_2a_3}{a_1a_2a_3} = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

将空间应力状态下的广义胡克定律公式(7－9a)代入上式，经简化后即得

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \qquad (7-13a)$$

即任一点处的体应变与该点处的三个主应力之和成正比。

对于平面纯剪切应力状态，$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{xy}$，$\sigma_2 = 0$，由式(7－13a)可见，材料的体应变等于零，即在小变形条件下，切应力不引起各向同性材料的体积改变。因此，在图 7－9a 所示的一般空间应力状态下，材料的体应变只与三个线应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 有关。于是，仿照上述推导可得

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \qquad (7-13b)$$

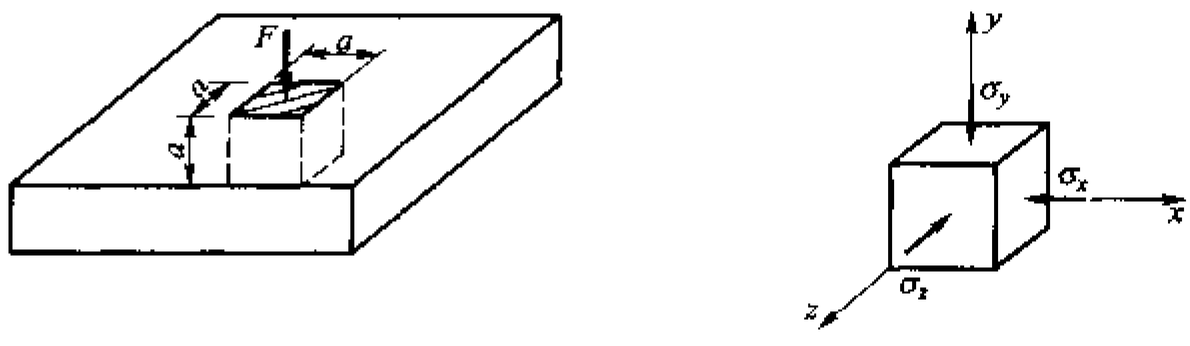
由此可知，在任意形式的应力状态下，各向同性材料内一点处的体应变与通过该点的任意三个相互垂直的平面上的正应力之和成正比，而与切应力无关。

例题 7－6　边长 $a = 0.1$ m 的铜立方块，无间隙地放入体积较大、变形可略去不计的钢凹槽中，如图 a 所示。已知铜的弹性模量 $E = 100$ GPa，泊松比 $\nu = 0.34$。当受到 $F = 300$ kN 的均布压力作用时，试求铜块的主应力、体应变以及最大切应力。

解：铜块横截面上的压应力为

$$\sigma_y = -\frac{F}{A} = -\frac{300\times10^3\ \text{N}}{(0.1\ \text{m})^2} = -30\times10^6\ \text{Pa} = -30\ \text{MPa}$$

铜块受到轴向压缩将产生膨胀，但受到刚性凹槽壁的阻碍，使铜块在 x 和 z 方向的线应变等于零。于是，在铜块与槽壁接触面间将产生均匀的压应力 σ_x 和



例题 7－6 图

σ_z，如图 b 所示。按照广义胡克定律公式(7－8a)可得

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]=0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_y+\sigma_x)]=0 \tag{2}$$

联解(1)，(2)两式，可得

$$\sigma_x=\sigma_z=\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu^2}\sigma_y$$
$$=\frac{0.34(1+0.34)}{1-0.34^2}(-30\times10^6\ \text{Pa})=-15.5\times10^6\ \text{Pa}=-15.5\ \text{MPa}$$

按主应力的代数值顺序排列，得铜块的主应力为

$$\sigma_1=\sigma_2=-15.5\ \text{MPa},\quad \sigma_3=-30\ \text{MPa}$$

将以上数据代入计算体应变公式(7－13a)，可得铜块的体应变为

$$\theta=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$
$$=\frac{1-2\times0.34}{100\times10^9\ \text{Pa}}(-15.5\times10^6\ \text{Pa}-15.5\times10^6\ \text{Pa}-30\times10^6\ \text{Pa})$$
$$=-1.95\times10^{-4}$$

将有关的主应力值代入式(7－7)，可得

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=\frac{1}{2}[-15.5\times10^6\ \text{Pa}-(-30\times10^6\ \text{Pa})]$$
$$=7.25\times10^6\ \text{Pa}=7.25\ \text{MPa}$$

§7－5　空间应力状态下的应变能密度

物体受外力作用而产生弹性变形时，在物体内部将积蓄有应变能，每单位体积物体内所积蓄的应变能称为应变能密度。在单轴应力状态下，物体内所积蓄

的应变能密度已在§2－5中给出，即

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E}{2}\varepsilon^2 \tag{a}$$

对于在线弹性范围内、小变形条件下受力的物体，所积蓄的应变能只取决于外力的最后数值，而与加力顺序无关[①]。为便于分析，假设物体上的外力按同一比例由零增至最后值，因此，物体内任一单元体各面上的应力也按同一比例由零增至其最后值。现按此比例加载的情况，来分析已知三个主应力值的空间应力状态下单元体(图7－12a)的应变能密度。对应于每一主应力，其应变能密度等于该主应力在与之相应的主应变上所作的功，而其他两个主应力在该主应变上并不作功。因此，同时考虑三个主应力在与其相应的主应变上所作的功，单元体的应变能密度应为

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) \tag{b}$$

将由主应力与主应变表达的广义胡克定律公式(7－9a)代入上式，经整理简化后得

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \tag{7-14}$$

在一般情况下，单元体将同时发生体积改变和形状改变。若将主应力单元体(图7－12a)分解为图7－12b，c所示两种单元体的叠加。其中，σ_m 称为**平均应力**，即

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

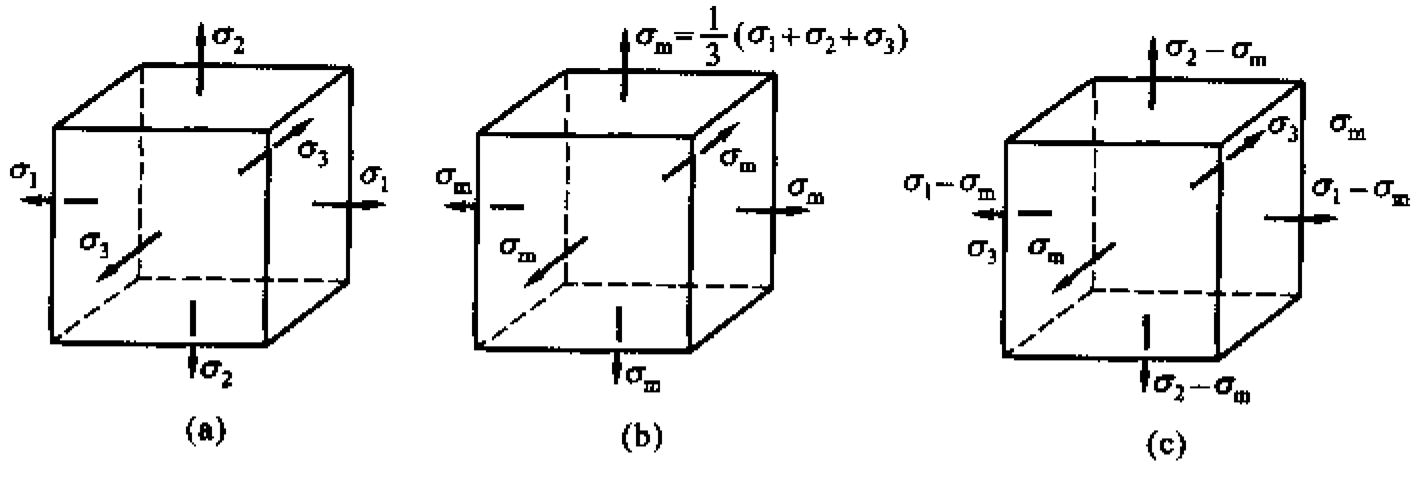


图 7－12

在平均应力作用下(图7－12b)，单元体的形状不变，仅发生体积改变，且其三个主应力之和与图7－12a所示单元体的三个主应力之和相等，故其应变能密度就等于图7－12a所示单元体的**体积改变能密度**，即

① 关于这一点将在《材料力学(Ⅱ)》的第三章中加以论证。

$$v_V = \frac{1}{2E}[\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\nu(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2)]$$

$$= \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_m^2 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \tag{7-15}$$

图 7-12c 所示单元体的三个主应力之和为零，故其体积不变，仅发生形状改变。于是，其应变能密度就等于图 7-12a 所示单元体的**形状改变能密度**。其值由式(7-14)经整理简化后可得

$$v_d = v_\varepsilon - v_V$$

$$= \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \tag{7-16}$$

由式(7-14)，(7-15)与(7-16)可以证明

$$v_\varepsilon = v_V + v_d \tag{c}$$

即应变能密度 v_ε 等于体积改变能密度 v_V 与形状改变能密度 v_d 之和。

对于一般空间应力状态下的单元体(图 7-9a)，其应变能密度可用 6 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 来表达。由于在小变形条件下，对应于每个应力分量的应变能密度均等于该应力分量与相应的应变分量的乘积之半，故有

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{d}$$

将广义胡克定律公式(7-8a)及(7-8b)代入上式，即可得到用 6 个应力分量表达的应变能密度表达式，建议读者自行推导。

§7-6 强度理论及其相当应力

为了建立空间应力状态下材料的强度条件，就需寻求导致材料破坏的规律，即研究**强度理论**。回顾材料在拉伸、压缩以及扭转等试验中发生的破坏现象，不难发现材料破坏的基本形式有两种类型：一类是在没有明显的塑性变形情况下发生突然断裂，称为**脆性断裂**。如铸铁试样在拉伸时沿横截面的断裂和铸铁圆试样在扭转时沿斜截面的断裂。另一类是材料产生显著的塑性变形而使构件丧失正常的工作能力，称为**塑性屈服**。如低碳钢试样在拉伸(压缩)或扭转时都会发生显著的塑性变形，有的并会出现屈服现象。长期以来，通过生产实践和科学研究，针对这两类破坏形式，曾提出过不少关于材料破坏因素的假设，下面主要介绍经过实验和实践检验，在工程中常用的四个强度理论。

第一类强度理论是以脆性断裂作为破坏标志的，其中包括最大拉应力理论和最大伸长线应变理论。远在 17 世纪时，就先后提出了这一类理论，因为当时的主要建筑材料是砖、石、铸铁等脆性材料，所以，观察到的破坏现象多为脆断。但最初提出这两个理论时，只认为破坏的原因是最大正应力(包括拉应力和压应

力)或最大线应变(包括伸长和缩短)。到后来才明确了脆断只有在以拉伸为主的情况下才可能发生,因此,经过修正后就采取了如下所述的形式。

最大拉应力理论 最大拉应力理论也称为第一强度理论。这一理论的假说是:最大拉应力 σ_t 是引起材料脆断破坏的因素,也就是认为不论在什么样的应力状态下,只要构件内一点处的三个主应力中最大的拉应力 σ_t(即 σ_1)达到材料的极限应力 σ_u,材料就发生脆性断裂。至于材料的极限应力 σ_u,则可通过单轴拉伸试样发生脆性断裂的试验来确定。于是,按照这一强度理论,脆性断裂的判据是

$$\sigma_1 = \sigma_u \tag{a}$$

将式(a)右边的极限应力除以安全因数,就得到材料的许用拉应力[σ],因此,按第一强度理论所建立的强度条件为

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma] \tag{7-17}$$

应该指出,上式中的 σ_1 为拉应力。在没有拉应力的三轴压缩应力状态下,显然不能采用第一强度理论来建立强度条件。而式中的[σ]为试样发生脆性断裂的许用拉应力,也不能单纯地理解为材料在单轴拉伸时的许用应力。

最大伸长线应变理论 最大伸长线应变理论也称为第二强度理论。这一理论的假说是:最大伸长线应变 ε_t 是引起材料脆性断裂的因素,也就是认为不论在什么样的应力状态下,只要构件内一点处的最大伸长线应变 ε_t(即 ε_1)达到了材料的极限值 ε_u,材料就会发生脆断破坏。同理,材料的极限值同样可通过单轴拉伸试样发生脆性断裂的试验来确定。如果这种材料直到发生脆性断裂时都可近似地看作线弹性,即服从胡克定律,则

$$\varepsilon_u = \frac{\sigma_u}{E} \tag{b}$$

式中,σ_u 就是单轴拉伸试样在拉断时其横截面上的正应力。于是,按照这一强度理论,脆性断裂的判据是

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_u = \frac{\sigma_u}{E} \tag{c}$$

而由广义胡克定律公式(7-9a)可知,在线弹性范围内工作的构件,处于复杂应力状态下一点处的最大伸长线应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

于是,式(c)可改写为

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_u}{E}$$

或

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_u \tag{d}$$

将上式右边的 σ_u 除以安全因数即得材料的许用拉应力[σ]，故按第二强度理论所建立的强度条件为

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma] \tag{7-18}$$

在以上分析中引用了广义胡克定律，所以，按照这一强度理论所建立的强度条件应该只适用于以下情况，即构件直到发生脆断前都应服从胡克定律[①]。

必须注意，在式(7-18)中所用的[σ]是材料在单轴拉伸时发生脆性断裂的许用拉应力，像低碳钢一类的塑性材料，是不可能通过单轴拉伸试验得到材料在脆断时的极限值 ε_u 的。所以，对低碳钢等塑性材料在三轴拉伸应力状态下，该式右边的[σ]不能理解为材料在单轴拉伸时的许用拉应力。

实验表明，这一理论与石料、混凝土等脆性材料在压缩时纵向开裂的现象是一致的。这一理论考虑了其余两个主应力 σ_2 和 σ_3 对材料强度的影响，在形式上较最大拉应力理论更为完善。但实际上并不一定总是合理的，如在二轴或三轴受拉情况下，按这一理论反比单轴受拉时不易断裂，显然与实际情况并不相符。一般地说，最大拉应力理论适用于脆性材料以拉应力为主的情况，而最大伸长线应变理论适用于压应力为主的情况。由于这一理论在应用上不如最大拉应力理论简便，故在工程实践中应用较少，但在某些工业部门(如在炮筒设计中)应用较为广泛。

第二类强度理论是以出现塑性屈服或发生显著的塑性变形作为破坏标志的，其中包括最大切应力理论和形状改变能密度理论。这些理论都是从 19 世纪末叶以来，随着工程中大量使用像低碳钢一类塑性材料，并对材料发生塑性变形的物理本质有了较多认识后，先后提出和推广应用的。

最大切应力理论　最大切应力理论又称为第三强度理论。这一理论的假说是：最大切应力 τ_{max} 是引起材料塑性屈服的因素，也就是认为不论在什么样的应力状态下，只要构件内一点处的最大切应力 τ_{max} 达到了材料屈服时的极限值 τ_u，该点处的材料就会发生屈服。至于材料屈服时切应力的极限值 τ_u，同样可以通过单轴拉伸试样发生屈服的试验来确定。对于像低碳钢一类的塑性材料，在单轴拉伸试验时材料就是沿最大切应力所在的 45°斜截面发生滑移面出现明显的屈服现象的。这时试样在横截面上的正应力就是材料的屈服极限 σ_s，于是，对于这一类材料，可得材料屈服时切应力的极限值 τ_u 为

$$\tau_u = \frac{\sigma_s}{2} \tag{e}$$

所以，按照这一强度理论，屈服判据为

① 对于大多数在拉伸时发生脆断的材料，在最终断裂前会出现少量的非线性变形。但由于这种非线性变形不大，因而，仍可近似地将其看作是服从胡克定律的。

$$\tau_{max} = \tau_u = \frac{\sigma_s}{2} \tag{f}$$

在复杂应力状态下一点处的最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

式中，σ_1 和 σ_3 分别为该应力状态中的最大和最小主应力。于是，屈服判据可改写为

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_s$$

或

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \tag{g}$$

将上式右边的 σ_s 除以安全因数即得材料的许用拉应力[σ]，故按第三强度理论所建立的强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma] \tag{7-19}$$

应该指出，在上式右边采用了材料在单轴拉伸时的许用拉应力，这只对于在单轴拉伸时发生屈服的材料才适用。像铸铁、大理石这一类脆性材料，不可能通过单轴拉伸试验得到材料屈服时的极限值 τ_u，因此，对于这类材料在三轴不等值压缩的应力状态下，以式(7－19)作为强度条件时，该式右边的[σ]就不能理解为材料在单轴拉伸时的许用拉应力。

形状改变能密度理论　形状改变能密度理论通常也称为第四强度理论。这一理论的假说是：形状改变能密度 v_d 是引起材料屈服的因素，也就是认为不论在什么样的应力状态下，只要构件内一点处的形状改变能密度 v_d 达到了材料的极限值 v_{du}，该点处的材料就会发生塑性屈服。对于像低碳钢一类的塑性材料，因为在拉伸试验时当正应力达到 σ_s 时就出现明显的屈服现象，故可通过拉伸试验来确定材料的 v_{du} 值。为此，可利用式(7－16)，

$$v_d = \frac{(1+\nu)}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

将 $\sigma_1 = \sigma_s$，$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 代入上式，从而求得材料的极限值 v_{du} 为①

$$v_{du} = \frac{(1+\nu)}{6E} \times 2\sigma_s^2 \tag{h}$$

所以，按照这一强度理论的观点，屈服判据 $v_d = v_{du}$ 可改写为

$$\frac{(1+\nu)}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{(1+\nu)}{6E} \times 2\sigma_s^2$$

---

① 由于式(7－16)只当材料在线弹性范围内工作时才严格成立，故这里将该式应用到屈服应力是略有误差的，但在工程应用范围内，当开始发生屈服而塑性变形并不太大时，其误差可略去不计。

并简化为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sigma_s \tag{i}$$

再将上式右边的 σ_s 除以安全因数得到材料的许用拉应力[σ]，于是，按第四强度理论所建立的强度条件为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma] \tag{7-20}$$

式中，σ_1，σ_2 和 σ_3 是构件危险点处的三个主应力。

同理，式(7-20)右边采用材料在单轴拉伸时的许用拉应力，因而，只对于在单轴拉伸时发生屈服的材料才适用。

试验表明，在平面应力状态下，一般地说，形状改变能密度理论较最大切应力理论更符合试验结果。由于最大切应力理论是偏于安全的，且使用较为简便，故在工程实践中应用较为广泛。

从式(7-17)~(7-20)的形式来看，按照四个强度理论所建立的强度条件可统一写作

$$\sigma_r\leqslant[\sigma] \tag{7-21}$$

式中，σ_r是根据不同强度理论所得到的构件危险点处三个主应力的某些组合。从式(7-21)的形式上来看，这种主应力的组合 σ_r 和单轴拉伸时的拉应力在安全程度上是相当的，因此，通常称 σ_r 为**相当应力**。根据式(7-17)~(7-20)，可以将四个强度理论的相当应力表达式归纳列于表 7-1。

表 7-1 四个强度理论的相当应力表达式

强度理论的分类及名称		相当应力表达式
第一类强度理论 (脆性断裂的理论)	第一强度理论——最大拉应力理论	$\sigma_{r1}=\sigma_1$
	第二强度理论——最大伸长线应变理论	$\sigma_{r2}=\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)$
第二类强度理论 (塑性屈服的理论)	第三强度理论——最大切应力理论	$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$
	第四强度理论——形状改变能密度理论	$\sigma_{r4}=\left\{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]\right\}^{1/2}$

应该指出，按某一强度理论的相当应力，对于危险点处于复杂应力状态的构件进行强度校核时，一方面要保证所用强度理论与在这种应力状态下发生的破坏形式相对应，另一方面要求用以确定许用应力[σ]的，也必须是相应于该破坏形式的极限应力。

*§ 7－7　莫尔强度理论及其相当应力

莫尔强度理论并不简单地假设材料的破坏是由某一个因素(例如应力、应变或能密度)达到了其极限值而引起的,而是以各种应力状态下材料的破坏试验结果为依据,建立起来的带有一定经验性的强度理论。

在§7－3中曾经指出,一点处的应力状态可用三个应力圆来表示,这三个应力圆上各点的坐标(σ,τ)分别代表与某一个主平面垂直的一组斜截面上的应力,任意斜截面上的应力则可用三个应力圆之间的阴影区域(图7－8)内相应点的坐标(σ,τ)来表示。而代表一点处应力状态中最大正应力和最大切应力的点均在外圆上,因此,莫尔假设单由外圆就足以决定极限应力状态,即开始屈服或发生脆断时的应力状态,而不必考虑中间主应力 σ_2 对材料强度的影响。

按材料在破坏时的主应力 σ_1,σ_3 所作的应力圆,就代表在极限应力状态下的应力圆,称为**极限应力圆**。莫尔认为,根据试验所得到的在各种应力状态下的极限应力圆具有一条公共包络线,一般地说,包络线 ABC 是条曲线,如图7－13所示。从理论上讲,需求得其公共包络线,以确定各种应力状态下的极限应力圆。从工程应用的角度来看,可以用单轴拉伸和单轴压缩两种应力状态下试验所得的两个极限应力圆为依据,以两圆的公切线作为近似的公共包络线,如图7－14。

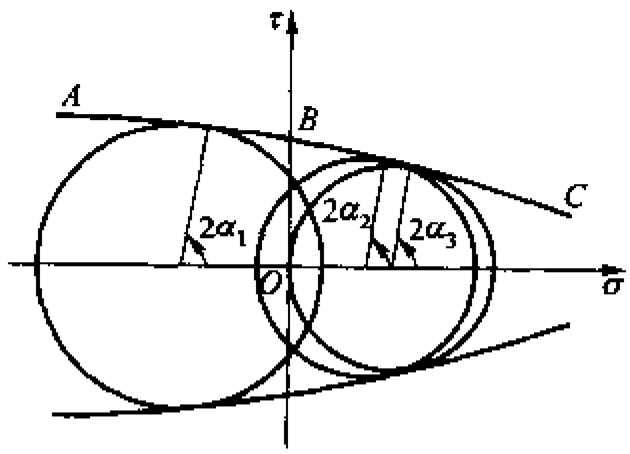


图 7－13

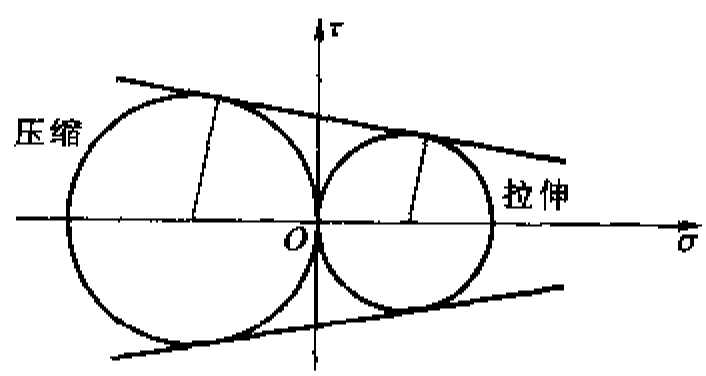


图 7－14

为了进行强度计算,还应该引进适当的安全因数。于是,可用材料在单轴拉伸和压缩时的许用拉应力[σ_t]和许用压应力[σ_c]分别作出单轴拉伸和单轴压缩时的许用应力圆,并作两圆的公切线(图7－15)。然后,以这条公切线来求得复杂应力状态下的强度条件。

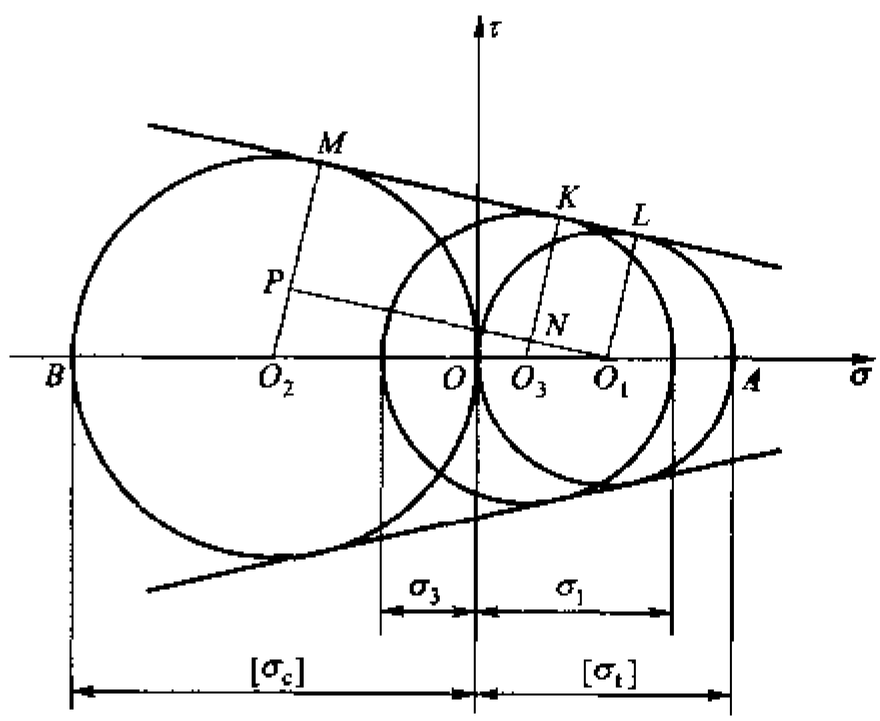


图 7-15

若在图 7-15 中以 σ_1,σ_3 所作的应力圆代表所研究的复杂应力状态下的许用应力圆,则 σ_1 和 σ_3 值与材料的$[\sigma_t]$和$[\sigma_c]$间的关系就可通过图中的几何关系确定。由两个相似三角形$\triangle O_1O_3N$ 和$\triangle O_1O_2P$ 对应边的比例关系可得

$$\overline{O_3N}:\overline{O_2P}=\overline{O_3O_1}:\overline{O_2O_1} \tag{a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\overline{O_3N}&=\overline{O_3K}-\overline{O_1L}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)-\frac{1}{2}[\sigma_t]\\
\overline{O_2P}&=\overline{O_2M}-\overline{O_1L}=\frac{1}{2}[\sigma_c]-\frac{1}{2}[\sigma_t]\\
\overline{O_3O_1}&=\overline{O_1O}-\overline{O_3O}=\frac{1}{2}[\sigma_t]-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\\
\overline{O_2O_1}&=\overline{O_1O}+\overline{O_2O}=\frac{1}{2}[\sigma_t]+\frac{1}{2}[\sigma_c]
\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

注意,在以上各式中$[\sigma_c]$为其绝对值,而 σ_3 若为压应力仍应用负值。将式(b)中的四个关系代入式(a),经化简后即得

$$\sigma_1-\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3=[\sigma_t] \tag{c}$$

上式中的 σ_1 和 σ_3 是所研究的复杂应力状态下的许用应力值,若将其改为实际构件中危险点处的工作应力值,则相应的强度条件为

$$\sigma_1-\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3\leqslant[\sigma_t] \tag{7-22}$$

由上式可知,按莫尔强度理论所得的相当应力表达式为

$$\sigma_{rM} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3 \tag{7-23}$$

当材料在单轴拉伸和压缩时的许用拉、压应力相等时，上式右边成为$(\sigma_1 - \sigma_3)$，而与第三强度理论的相当应力一致。由此可见，莫尔强度理论可看作是第三强度理论的发展，考虑了材料在单轴拉伸和单轴压缩时强度不等的因素。

对于像铸铁一类脆性材料，其许用拉、压应力显然不等，因此，莫尔强度理论为这一类材料在复杂应力状态中最大和最小主应力分别为拉应力和压应力的情况建立了强度条件。应该指出，这种处理方法并不严格，因为铸铁在单轴拉伸和单轴压缩时发生脆断的原因并不相同。但是，作为一种工程上的实用方法，还是可取的。

§7-8　各种强度理论的应用

前面介绍了几种工程中常用的强度理论，所有强度理论的提出是以生产实践和科学试验为基础的，而每一个强度理论的建立都需经受实验与实践的检验。强度理论着眼于材料的破坏规律，试验表明，不同材料的破坏因素可能不同，而同一种材料在不同的应力状态下也可能具有不同的破坏因素。例如，带尖锐环形深切槽的低碳钢试样(图 7-16a)，在单轴拉伸时直至拉断均无明显的塑性变形，而是沿切槽根部截面发生脆性断裂(图 7-16b)。又如，圆柱形大理石试样在轴向压缩的同时，在圆柱体表面承受均匀的径向压力，且保持径向压力恒小于轴向压力，则大理石试样也会发生明显的塑性变形，而被压成腰鼓形(图 7-17)。

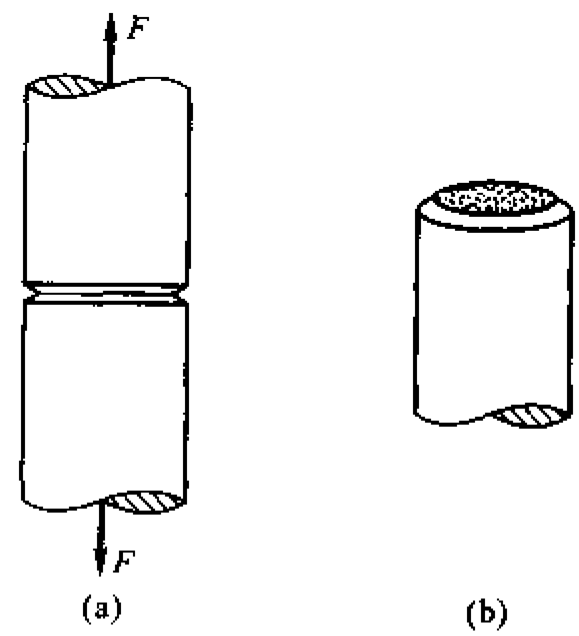


图 7-16

根据试验资料，可把各种强度理论的适用范围归纳如下：

(1) 本章所述强度理论均仅适用于常温、静荷载条件下的匀质、连续、各向同性的材料。对于在高温、冲击荷载下或者材料带有初始裂纹时的材料强度，可参阅《材料力学(II)》的第七章。

(2) 不论是脆性或塑性材料，在三轴拉伸应力状态下，都会发生脆性断裂，宜采用最大拉应力理论。但应指出，对于塑性材料，由于从单轴拉伸试验结果不可能得到材料发生脆断的极限应力，所以，对于用这类材料制成的构件在按最大拉应力理论进行强度校核时，式(7-17)右边的$[\sigma]$就不能取在单轴拉伸时的许

用拉应力值，而应用发生脆断时的最大主应力 σ_1 除以安全因数。

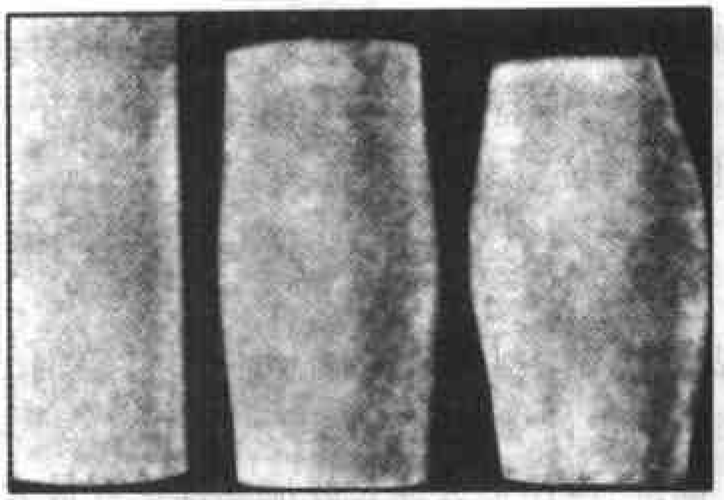


图 7-17

(3) 对于脆性材料，在二轴拉伸应力状态下应采用最大拉应力理论。在复杂应力状态的最大和最小主应力分别为拉应力和压应力的情况下，由于材料的许用拉、压应力不等，宜采用莫尔强度理论。

(4) 对于像低碳钢一类的塑性材料，除三轴拉伸应力状态外，各种复杂应力状态下都会发生屈服现象。一般以采用形状改变能密度理论为宜，但最大切应力理论的物理概念较为直观、计算较为简捷，而且其计算结果偏于安全，因而常采用最大切应力理论。

(5) 在三轴压缩应力状态下，不论是塑性材料还是脆性材料，通常都发生屈服失效，故一般应采用形状改变能密度理论。但因脆性材料不可能由单轴拉伸试验结果得到材料发生屈服的极限应力，所以，许用应力[σ]也不能用脆性材料在单轴拉伸时的许用拉应力值。

上述的一些观点，目前在一般的工程设计规范中都有所反映。例如，对钢梁的强度计算一般均采用第四强度理论，又如对承受内压作用的钢管进行计算时，多采用第三强度理论。应该指出，强度理论的选用并不单纯是个力学问题，而与有关工程技术部门长期积累的经验，以及根据这些经验制订的一整套计算方法和规定的许用应力数值有关。所以在不同的工程技术部门中，对于强度理论的选用，在看法上并不完全一致。

根据强度理论，可从材料在单轴拉伸时的许用拉应力[σ]来推知材料在纯剪切应力状态下的许用切应力。在纯剪切应力状态下，一点处的三个主应力分别为 $\sigma_1=\tau,\sigma_2=0,\sigma_3=-\tau$。对于低碳钢一类的塑性材料，由试验结果可知，在纯剪切和单轴拉伸两种应力状态下，材料均发生屈服破坏，所以，若按形状改变能密度理论来建立强度条件，则从式(7-20)可得

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\tau-0)^2+(0-\tau)^2+(-\tau-\tau)^2]}=\sqrt{3}\tau\leqslant[\sigma]$$

或

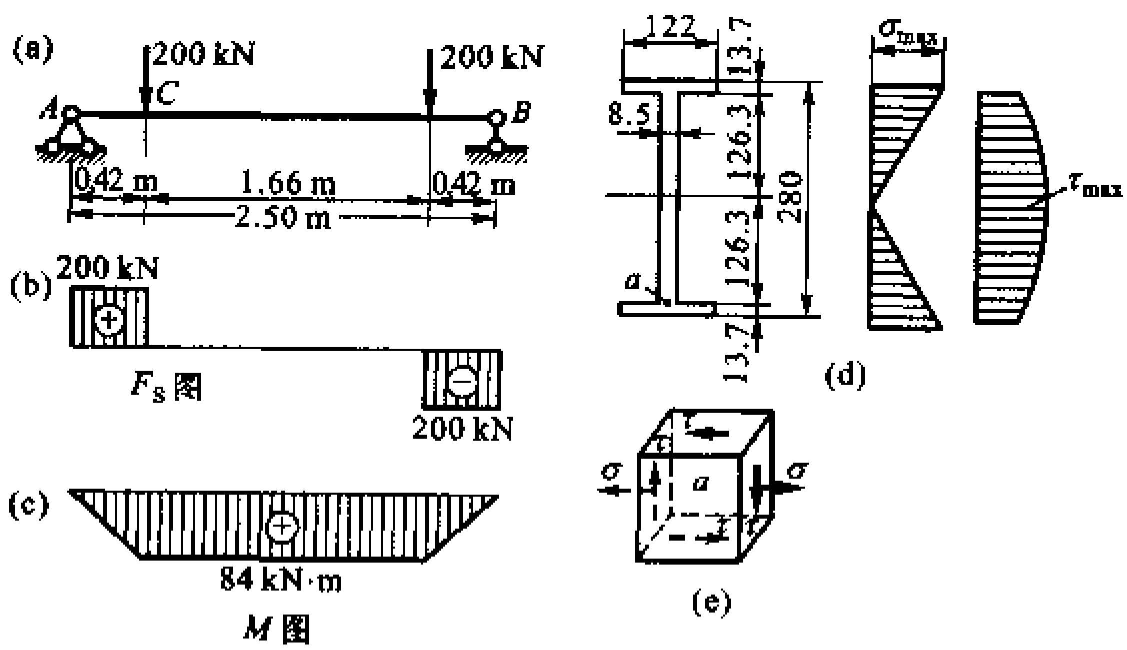
$$\tau \leqslant \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \tag{a}$$

式中，$[\sigma]$为材料在单轴拉伸时的许用拉应力。将式(a)与在纯剪切应力状态下的强度条件 $\tau \leqslant [\tau]$相比较，即得这类材料在纯剪切应力状态下的许用切应力$[\tau]$与在单轴拉伸时的许用拉应力$[\sigma]$间的关系为

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0.577[\sigma] \tag{7-24}$$

目前在钢结构设计规范中，基本上就是按此比例由低碳钢的许用拉应力来规定许用切应力的。而在有的设计规范中，规定$[\tau]=0.5[\sigma]$，显然，这是以最大切应力理论为依据的。同理，应用最大伸长线应变理论或最大拉应力理论，可导出铸铁一类的脆性材料的许用切应力$[\tau]$与许用拉应力$[\sigma]$间的关系为$[\tau]=(0.8\sim1.0)[\sigma]$，建议读者自行验算。

例题 7－7　两端简支的工字钢梁承受荷载如图 a 所示。已知材料 Q235 钢的许用应力为$[\sigma]=170$ MPa 和$[\tau]=100$ MPa。试按强度条件选择工字钢的号码。



例题 7－7 图

解：首先确定钢梁的危险截面，在算得支反力后，作梁的剪力图和弯矩图如图 b，c 所示。由图可见，梁的 C，D 两截面上弯矩和剪力均为最大值，所以这两个截面是危险截面。现取截面 C 计算，其剪力和弯矩分别为

$$F_{SC} = F_{S,max} = 200\ \text{kN}$$

和

$$M_C = M_{max} = 84\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

先按正应力强度条件选择截面。最大正应力发生在截面 C 的上、下边缘各点处，其应力状态为单轴应力状态，由强度条件 $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$求出所需的截面系数

为

$$W=\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{84\times10^3\ \mathrm{N\cdot m}}{170\times10^6\ \mathrm{Pa}}=494\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

如选用 28a 号工字钢，则其截面的 $W=508\ \mathrm{cm}^3$。显然，这一截面满足正应力强度条件的要求。

再按切应力强度条件进行校核。对于 28a 号工字钢的截面，由型钢规格表查得

$$I=7\ 114\ \mathrm{cm}^4=7\ 114\times10^{-8}\ \mathrm{m}^4$$

$$\frac{I}{S}=24.62\ \mathrm{cm}=24.62\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$

及

$$d=8.5\ \mathrm{mm}=0.85\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$

危险截面上的最大切应力发生在中性轴处，且为纯剪切应力状态，其最大切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{F_{\mathrm{S,max}}}{\frac{I}{S}\times d}=\frac{200\times10^3\ \mathrm{N}}{(24.62\times10^{-2}\ \mathrm{m})\times(0.85\times10^{-2}\ \mathrm{m})}$$

$$=95.5\times10^6\ \mathrm{Pa}=95.5\ \mathrm{MPa}<[\tau]$$

由此可见，选用 28a 号工字钢满足切应力的强度条件。

以上考虑了危险截面上的最大正应力和最大切应力。但是，对于工字形截面，在腹板与翼缘交界处，正应力和切应力都相当大，且为平面应力状态。因此，须对这些点进行强度校核。为此，截取腹板与下翼缘交界的 a 点处的单元体(图 e)。根据 28a 号工字钢截面简化后的尺寸(图 d)和上面查得的 I，求得横截面上 a 点处的正应力 σ 和切应力 τ 分别为

$$\sigma=\frac{M_{\max}y}{I}=\frac{(84\times10^3\ \mathrm{N\cdot m})\times(0.126\ 3\ \mathrm{m})}{7\ 114\times10^{-8}\ \mathrm{m}^4}$$

$$=149.1\times10^6\ \mathrm{Pa}=149.1\ \mathrm{MPa}$$

$$\tau=\frac{F_{\mathrm{S,max}}S}{Id}=\frac{(200\times10^3\ \mathrm{N})\times(223\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3)}{(7\ 114\times10^{-8}\ \mathrm{m}^4)\times(8.5\times10^{-3}\ \mathrm{m})}$$

$$=73.8\times10^6\ \mathrm{Pa}=73.8\ \mathrm{MPa}$$

第二式中的 S 是横截面的下翼缘面积对中性轴的静矩，其值为

$$S=(122\ \mathrm{mm}\times13.7\ \mathrm{mm})\times\left(126.3\ \mathrm{mm}-\frac{13.7\ \mathrm{mm}}{2}\right)$$

$$=223\ 000\ \mathrm{mm}^3=223\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

在图 e 所示的应力状态下，该点的三个主应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}\\ \sigma_2 &= 0\\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

由于材料是Q235钢,按形状改变能密度理论(第四强度理论)进行强度校核。以上述主应力代入式(7-20)后,得强度条件为

$$\sqrt{\sigma^2+3\tau^2} \leqslant [\sigma] \quad (2)$$

将上述 a 点处的 σ,τ 值代入上式,得

$$\sigma_{r4}=\sqrt{(149.1\ \text{Pa})^2+3\times(73.8\ \text{Pa})^2}=196.4\times10^6\ \text{Pa}=196.4\ \text{MPa}$$

σ_{r4}较$[\sigma]$大了15.5%,所以应另选较大的工字钢。若选用28b号工字钢,再按上述方法,算得 a 点处的$\sigma_{r4}=173.2$ MPa,较$[\sigma]$大1.88%,故选用28b号工字钢。

若按照最大切应力理论(第三强度理论)对 a 点进行强度校核,则可将上述三个主应力的表达式(1)代入式(7-19),可得强度条件为

$$\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} \leqslant [\sigma] \quad (3)$$

然后将上述 a 点处的 σ,τ 值代入上式进行计算。

应该指出,例题7-7中对于点 a 的强度校核,是根据工字钢截面简化后的尺寸(即看做由三个矩形组成)计算的。实际上,对于符合国家标准的型钢(工字钢、槽钢)来说,并不需要对腹板与翼缘交界处的点进行强度校核。因型钢截面在腹板与翼缘交界处有圆弧,且工字钢翼缘的内边又有1:6的斜度,从而增加了交界处的截面宽度,这就保证了在截面上、下边缘处的正应力和中性轴上的切应力都不超过许用应力的情况下,腹板与翼缘交界处的各点一般不会发生强度不够的问题。但是,对于自行设计的由三块钢板焊接而成的组合工字梁(又称钢板梁),就要按例题中的方法对腹板与翼缘交界处的邻近各点进行强度校核。

例题7-8 一蒸汽锅炉汽包承受最大蒸汽压力 p。汽包圆筒部分的内直径为 D,厚度为 δ,且 $\delta \ll D$(图a)。试按第四强度理论写出汽包壁的相当应力表达式。

解: 由例题7-1已知,圆柱形压力容器在圆筒上任一点处于平面应力状态(图b)。其值分别为

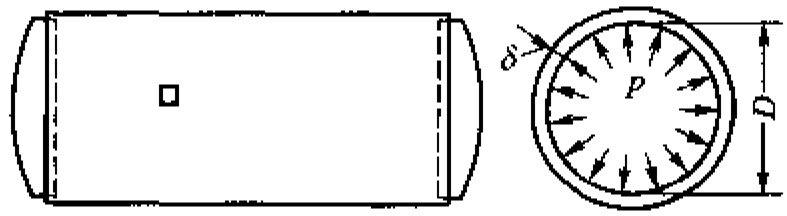
$$\sigma_1=\sigma''=\frac{pD}{2\delta},\qquad \sigma_2=\sigma'=\frac{pD}{4\delta},\qquad \sigma_3=\sigma'''=0$$

将 σ_1,σ_2 及 σ_3 代入表7-1中第四强度理论的相当应力表达式,即得相当应力 σ_{r4} 为

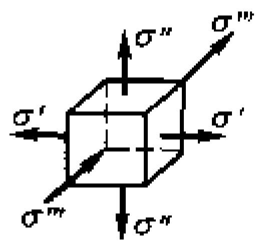
$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{pD}{4\delta}\right)^2+\left(\frac{pD}{4\delta}\right)^2+\left(-\frac{pD}{2\delta}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,pD}{4\delta}$$



(a)

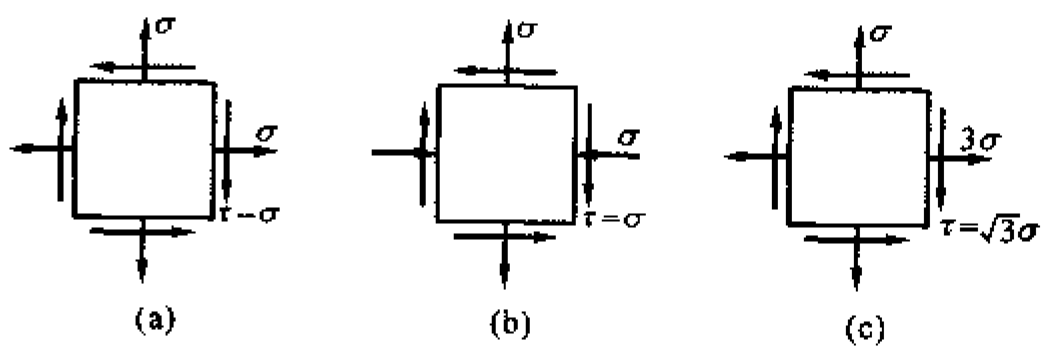


(b)

例题 7－8 图

思　考　题

7－1　三个单元体各面上的应力分量如图所示。试问是否均处于平面应力状态？



思考题 7－1 图

7－2　试问在何种情况下，平面应力状态下的应力圆符合以下特征：(1) 一个点圆；(2) 圆心在原点；(3) 与 τ 轴相切？

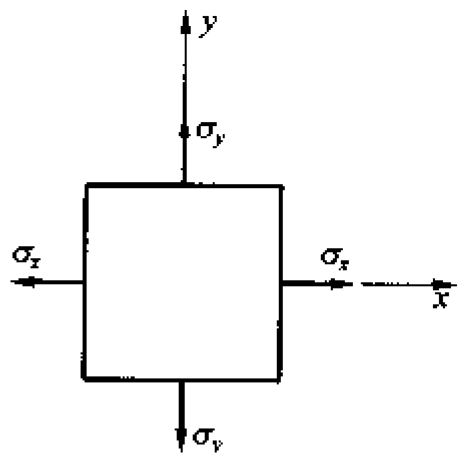
7－3　图示为处于平面应力状态下的单元体，若已知 $\alpha=60°$ 的斜截面上应力 $\sigma_{60°}=10$ MPa，$\tau_{60°}=8.66$ MPa，试用应力圆求该单元体的主应力和最大切应力值。

7－4　受均匀的径向压力 p 作用的圆盘如图所示。试证明盘内任一点均处于二向等值的压缩应力状态。

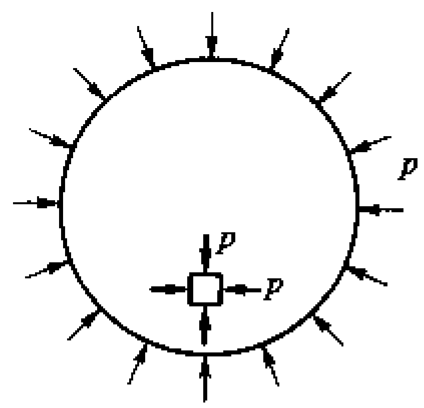
7－5　图 a 所示应力状态下的单元体，材料为各向同性，弹性常数为 $E=200$ GPa，$\nu=0.3$。已知线应变 $\varepsilon_x=14.4\times10^{-5}$，$\varepsilon_y=40.8\times10^{-5}$，试问是否有 $\varepsilon_z=-\nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)=-16.56\times10^{-5}$？为什么？

7－6　从某压力容器表面上一点处取出的单元体如图所示。已知 $\sigma_1=2\sigma_2$，试问是否存

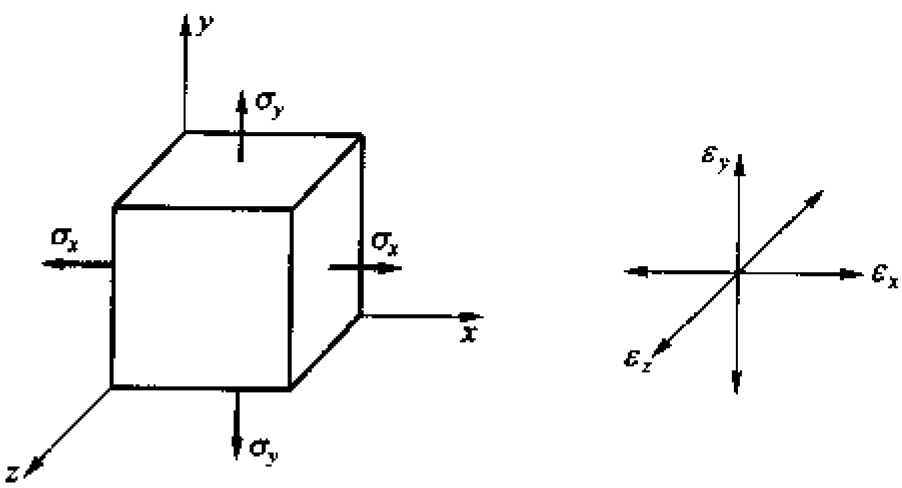
在 $\varepsilon_1=2\varepsilon_2$ 这样的关系？



思考题 7－3 图

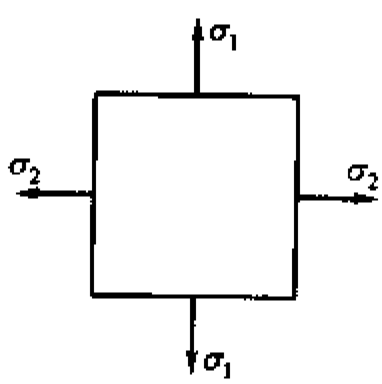


思考题 7－4 图

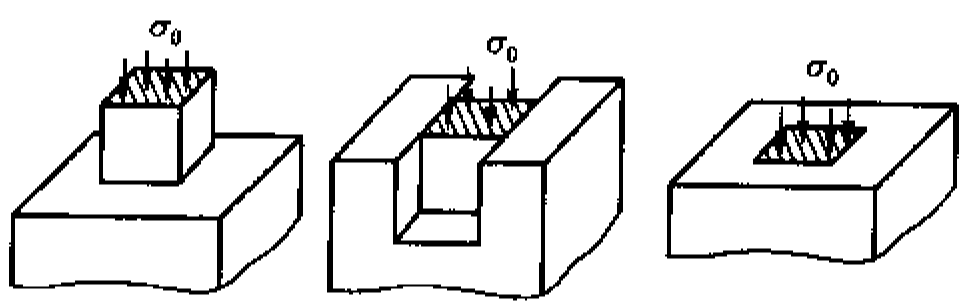


(a) (b)

思考题 7－5 图



思考题 7－6 图



(a) (b) (c)

思考题 7－7 图

7－7 材料及尺寸均相同的三个立方块，其竖向压应力均为 σ_0，如图所示。已知材料的弹性常数分别为 $E=200$ GPa，$\nu=0.3$。若三立方块都在线弹性范围内，试问哪一立方块的体应变最大？

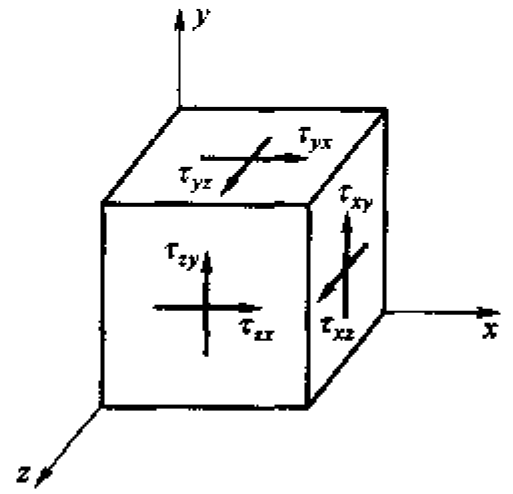
7－8 图示单元体各面上只有切应力，且和三个坐标轴分别平行的各切应力数值均等于 τ。已知 $\tau=20$ MPa，$E=200$ GPa，$\nu=0.3$，试求其应变能密度。

7－9 水管在冬天常有冻裂现象，根据作用与反作用原理，水管壁与管内所结冰之间的

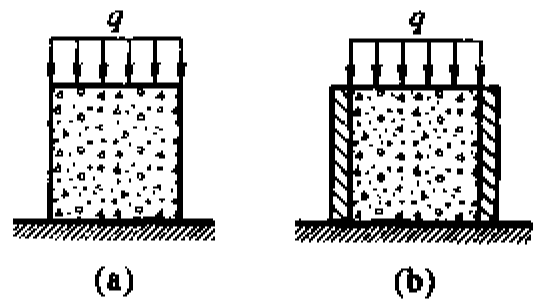
相互作用力应该相等,试问为什么不是冰被压碎而是水管被冻裂?

7-10 将沸水倒入厚玻璃杯里,玻璃杯内、外壁的受力情况如何?若因此而发生破裂,试问破裂是从内壁开始,还是从外壁开始?为什么?

7-11 试分析单轴压缩的混凝土圆柱(图 a)与在钢管内灌注混凝土并凝固后,在其上端施加均匀压力的混凝土圆柱(图 b),哪种情况下的强度大?为什么?

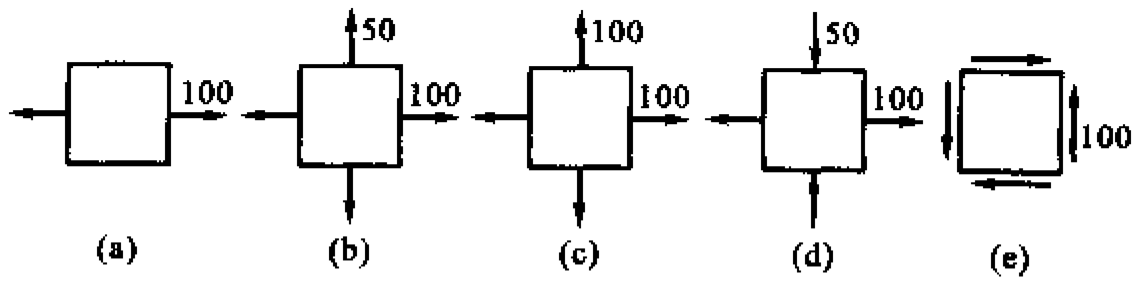


思考题 7-8 图



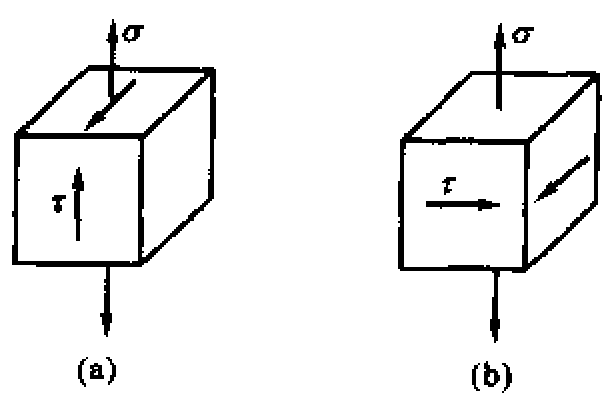
思考题 7-11 图

7-12 材料为 Q235 钢,屈服极限为 $\sigma_s=235$ MPa 的构件内有图示 5 种应力状态(应力单位为 MPa)。试根据第三强度理论分别求出它们的安全因数。



思考题 7-12 图

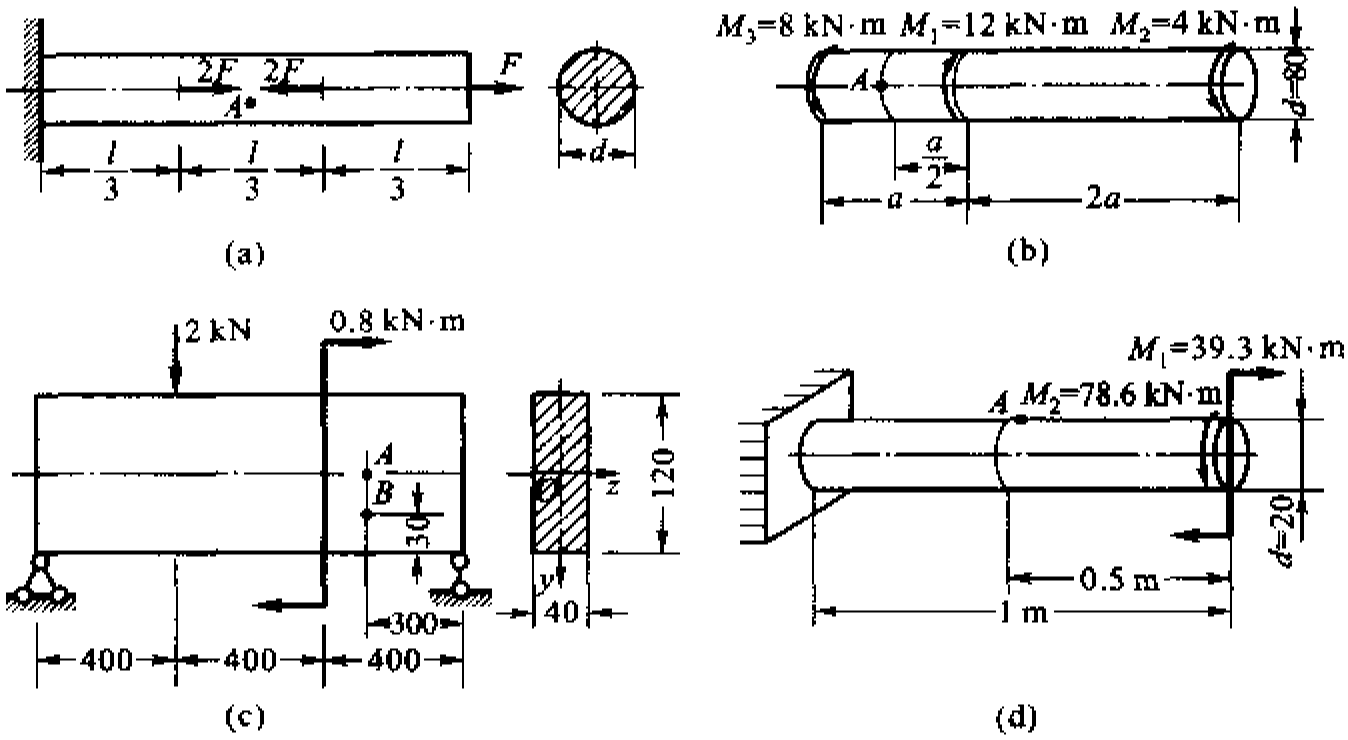
7-13 某塑性材料,其屈服极限为 $\sigma_s=300$ MPa,用其制成的构件中有图 a 和图 b 所示的两种应力状态。试按第四强度理论分析比较两者的危险程度(σ 与 τ 的数值相等)。



思考题 7-13 图

习　题

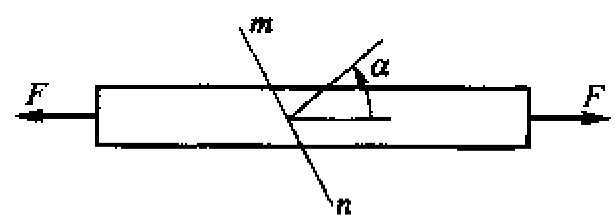
7-1　试从图示各构件中 A 点和 B 点处取出单元体，并表明单元体各面上的应力。



习题 7-1 图

7-2　有一拉伸试样，横截面为 40 mm×5 mm 的矩形。在与轴线成 $\alpha=45°$ 角的面上切应力 $\tau=150$ MPa 时，试样上将出现滑移线。试求试样所受的轴向拉力 F 的数值。

7-3　一拉杆由两段杆沿 $m-n$ 面胶合而成。由于实用的原因，图中的 α 角限于 0～60°范围内。作为"假定计算"，对胶合缝作强度计算时可以把其上的正应力和切应力分别与相应的许用应力比较。现设胶合缝的许用切应力$[\tau]$为许用拉应力$[\sigma]$的 3/4，且这一拉杆的强度由胶合缝的强度控制。为了使杆能承受最大的荷载 F，试问 α 角的值应取多大？



习题 7-3 图

7-4　若上题中拉杆胶合缝的许用应力$[\tau]=0.5[\sigma]$，而$[\tau]=7$ MPa，$[\sigma]=14$ MPa，则 α 值应取多大？若杆的横截面面积为 1 000 mm²，试确定其最大许可荷载 F。

7-5　试根据相应的应力圆上的关系，写出图示单元体任一斜截面 $m-n$ 上正应力及切应力的计算公式。设截面 $m-n$ 的法线与 x 轴成 α 角如图所示（作图时可设 $|\sigma_y|>|\sigma_x|$）。

7-6　某建筑物地基中的一单元体如图所示，$\sigma_y=-0.2$ MPa（压应力），$\sigma_x=-0.05$ MPa（压应力）。试用应力圆求法线与 x 轴成顺时针 60°夹角且垂直于纸面的斜面上的正应力及切应力，并利用习题 7-5 中得到的公式进行核对。

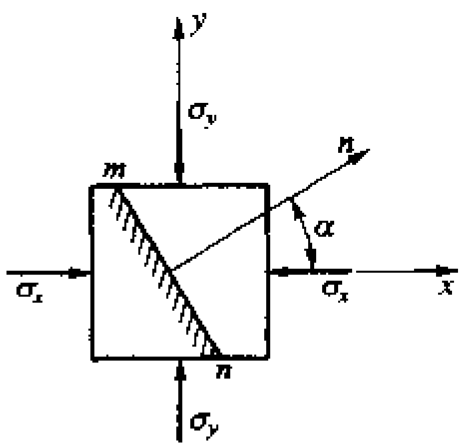
7-7　试用应力圆的几何关系求图示悬臂梁距离自由端为 0.72 m 的截面上，在顶面以下 40 mm 的一点处的最大及最小主应力，并求最大主应力与 x 轴之间的夹角。

7-8　各单元体面上的应力如图所示。试利用应力圆的几何关系求：

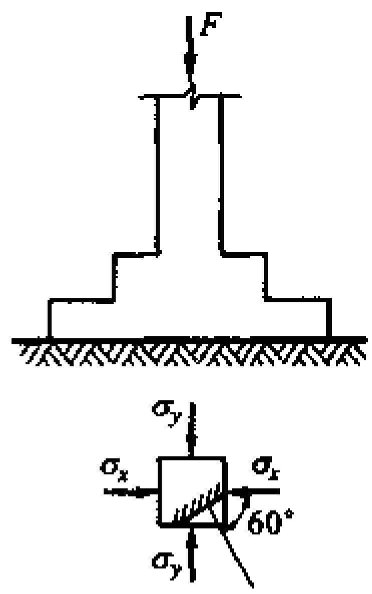
(1) 指定截面上的应力；

(2) 主应力的数值;

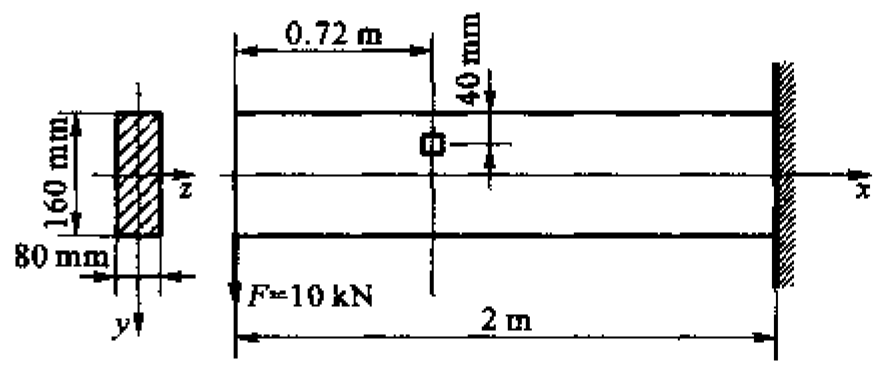
(3) 在单元体上绘出主平面的位置及主应力的方向。



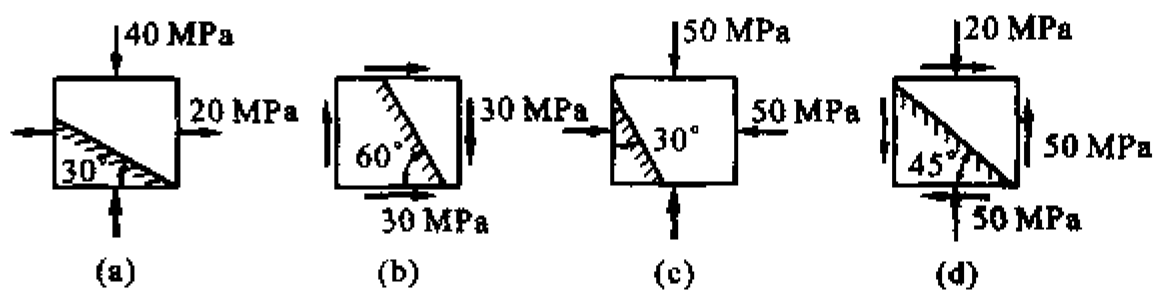
习题 7-5 图



习题 7-6 图



习题 7-7 图



习题 7-8 图

7-9　各单元体如图所示。试利用应力圆的几何关系求:

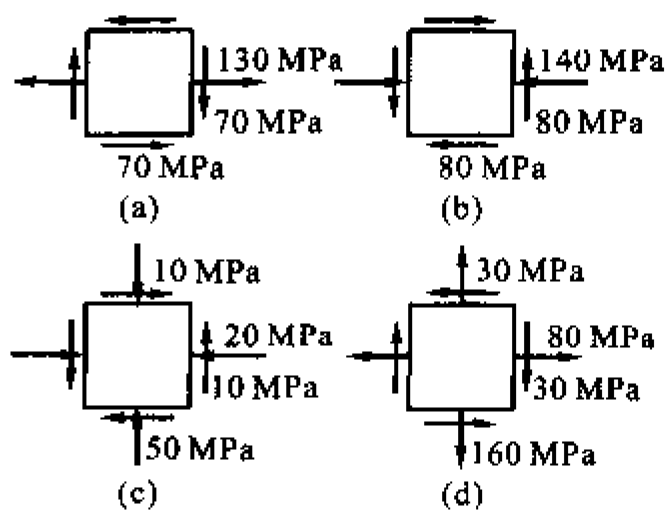
(1) 主应力的数值;

(2) 在单元体上绘出主平面的位置及主应力的方向。

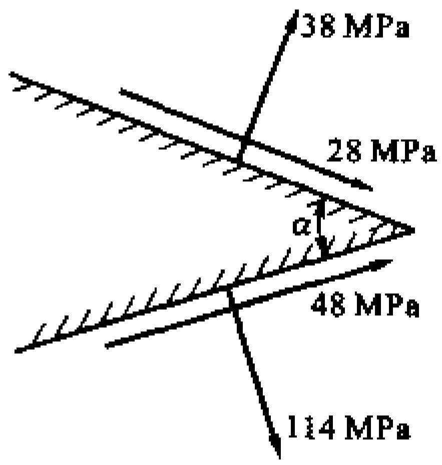
***7-10**　已知平面应力状态下某点处的两个截面上的应力如图所示。试利用应力圆求该点处的主应力值和主平面方位,并求出两截面间的夹角 α 值。

***7-11**　某点处的应力如图所示,设 σ_α, τ_α 及 σ_y 值为已知,试考虑如何根据已知数据直接作出应力圆。

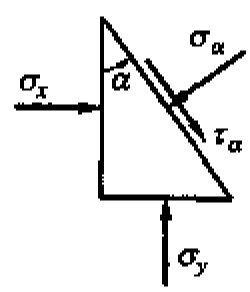
7-12　一焊接钢板梁的尺寸及受力情况如图所示,梁的自重略去不计。试求截面 $m-m$ 上 a,b,c 三点处的主应力。



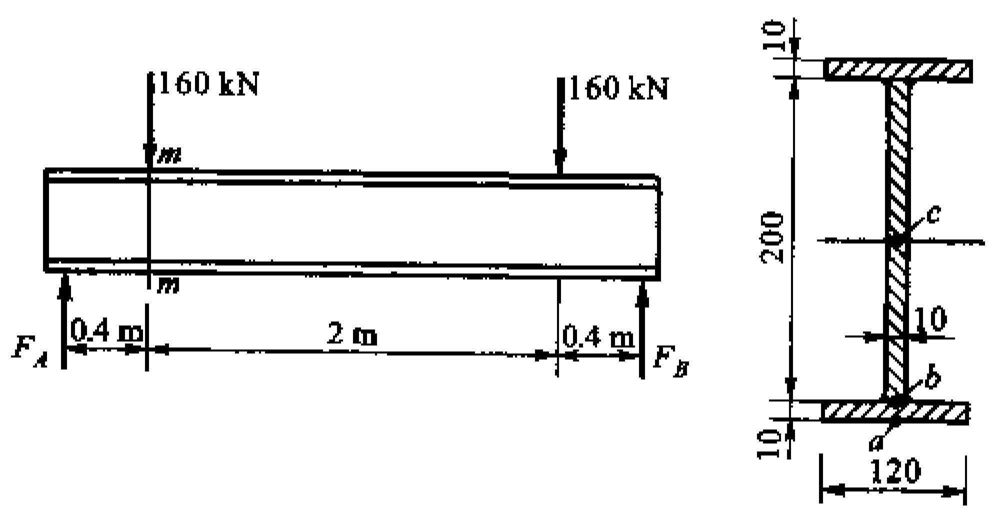
习题 7-9 图



习题 7-10 图



习题 7-11 图



习题 7-12 图

7-13　在一块钢板上先画上直径 $d=300$ mm 的圆，然后在板上加上应力，如图所示。试问所画的圆将变成何种图形？并计算其尺寸。已知钢板的弹性常数 $E=206$ GPa，$\nu=0.28$。

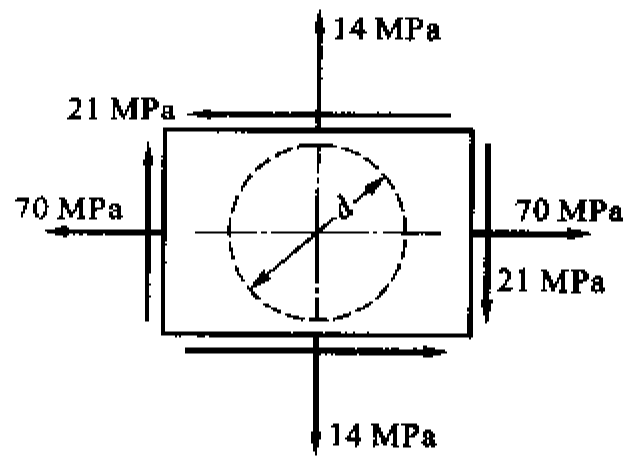
7-14　已知一受力构件表面上某点处的 $\sigma_x=80$ MPa，$\sigma_y=-160$ MPa，$\sigma_z=0$，单元体三个面上都没有切应力。试求该点处的最大正应力和最大切应力。

7-15　单元体各面上的应力如图所示。试用应力圆的几何关系求主应力及最大切应力。

7－16　已知一点处应力状态的应力圆如图所示。试用单元体示出该点处的应力状态，并在该单元体上绘出应力圆上 A 点所代表的截面。

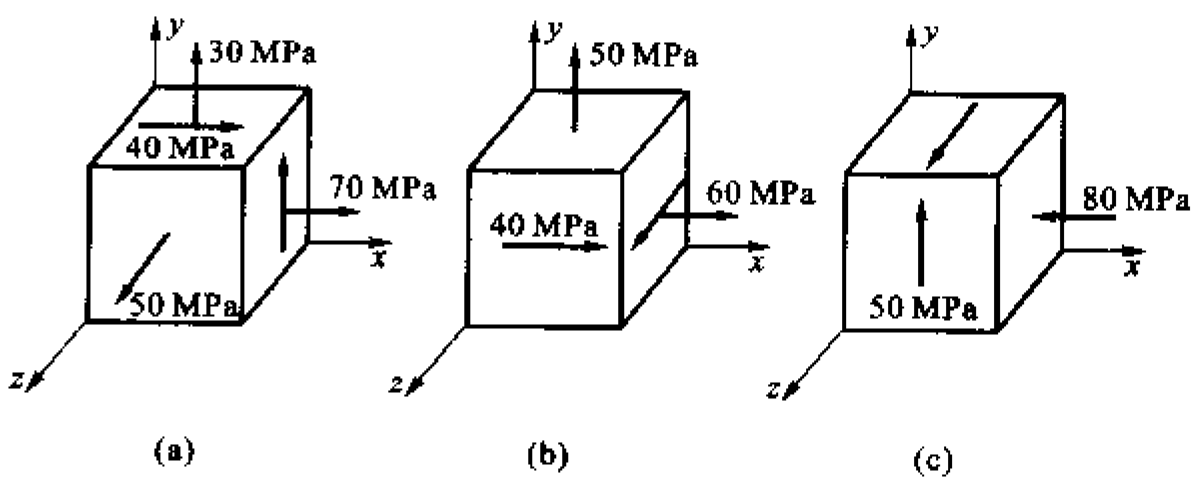
7－17　有一厚度为 6 mm 的钢板在两个垂直方向受拉，拉应力分别为 150 MPa 及 55 MPa。钢材的弹性常数为 $E=210$ GPa，$\nu=0.25$。试求钢板厚度的减小值。

7－18　边长为 20 mm 的钢立方体置于钢模中，在顶面上受力 $F=14$ kN 作用。已知 $\nu=0.3$，假设钢模的变形以及立方体与钢模之间的摩擦力可略去不计。试求立方体各个面上的正应力。

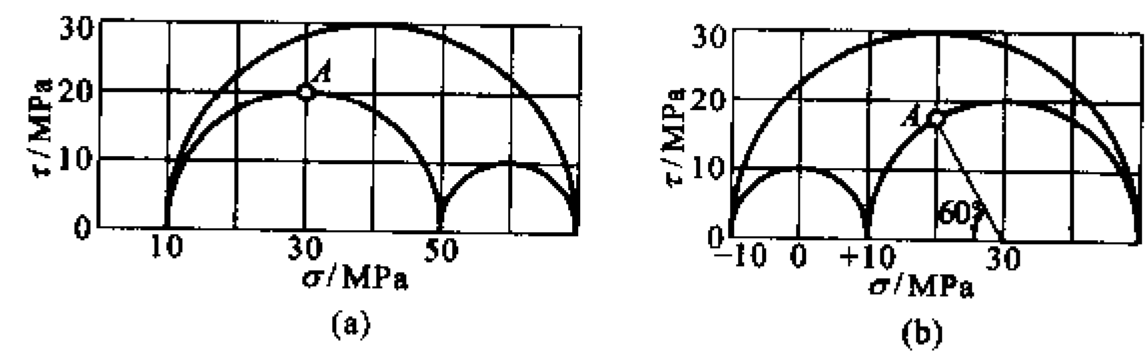


习题 7－13 图

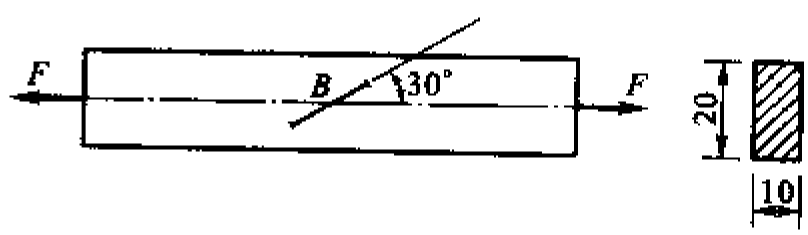
7－19　在矩形截面钢拉伸试样的轴向拉力 $F=20$ kN 时，测得试样中段 B 点处与其轴线成 30°方向的线应变为 $\varepsilon_{30°}=3.25\times10^{-4}$。已知材料的弹性模量 $E=210$ GPa，试求泊松比 ν。



习题 7－15 图



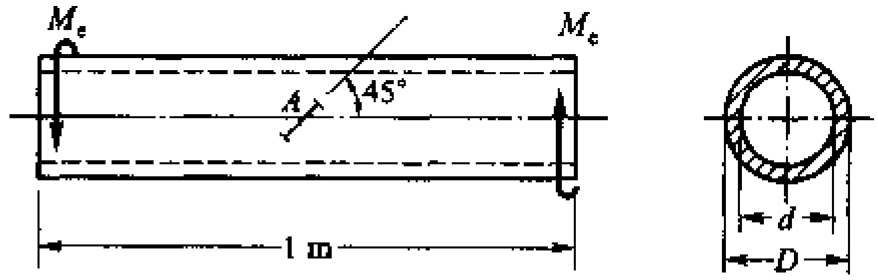
习题 7－16 图



习题 7－19 图

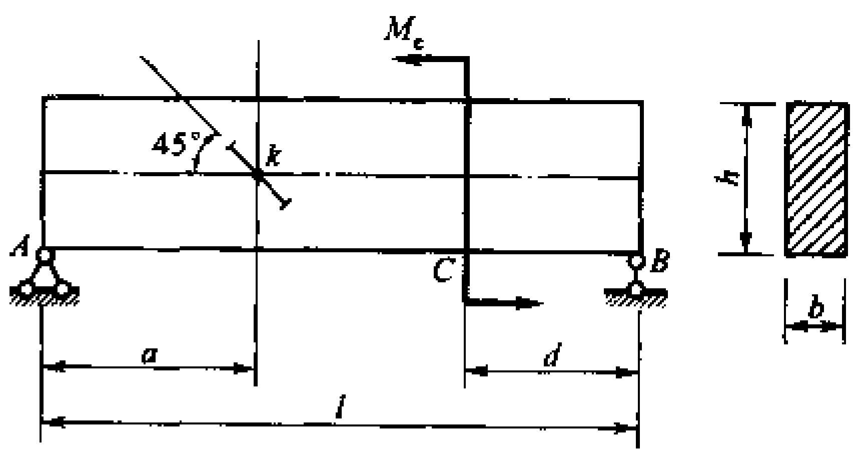
7－20　$D=120$ mm，$d=80$ mm 的空心圆轴，两端承受一对扭转力偶矩 M_e，如图所示。

在轴的中部表面 A 点处，测得与其母线成45°方向的线应变为 $\varepsilon_{45^\circ}=2.6\times10^{-4}$。已知材料的弹性常数 $E=200$ GPa，$\nu=0.3$，试求扭转力偶矩 M_e。



习题 7-20 图

7-21 在受集中力偶矩 M_e 作用的矩形截面简支梁中，测得中性层上 k 点处沿45°方向的线应变为 ε_{45°。已知材料的弹性常数 E,ν 和梁的横截面及长度尺寸 b,h,a,d,l。试求集中力偶矩 M_e。

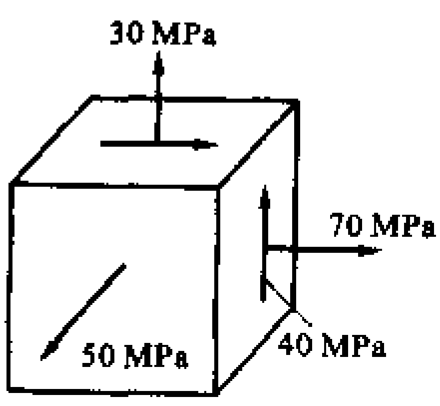


习题 7-21 图

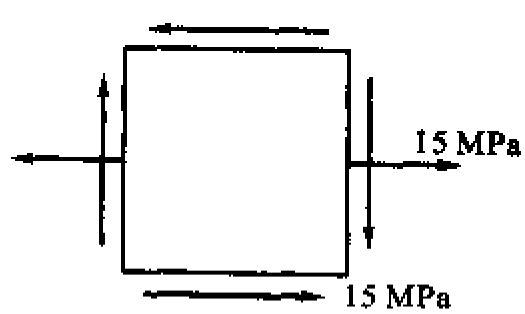
7-22 一直径为25 mm的实心钢球承受静水压力，压强为14 MPa。设钢球的 $E=210$ GPa，$\nu=0.3$。试问其体积减小多少？

7-23 已知图示单元体材料的弹性常数 $E=200$ GPa，$\nu=0.3$。试求该单元体的形状改变能密度。

7-24 从某铸铁构件内的危险点处取出的单元体，各面上的应力分量如图所示。已知铸铁材料的泊松比 $\nu=0.25$，许用拉应力 $[\sigma_t]=30$ MPa，许用压应力 $[\sigma_c]=90$ MPa。试按第一和第二强度理论校核其强度。



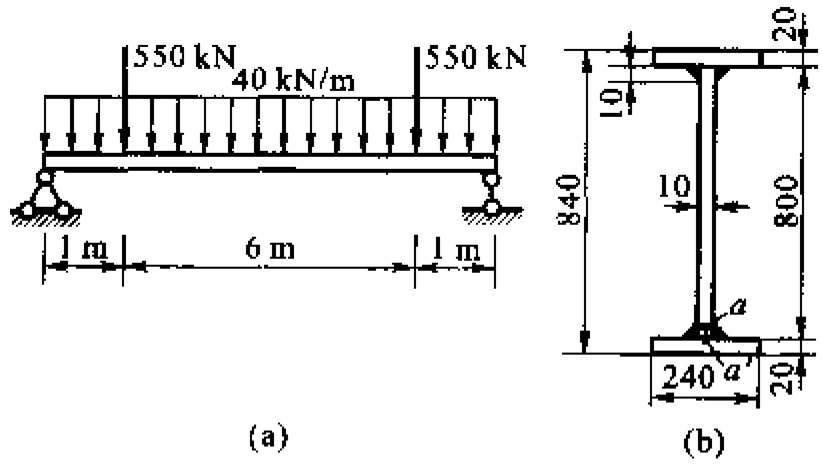
习题 7-23 图



习题 7-24 图

7-25　一简支钢板梁承受荷载如图 a 所示，其截面尺寸见图 b。已知钢材的许用应力为$[\sigma]=170$ MPa，$[\tau]=100$ MPa。试校核梁内的最大正应力和最大切应力，并按第四强度理论校核危险截面上的 a 点的强度。

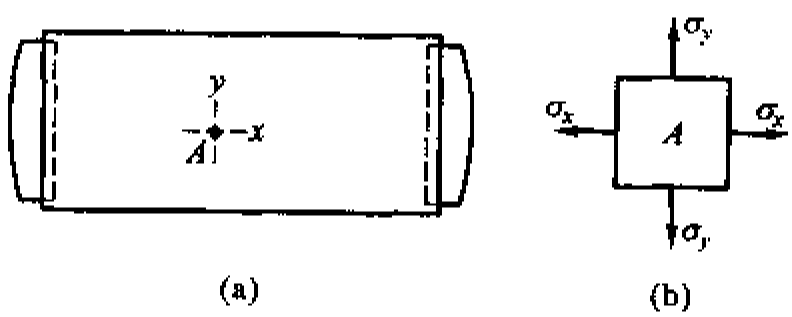
注：通常在计算 a 点处的应力时近似地按 a' 点的位置计算。



习题 7-25 图

7-26　已知钢轨与火车车轮接触点处的正应力 $\sigma_1=-650$ MPa，$\sigma_2=-700$ MPa，$\sigma_3=-900$ MPa（参看图 7-7）。若钢轨的许用应力$[\sigma]=250$ MPa，试按第三强度理论和第四强度理论校核其强度。

7-27　受内压力作用的容器，其圆筒部分任意一点 A（图 a）处的应力状态如图 b 所示。当容器承受最大的内压力时，用应变计测得 $\varepsilon_x=1.88\times10^{-4}$，$\varepsilon_y=7.37\times10^{-4}$。已知钢材的弹性模量 $E=210$ GPa，泊松比 $\nu=0.3$，许用应力$[\sigma]=170$ MPa。试按第三强度理论校核 A 点的强度。



习题 7-27 图

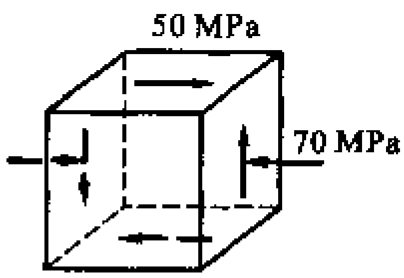
***7-28**　设有单元体如图所示，已知材料的许用拉应力为$[\sigma_t]=60$ MPa，许用压应力为$[\sigma_c]=180$ MPa。试按莫尔强度理论校核其强度。

7-29　图示两端封闭的铸铁薄壁圆筒，其内径 $D=100$ mm，壁厚 $\delta=10$ mm，承受内压力 $p=5$ MPa，且在两端受轴向压力 $F=100$ kN 作用。材料的许用拉伸应力$[\sigma_t]=40$ MPa，泊松比 $\nu=0.25$。试按第二强度理论校核其强度。

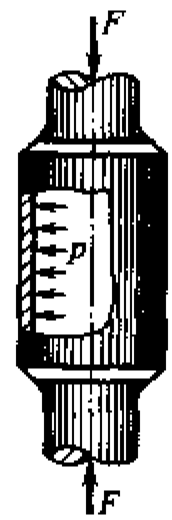
***7-30**　在题 7-29 中试按莫尔强度理论进行强度校核。材料的拉伸及压缩许用应力分别为$[\sigma_t]=40$ MPa 以及$[\sigma_c]=160$ MPa。

7-31　用 Q235 钢制成的实心圆截面杆，受轴向拉力 F 及扭转力偶矩 M_e 共同作用，且

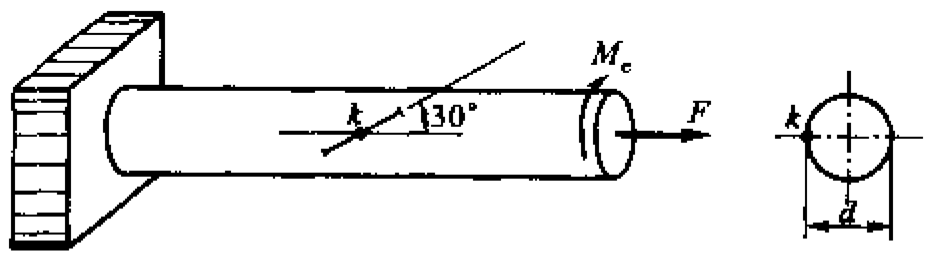
$M_e=\frac{1}{10}Fd$。今测得圆杆表面 k 点处沿图示方向的线应变 $\varepsilon_{30^\circ}=14.33\times10^{-5}$。已知杆直径 $d=10$ mm，材料的弹性常数 $E=200$ GPa，$\nu=0.3$。试求荷载 F 和 M_e。若其许用应力 $[\sigma]=160$ MPa，试按第四强度理论校核杆的强度。



习题 7－28 图



习题 7－29 图



习题 7－31 图

*7－32 内径 $D=60$ mm、壁厚 $\delta=1.5$ mm、两端封闭的薄壁圆筒，用来做内压力和扭转联合作用的试验。要求内压力引起的最大正应力值等于扭转力偶矩所引起的横截面切应力值的 2 倍。当内压力 $p=10$ MPa 时筒壁的材料出现屈服现象，试求筒壁中的最大切应力及形状改变能密度。已知材料的 $E=210$ GPa，$\nu=0.3$。

第八章　组合变形及连接部分的计算

§8-1　概　　述

在工程实际中，构件在荷载作用下往往发生两种或两种以上的基本变形。若其中有一种变形是主要的，其余变形所引起的应力（或变形）很小，则构件可按主要的基本变形进行计算。若几种变形所对应的应力（或变形）属于同一数量级，则构件的变形称为**组合变形**。例如，烟囱（图 8-1a）除自重引起的轴向压缩外，还有水平风力引起的弯曲；机械中的齿轮传动轴（图 8-1b）在外力作用下，将同时发生扭转变形及在水平平面和垂直平面内的弯曲变形；厂房中吊车立柱除受轴向压力 F_1 外，还受到偏心压力 F_2 的作用（图 8-1c），立柱将同时发生轴向压缩和弯曲变形。

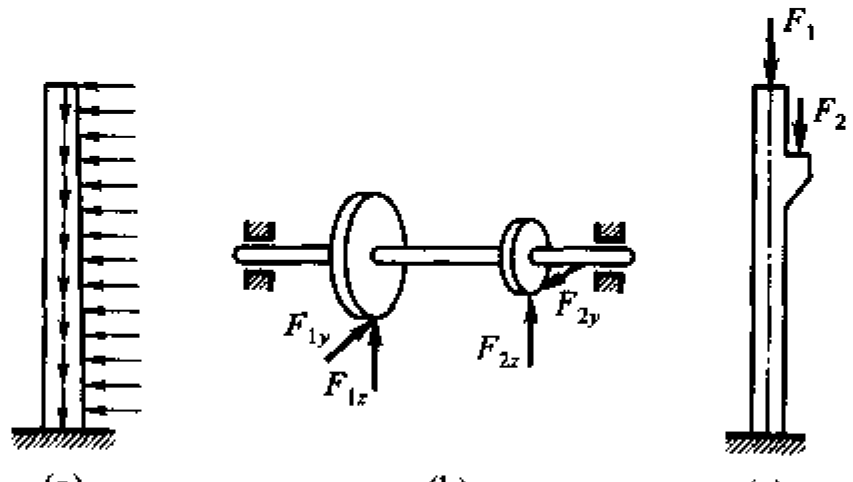


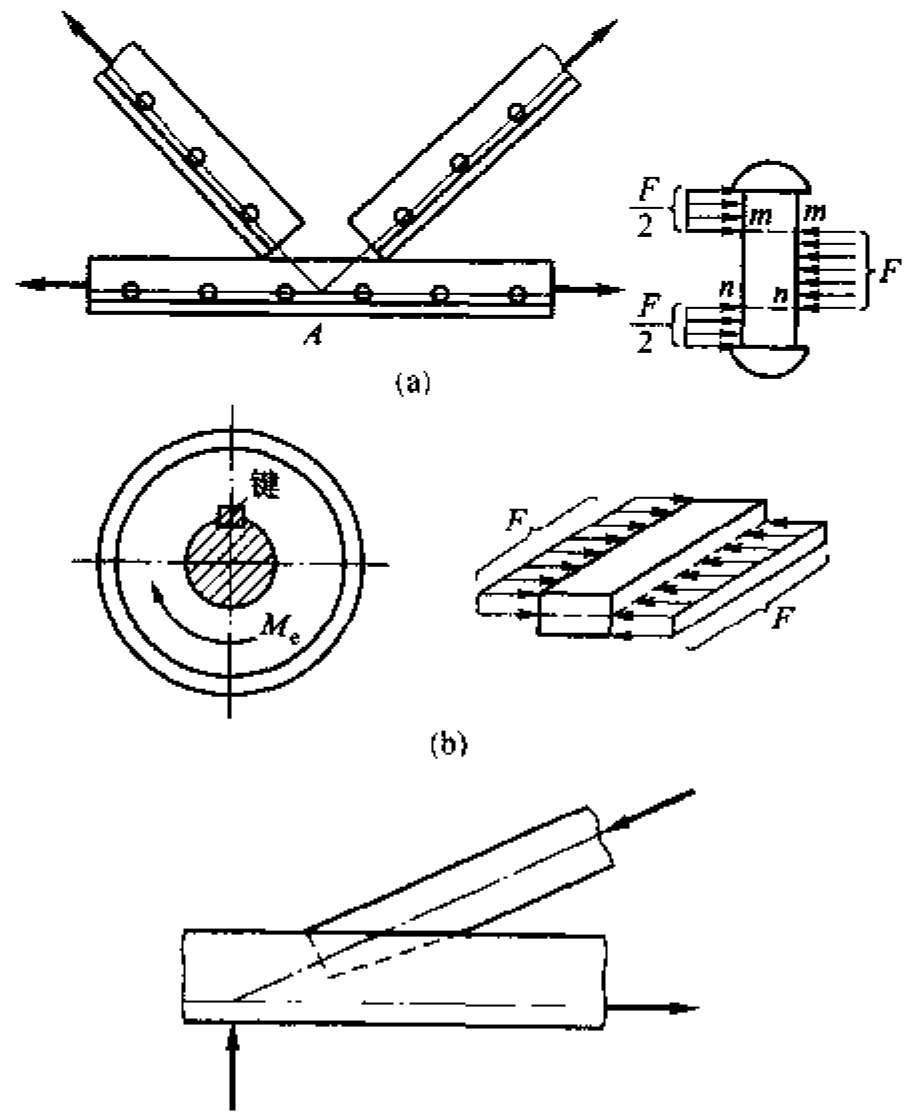
图 8-1

对于组合变形下的构件，在线弹性范围内、小变形条件下，可按构件的原始形状和尺寸进行计算。因而，可先将荷载简化为符合基本变形外力作用条件的外力系，分别计算构件在每一种基本变形下的内力、应力或变形。然后，利用叠加原理，综合考虑各基本变形的组合情况，以确定构件的危险截面、危险点的位置及危险点的应力状态，并据此进行强度计算。

若构件的组合变形超出了线弹性范围，或虽在线弹性范围内但变形较大，则不能按其初始形状或尺寸进行计算，必须考虑各基本变形之间的相互影响，而不能应用叠加原理。对于这类问题，将在《材料力学(II)》的第四章中作简要的

介绍。

另外，在工程实际中，经常需要将构件相互连接。例如桥梁桁架结点处的铆钉（或高强度螺栓）连接（图 8－2a）、机械中的轴与齿轮间的键连接（图 8－2b），以及木结构中的榫齿连接（图 8－2c）等等。铆钉、螺栓、键等起连接作用的部件，统称为**连接件**。由图 8－2a 和 b 中铆钉和键的受力图可以看出，连接件（或构件连接处）的变形往往是比较复杂的，而其本身的尺寸都比较小。在工程设计中，通常按照连接的破坏可能性，采用既能反映受力的基本特征，又能简化计算的假设，计算其名义应力，然后根据直接试验的结果，确定其相应的许用应力，来进行强度计算。这种简化计算的方法，称为**工程实用计算法**。



(c)

图 8－2

本章先讨论在工程中经常遇到的几种组合变形问题，最后讨论连接件的实用计算。

§8－2　两相互垂直平面内的弯曲

对于横截面具有对称轴的梁，当横向外力或外力偶作用在梁的纵向对称面

内时,梁发生对称弯曲。这时,梁变形后的轴线是一条位于外力所在平面内的平面曲线,因而也称为平面弯曲。在工程实际中,有时会碰到双对称截面梁在水平和垂直两纵向对称平面内同时承受横向外力作用的情况,如图 8-3a 所示。这时梁在 F_1 和 F_2 作用下,分别在水平纵对称面(Oxz 平面)和铅垂纵对称面(Oxy 平面)内发生对称弯曲。在梁的任意横截面 $m-m$ 上,由 F_1 和 F_2 引起的弯矩值依次为

$$M_y = F_1 x \quad 和 \quad M_z = F_2(x-a) \tag{a}$$

梁的任一横截面 $m-m$ 上任一点 $C(y,z)$ 处由弯矩 M_y 和 M_z 引起的正应力分别为

$$\sigma' = \frac{M_y}{I_y}z \quad 和 \quad \sigma'' = -\frac{M_z}{I_z}y \tag{b}$$

于是,由叠加原理,在 F_1,F_2 同时作用下,截面 $m-m$ 上 C 点处的正应力为

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y \tag{8-1}$$

式中,I_y 和 I_z 分别为横截面对于两对称轴 y 和 z 的惯性矩;M_y 和 M_z 分别是截面上位于水平和铅垂对称平面内的弯矩,且其力矩矢量分别与 y 轴和 z 轴的正向相一致(图 8-3b)。在具体计算中,也可以先不考虑弯矩 M_y,M_z 和坐标 y,z 的正负号,以其绝对值代入,然后根据梁在 F_1 和 F_2 分别作用下的变形情况,来判断式(8-1)右边两项的正负号。

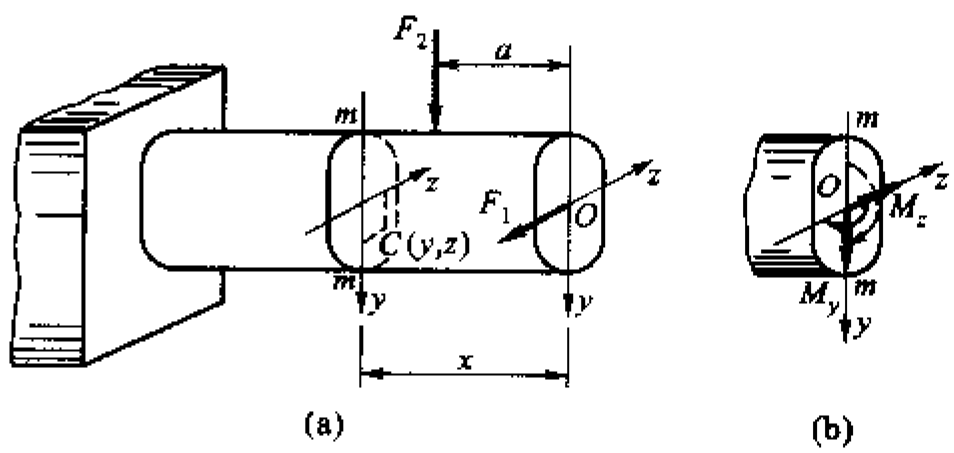


图 8-3

为确定横截面上最大正应力点的位置,先求截面上的中性轴位置。由于中性轴上各点处的正应力均为零,令 y_0,z_0 代表中性轴上任一点的坐标,则由式(8-1)可得中性轴方程为

$$\frac{M_y}{I_y}z_0 - \frac{M_z}{I_z}y_0 = 0 \tag{8-2}$$

由上式可见,中性轴是一条通过横截面形心的直线。其与 y 轴的夹角 θ 为

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = \frac{M_z}{M_y}\cdot\frac{I_y}{I_z} = \frac{I_y}{I_z}\tan\varphi \qquad (8-3)$$

式中，角度 φ 是横截面上合成弯矩 $M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$ 的矢量与 y 轴间的夹角。一般情况下，由于截面的 $I_y \neq I_z$，因而中性轴与合成弯矩 M 所在的平面并不相互垂直。而截面的挠度垂直于中性轴，所以挠曲线将不在合成弯矩所在的平面内。这种弯曲也称为**斜弯曲**。对于圆形、正方形等 $I_y = I_z$ 的截面，有 $\varphi=\theta$，因而，正应力也可用合成弯矩 M 按式(4-5)进行计算。但是，梁各横截面上的合成弯矩 M 所在平面的方位一般并不相同，所以，虽然每一截面的挠度都发生在该截面的合成弯矩所在平面内，梁的挠曲线一般仍是一条空间曲线。于是，梁的挠曲线方程仍应分别按两垂直平面内的弯曲来计算，不能直接用合成弯矩进行计算。

在确定中性轴的位置后，作平行于中性轴的两直线，分别与横截面周边相切于 D_1，D_2 两点（图 8-4a），该两点即分别为横截面上拉应力和压应力为最大的点。将两点的坐标（y，z）代入式(8-1)，就可得到横截面上的最大拉、压应力。对于工程中常用的矩形、工字形等截面梁，其横截面都有两个相互垂直的对称轴，且截面的周边具有棱角（图 8-4b），故横截面上的最大正应力必发生在截面的棱角处。于是，可根据梁的变形情况，直接确定截面上最大拉、压应力点的位置，而无需定出其中性轴。

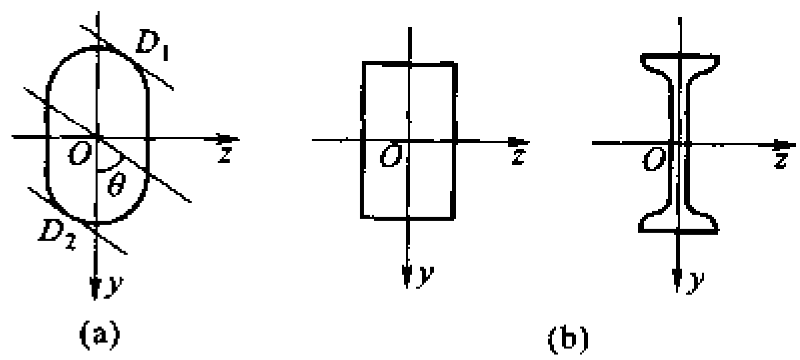
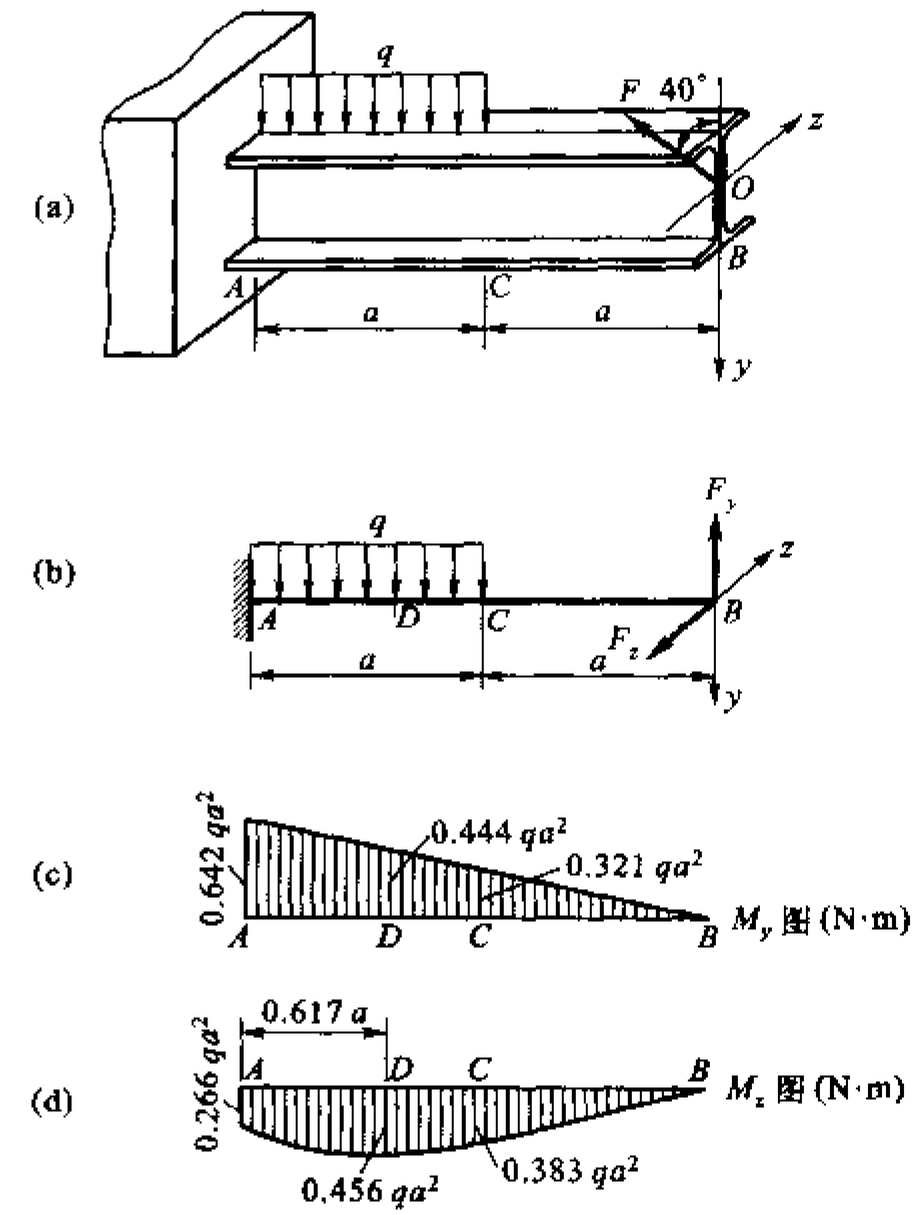


图 8-4

在确定了梁的危险截面和危险点的位置，并算出危险点处的最大正应力后，由于危险点处是单轴应力状态，于是，可将最大正应力与材料的许用正应力相比较来建立强度条件，进行强度计算。至于横截面上的切应力，对于一般实体截面梁，因其数值较小，故在强度计算中可不必考虑。

例题 8-1 20a 号工字钢悬臂梁承受均布荷载 q 和集中力 $F=\frac{qa}{2}$，如图 a 所示。已知钢的许用弯曲正应力$[\sigma]=160$ MPa，$a=1$ m。试求梁的许可荷载集度$[q]$。

解：将自由端截面 B 上的集中力沿两主轴分解为



例题 8-1 图

$$F_y = F\cos 40^\circ = \frac{qa}{2}\cos 40^\circ = 0.383qa$$

$$F_z = F\sin 40^\circ = \frac{qa}{2}\sin 40^\circ = 0.321qa$$

并作梁的计算简图(图 b)，分别绘出两个主轴平面内的弯矩图如图 c,d 所示。由型钢表查得 20a 号工字钢的弯曲截面系数 W_z 和 W_y 分别为

$$W_z = 237\times 10^{-6}\ \text{m}^3,\qquad W_y = 31.5\times 10^{-6}\text{m}^3$$

根据工字钢截面 $W_z \neq W_y$ 的特点并结合内力图，可按叠加原理分别算出截面 A 及截面 D 上的最大拉伸应力，即

$$(\sigma_{\max})_A = \frac{M_{yA}}{W_y} + \frac{M_{zA}}{W_z} = \frac{0.642q\times(1\ \text{m})^2}{31.5\times 10^{-6}\ \text{m}^3} + \frac{0.266q\times(1\ \text{m})^2}{237\times 10^{-6}\ \text{m}^3}$$

$$= (21.5\times 10^3\ \text{m}^{-1})q$$

$$(\sigma_{\max})_D = \frac{M_{yD}}{W_y} + \frac{M_{zD}}{W_z} = \frac{0.444q\times(1\ \text{m})^2}{31.5\times 10^{-6}\ \text{m}^3} + \frac{0.456q\times(1\ \text{m})^2}{237\times 10^{-6}\ \text{m}^3}$$

$$= (16.02 \times 10^3 \text{ m}^{-1})q$$

由此可见，梁的危险点在固定端截面 A 的棱角处。由于危险点处是单轴应力状态，故其强度条件为

$$\sigma_{\max} = (\sigma_{\max})_A = (21.5 \times 10^3 \text{ m}^{-1})q \leqslant [\sigma] = 160 \times 10^6 \text{ Pa}$$

从而解得

$$[q] = \frac{160 \times 10^6 \text{ Pa}}{21.5 \times 10^3 \text{ m}^{-1}} = 7.44 \times 10^3 \text{ N/m} = 7.44 \text{ kN/m}$$

§8-3 拉伸(压缩)与弯曲

Ⅰ. 横向力与轴向力共同作用

等直杆受横向力和轴向力共同作用时，杆将发生弯曲与拉伸(压缩)组合变形。图 8-1a 所示的烟囱受风力作用就是压缩与弯曲的组合变形。对于弯曲刚度 EI 较大的杆，由于横向力引起的挠度与横截面的尺寸相比很小，因此，由轴向力引起的弯矩可以略去不计。于是，可分别计算由横向力和轴向力引起的杆横截面上的正应力，按叠加原理求其代数和，即得在拉伸(压缩)和弯曲组合变形下，杆横截面上的正应力。

图 8-5a 表示由两根槽钢组成的杆件的计算简图，在其纵对称面内有横向力 F 和轴向拉力 F_t 共同作用，以此说明杆在拉伸与弯曲组合变形时的强度计算。

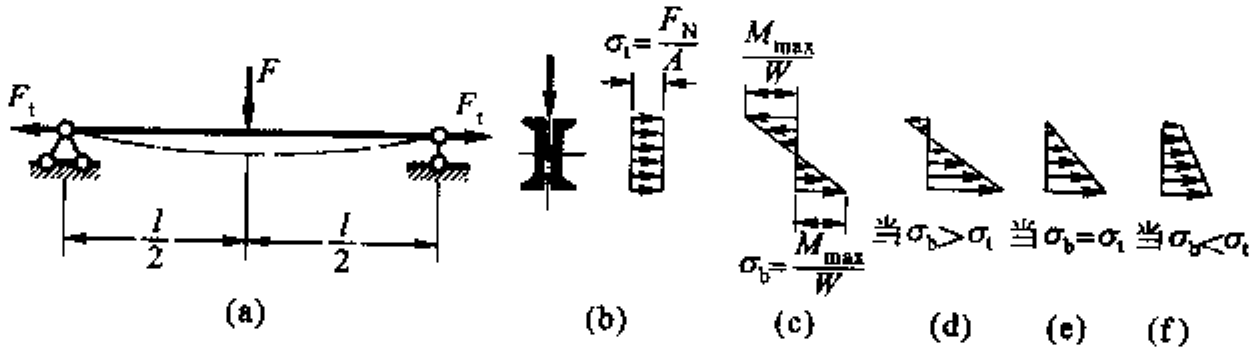


图 8-5

在轴向拉力 F_t 作用下，杆各个横截面上有相同的轴力 $F_N = F_t$。而在横向力作用下，杆跨中截面上的弯矩为最大，$M_{\max} = \frac{1}{4}Fl$。因而，跨中截面是杆的危险截面。

与轴力 F_N 对应的拉伸正应力 σ_t 在该截面上各点处均相等，其值为

$$\sigma_t = \frac{F_N}{A} = \frac{F_t}{A}$$

而与 M_{max} 对应的最大弯曲正应力 σ_b，出现在该截面的上、下边缘处，其绝对值为

$$\sigma_b = \frac{M_{max}}{W} = \frac{Fl}{4W}$$

在危险截面上与 F_N，M_{max} 对应的正应力沿截面高度变化的情况分别如图 8-5b,c 所示。将弯曲正应力与拉伸正应力叠加后，正应力沿截面高度的变化情况将如图 8-5d 或 e,f 所示，取决于 σ_b 和 σ_t 值的相对大小。显然，杆件的最大正应力是危险截面下边缘各点处的拉应力，其值为

$$\sigma_{t,max} = \frac{F_t}{A} + \frac{Fl}{4W}$$

由于危险点处的应力状态为单轴应力状态，故可将最大拉应力与材料的许用应力相比较，以进行强度计算。

应该注意，当材料的许用拉应力和许用压应力不相等时，杆内的最大拉应力和最大压应力必须分别满足杆件的拉、压强度条件。

前已指出，按叠加原理计算拉伸(压缩)与弯曲组合变形杆横截面上的正应力时，略去了轴向拉(压)力由于弯曲挠度(图 8-5a)而引起的附加弯矩。对于弯曲刚度 EI 较小的杆件，在压缩与弯曲组合变形下，轴向压力引起的附加弯矩较大，且其转向与横向力引起的弯矩同向，因此不能按杆的原始形状来计算，叠加原理也不再适用。关于这类问题的计算，将在《材料力学(II)》的§4-3 中讨论。

例题 8-2 一折杆由两根无缝钢管焊接而成(图 a)，已知两钢管的外径均为 140 mm，壁厚均为 10 mm。试求折杆危险截面上的最大拉应力和最大压应力。

解：先求支反力(图 a)。由平衡方程可得

$$F'_A = 0, \qquad F_A = F_B = 5\ \text{kN}$$

作折杆的受力图如图 b。由于折杆及其受力是左右对称的，故只需分析其一半即杆 AC。将 F_A 分解为沿杆轴线的和垂直于杆轴线的两个分力 F_{Ax} 和 F_{Ay}。由图 a 所示的尺寸可见，$\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$，解得

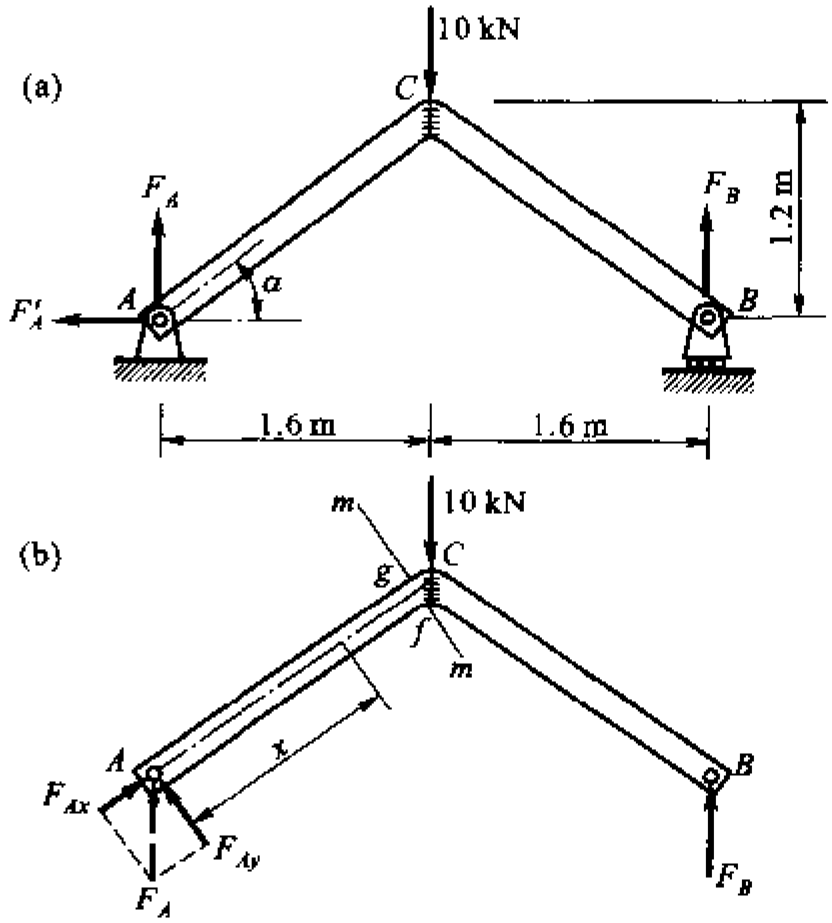
$$F_{Ax} = 3\ \text{kN}, \qquad F_{Ay} = 4\ \text{kN}$$

轴向力 F_{Ax} 在杆 AC 的任一横截面上引起轴力 $F_N = -F_{Ax}$。横向力 F_{Ay} 在杆 AC 的任一横截面上引起弯矩 $M(x) = F_{Ay}x$ 和剪力 $F_S = F_{Ay}$。危险截面为 C 处的截面 $m-m$(图 b)。

由图 a 所示尺寸可知，截面 $m-m$ 上的轴力和弯矩分别为

$$F_N = -F_{Ax} = -3\ \text{kN}$$

$$M = F_{Ay} \times 2\ \text{m} = 8\ \text{kN·m}$$



例题 8－2 图

杆 AC 危险截面 $m-m$ 上的最大拉应力 $\sigma_{t,max}$ 和最大压应力 $\sigma_{c,max}$ 分别在杆下边缘的 f 点和上边缘的 g 点(图 b)处，其值分别为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{t,max}\\ \sigma_{c,max}\end{matrix}\right\}=\frac{F_N}{A}\pm\frac{M}{W} \tag{1}$$

根据已知的截面尺寸，算得

$$A=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)=\frac{\pi}{4}[(0.14\text{ m})^2-(0.12\text{ m})^2]=40.8\times10^{-4}\text{ m}^2$$

$$I=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=\frac{\pi}{64}[(0.14\text{ m})^4-(0.12\text{ m})^4]=868\times10^{-8}\text{ m}^4$$

$$W=\frac{I}{D/2}=\frac{868\times10^{-8}\text{ m}^4}{\frac{1}{2}(14\times10^{-2}\text{ m})}=124\times10^{-6}\text{ m}^3$$

将各值代入式(1)，得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{t,max}\\ \sigma_{c,max}\end{matrix}\right\}=\frac{-3\times10^3\text{ N}}{40.8\times10^{-4}\text{ m}^2}\pm\frac{8\times10^3\text{ N}\cdot\text{m}}{124\times10^{-6}\text{ m}^3}=\left\{\begin{matrix}+63.8\times10^6\\ -65.2\times10^6\text{ Pa}\end{matrix}\right.=\left\{\begin{matrix}+63.8\\ -65.2\end{matrix}\right.\text{MPa}$$

II. 偏心拉伸(压缩)

作用在直杆上的外力，当其作用线与杆的轴线平行但不重合时，将引起**偏心拉伸或偏心压缩**。钻床的立柱(图 8－6a)和厂房中支承吊车梁的柱子(图 8－

6b)即为偏心拉伸和偏心压缩。

今以横截面具有两对称轴的等直杆承受距离截面形心为 e(称为偏心距)的偏心拉力 F(图 8-7a)为例,来说明偏心拉伸杆件的强度计算。先将作用在杆端的偏心拉力 F 用符合基本变形外力作用条件的静力等效力系来代替。为此,把作用在杆端截面上 A 点处的拉力 F 向截面形心 O_1 点简化,得到轴向拉力 F 和力偶矩 Fe(其矢量如图 8-7b 所示)。然后,将力偶矩 Fe 分解为 M_{ey} 和 M_{ez}:

$$M_{ey} = Fe\sin\alpha = Fz_F$$

$$M_{ez} = Fe\cos\alpha = Fy_F$$

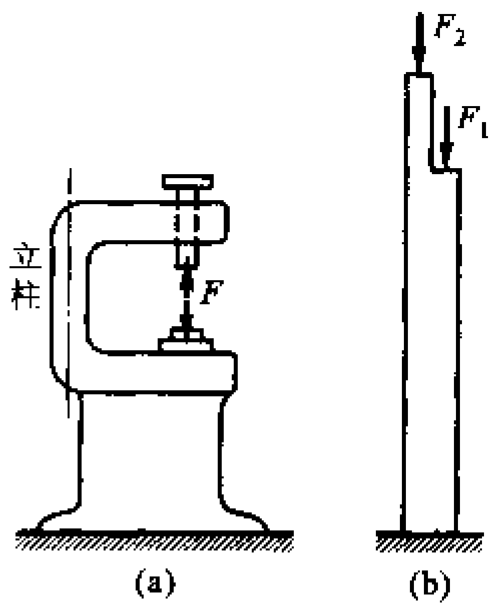


图 8-6

式中,坐标轴 y,z 为截面的两个对称轴(亦即形心主惯性轴);y_F,z_F 为偏心拉力 F 作用点(A 点)的坐标。于是,得到一个包含轴向拉力和两个在纵对称面内的力偶(图 8-7c)的静力等效力系。将分别使杆发生轴向拉伸和在两个纵对称面内的纯弯曲。当杆的弯曲刚度较大时,同样可按叠加原理求解。

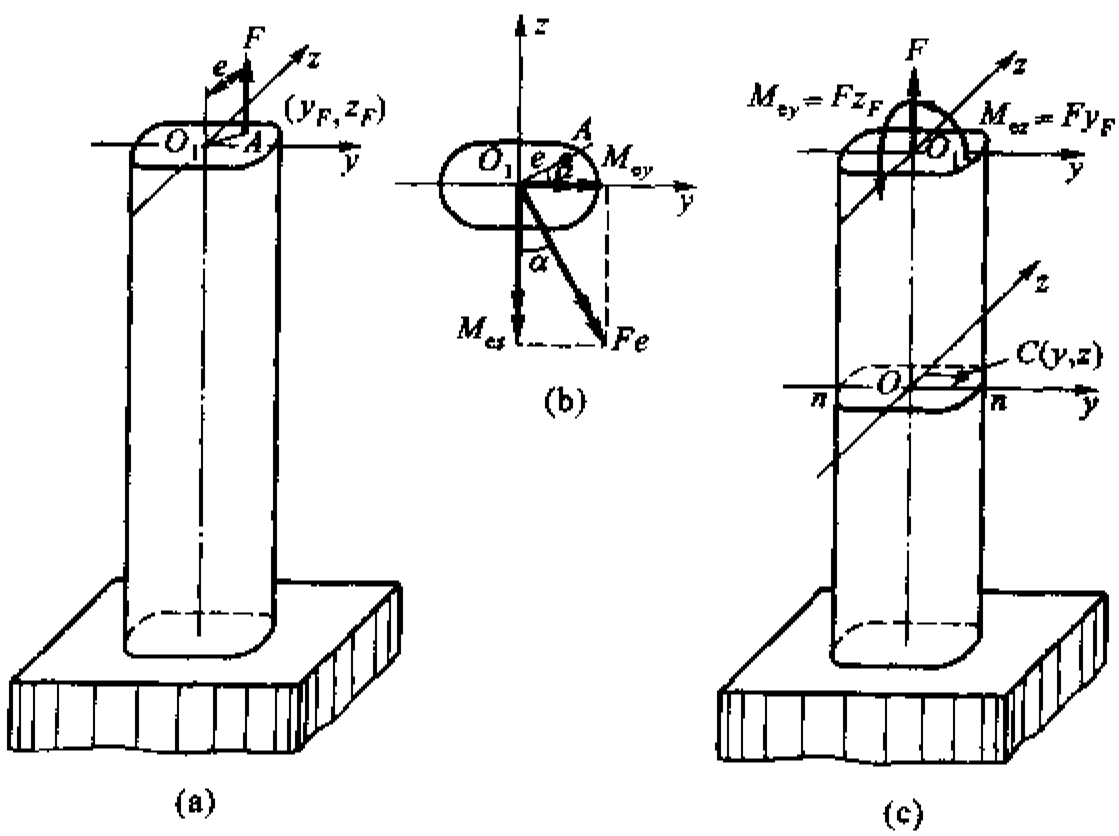


图 8-7

在上述力系作用下任一横截面 $n-n$(图 8-7c)上的任一点 $C(y,z)$处,对应于轴力 $F_N = F$ 和两个弯矩 $M_y = M_{ey} = Fz_F$,$M_z = M_{ez} = Fy_F$ 的正应力分别为

$$\sigma' = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A}$$

和

$$\sigma'' = \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \frac{F z_F \cdot z}{I_y}, \quad \sigma''' = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{F y_F \cdot y}{I_z}$$

由于 A 点和 C 点均在第一象限内，根据杆件的变形可知，σ'，σ''和σ'''均为拉应力。于是，由叠加原理，即得 C 点处的正应力为

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F z_F \cdot z}{I_y} + \frac{F y_F \cdot y}{I_z} \tag{a}$$

式中，A 为横截面面积；I_y 和 I_z 分别为横截面对 y 轴和 z 轴的惯性矩。利用惯性矩与惯性半径间的关系(参见附录 I)：

$$I_y = A \cdot i_y^2, \qquad I_z = A \cdot i_z^2$$

式(a)可改写为

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2}\right) \tag{b}$$

上式是一个平面方程，这表明正应力在横截面上按线性规律变化，而应力平面与横截面相交的直线(沿该直线 $\sigma = 0$)就是中性轴(图 8－8a)。令 y_0，z_0 代表中性轴上任一点的坐标，代入式(b)，即得中性轴方程为

$$1 + \frac{z_F}{i_y^2} z_0 + \frac{y_F}{i_z^2} y_0 = 0 \tag{8-4}$$

可见，在偏心拉伸(压缩)情况下，中性轴是一条不通过截面形心的直线。为定出中性轴的位置，可利用其在 y，z 两轴上的截距 a_y 和 a_z(图 8－8b)。在上式中，令 $z_0 = 0$，相应的 y_0 即为 a_y，而令 $y_0 = 0$，相应的 z_0 则为 a_z。由此求得

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, \qquad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} \tag{8-5}$$

因为 A 点在第一象限内，y_F，z_F 都是正值，由此可见，a_y，a_z 均为负值。即中性

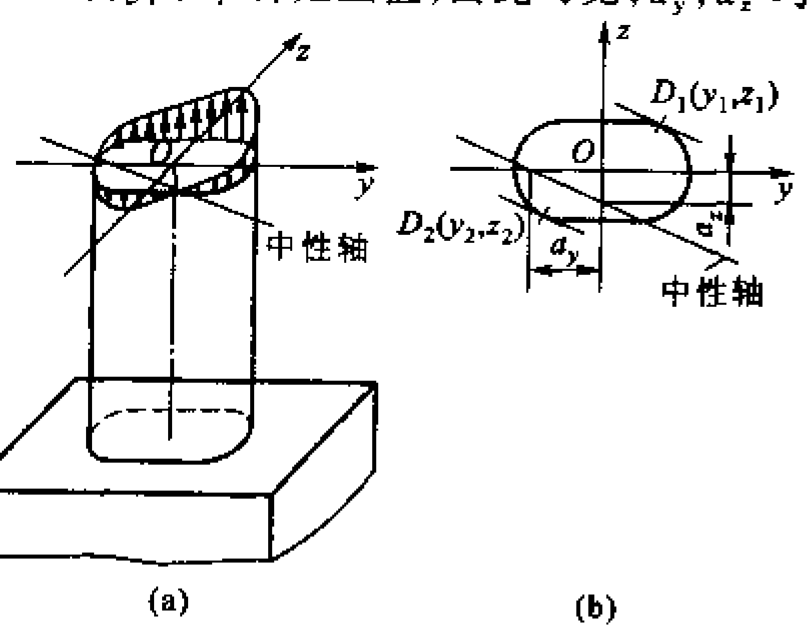


图 8－8

轴与外力作用点分别处于截面形心的相对两侧(图 8－7a,图 8－8)。

对于周边无棱角的截面,可作两条与中性轴平行的直线与横截面的周边相切,两切点 D_1 和 D_2 即为横截面上最大拉应力和最大压应力所在的危险点(图 8－8b)。将危险点 D_1 和 D_2 的坐标分别代入式(a),即可求得最大拉应力和最大压应力的值。

对于周边具有棱角的截面,其危险点必定在截面的棱角处,并可根据杆件的变形来确定。例如,矩形截面杆受偏心拉力 F 作用时,若杆任一横截面上的内力分量为 $F_N=F$,$M_y=Fz_F$ 和 $M_z=Fy_F$,则与各内力分量相对应的正应力变化规律分别如图 8－9a,b,c 所示。由叠加原理,即得杆在偏心拉伸时横截面上正应力的变化规律(图 8－9d)。可见,最大拉应力 $\sigma_{t,max}$ 和最大压应力 $\sigma_{c,max}$ 分别在截面的棱角 D_1 和 D_2 处,其值为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{t,max}\\ \sigma_{c,max}\end{matrix}\right\}=\frac{F}{A}\pm\frac{Fz_F}{W_y}\pm\frac{Fy_F}{W_z} \tag{8－6}$$

显然,式(8－6)对于箱形、工字形等具有棱角的截面都是适用的。由式(8－6)还可看出,当外力的偏心距(即 y_F,z_F 值)较小时,横截面上就可能不出现压应力,即中性轴不与横截面相交。

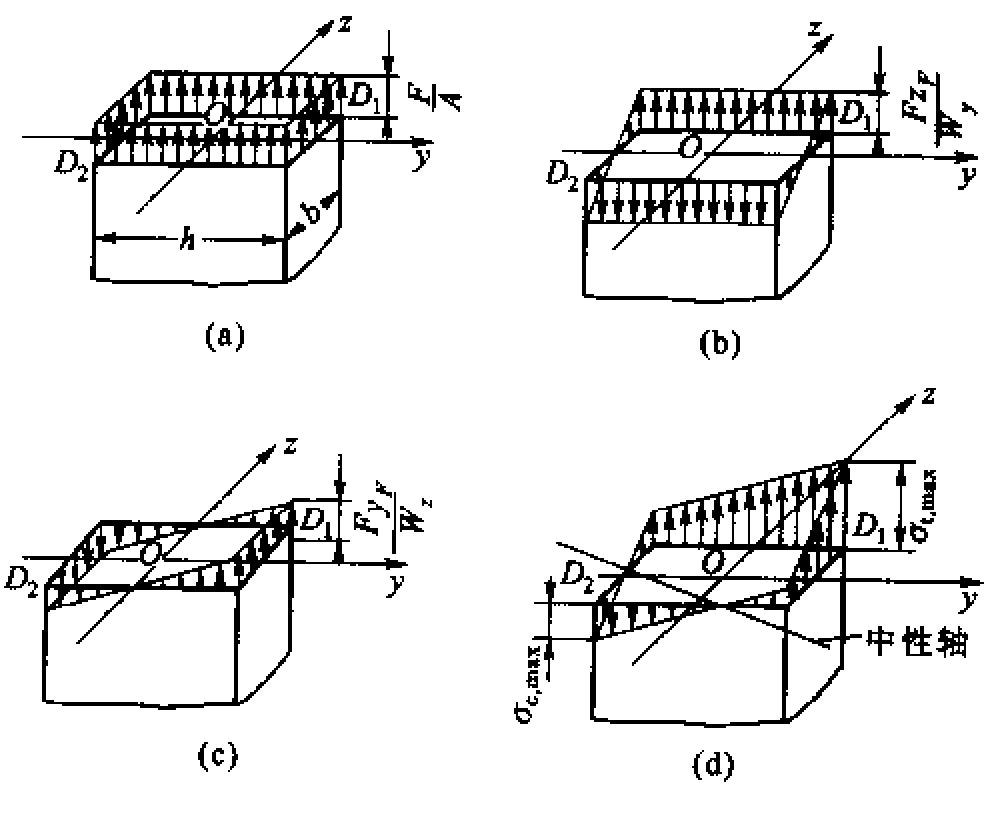
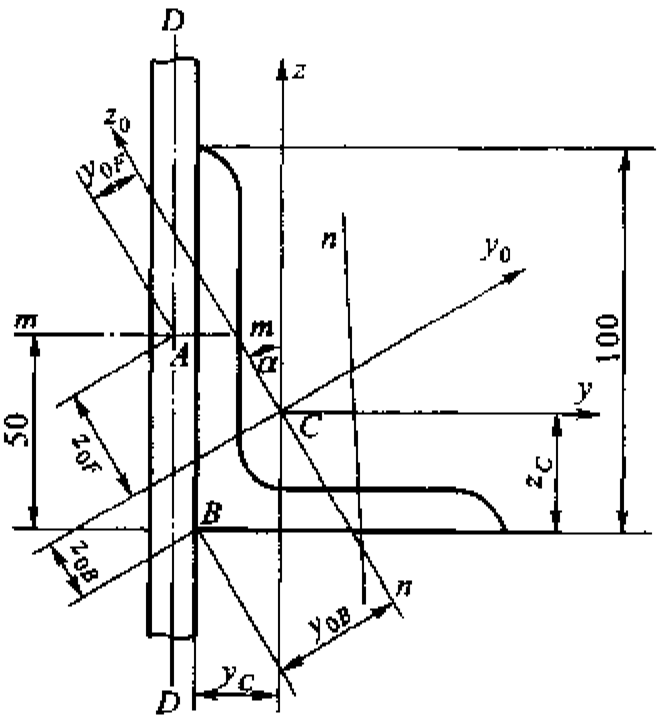


图 8－9

由于危险点处仍为单轴应力状态,因此,在求得最大正应力后,就可根据材料的许用应力[σ]来建立强度条件。

例题 8－3 桁架的一斜拉杆由一根 100 mm × 80 mm × 10 mm 的不等边角钢制成,其两端在长边的中点处用铆钉连接于厚度为 12 mm 的结点板上。图中

mm 为铆钉轴线，DD 为结点板厚度中线。已知斜杆所受的轴向拉力 F 通过结点板厚度中线与铆钉轴线的交点 A，其值为 $F=100\ \mathrm{kN}$。试求斜杆内的最大拉应力，并将结果与轴向拉伸时的应力相比较。



例题 8－3 图

解：由于角钢截面为非对称截面，为求出斜杆内的最大拉应力，应先从型钢规格表中查出角钢截面的形心主惯性轴位置及其他有关数据。

由型钢规格表查得

$$y_C = 21.3\ \mathrm{mm},\qquad z_C = 31.2\ \mathrm{mm}$$

$$\tan\alpha = 0.622\quad (\text{即 } \alpha = 31.9^\circ)$$

由此可得角钢截面的形心主惯性轴 y_0, z_0 如图所示。又从同一表中查得

$$A = 17.17\ \mathrm{cm^2} = 17.17\times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$$

$$I_y = 166.9\ \mathrm{cm^4} = 166.9\times 10^{-8}\ \mathrm{m^4}$$

$$I_z = 94.7\ \mathrm{cm^4} = 94.7\times 10^{-8}\ \mathrm{m^4}$$

$$I_{z_0} = 49.1\ \mathrm{cm^4} = 49.1\times 10^{-8}\ \mathrm{m^4}$$

$$i_{z_0} = 1.69\ \mathrm{cm} = 1.69\times 10^{-2}\ \mathrm{m}\quad (\text{即 } i_{z_0}^2 = 2.86\times 10^{-4}\ \mathrm{m^2})$$

由附录Ⅰ§Ⅰ－4 中的式(b)已知 $I_{y_0}+I_{z_0}=I_y+I_z$，故得

$$I_{y_0} = I_y + I_z - I_{z_0} = (166.9+94.7-49.1)\times 10^{-8}\ \mathrm{m^4} = 212.5\times 10^{-8}\ \mathrm{m^4}$$

从而得

$$i_{y_0}^2 = \frac{I_{y_0}}{A} = \frac{212.5\times 10^{-8}\ \mathrm{m^4}}{17.17\times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} = 12.4\times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$$

由图量得 A 点在以形心主惯性轴 y_0, z_0 为坐标轴的坐标系中,坐标为

$$y_{0F} = -13\ \text{mm} = -1.3\times10^{-2}\ \text{m},\qquad z_{0F} = 31\ \text{mm} = 3.1\times10^{-2}\ \text{m}$$

由式(8-5)及 $i_{z_0}^2, y_F, i_{y_0}^2$ 和 z_F 值,可得中性轴在 y_0, z_0 两轴上的截距为

$$a_{y_0} = -\frac{i_{z_0}^2}{y_F} = -\frac{2.86\times10^{-4}\ \text{m}^2}{-1.3\times10^{-2}\ \text{m}} = 2.2\times10^{-2}\ \text{m}$$

$$a_{z_0} = -\frac{i_{y_0}^2}{z_F} = -\frac{12.4\times10^{-4}\ \text{m}^2}{3.1\times10^{-2}\ \text{m}} = -4\times10^{-2}\ \text{m}$$

按截距画出中性轴 nn 如图所示。由图可见截面拉应力区中 B 点离中性轴最近,该点即为最大拉应力所在的点,其坐标值可由图量得为

$$y_{0B} = -35\ \text{mm} = -3.5\times10^{-2}\ \text{m}$$

$$z_{0B} = -14.5\ \text{mm} = -1.45\times10^{-2}\ \text{m}$$

由于截面为非对称截面,故最大拉应力必须按本节式(a)或(b)计算。将有关数值代入式(b),即得截面上最大拉应力为[①]

$$\sigma_{t,\max} = \sigma_B = \frac{F}{A}\left[1+\frac{(3.1\times10^{-2}\ \text{m})\times(-1.45\times10^{-2}\ \text{m})}{12.4\times10^{-4}\ \text{m}^2}+\frac{(-1.3\times10^{-2}\ \text{m})\times(-3.5\times10^{-2}\ \text{m})}{2.86\times10^{-4}\ \text{m}^2}\right]$$

$$= 2.23\,\frac{F}{A}$$

将 F 和 A 的已知数据代入此式得

$$\sigma_{t,\max} = 2.23\times\frac{100\times10^3\ \text{N}}{17.17\times10^{-4}\ \text{m}^2} = 130\times10^6\ \text{Pa} = 130\ \text{MPa}$$

由上例计算可见,与轴向拉伸时的应力 F_N/A 相比较,偏心拉伸时的应力增大至2.23倍。因此,在桁架中采用单根角钢的杆件只能用作受力小和不重要的杆件。

III. 截面核心

如前所述,当偏心拉力 F 的偏心距较小时,杆横截面上就可能不出现压应力。同理,当偏心压力 F 的偏心距较小时,杆的横截面上也可能不出现拉应力。土建工程中常用的混凝土构件和砖、石砌体,其拉伸强度远低于压缩强度,在这类构件的设计计算中,往往认为其拉伸强度为零。这就要求构件在受偏心压力作用时,其横截面上不出现拉应力。为此,应使中性轴不与横截面相交。由公式(8-5)可见,对于给定的截面,y_F, z_F 值越小,a_y, a_z 值就越大,即外力作用点离

① 事实上,由于铆接接头刚度的影响,杆内的最大拉应力将比这里算得的为小。

形心越近，中性轴距形心就越远。因此，当外力作用点位于截面形心附近的一个区域内时，就可以保证中性轴不与横截面相交，这个区域称为**截面核心**。当外力作用在截面核心的边界上时，与此相对应的中性轴就正好与截面的周边相切（图8－10）。利用这一关系就可确定截面核心的边界。

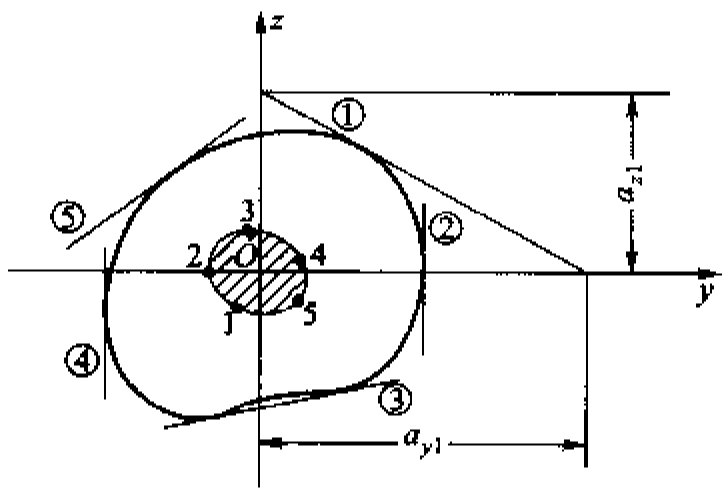


图 8－10

为确定任意形状截面（图 8－10）的截面核心边界，可将与截面周边相切的任一直线①（图 8－10）看作是中性轴，其在 y，z 两个形心主惯性轴上的截距分别为 a_{y1} 和 a_{z1}。据此由式（8－5）确定与该中性轴对应的外力作用点 1，亦即截面核心边界上一个点的坐标（ρ_{y1}，ρ_{z1}）：

$$\rho_{y1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}}, \qquad \rho_{z1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}} \tag{a}$$

同样，分别将与截面周边相切的直线②，③，…等看作是中性轴，并按上述方法求得与其对应的截面核心边界上点 2，3，…等的坐标。连接这些点所得到的一条封闭曲线，即为所求截面核心的边界，而该边界曲线所包围的带阴影线的面积，即为截面核心（图 8－10）。现以圆形和矩形截面为例，说明确定其截面核心边界的方法。

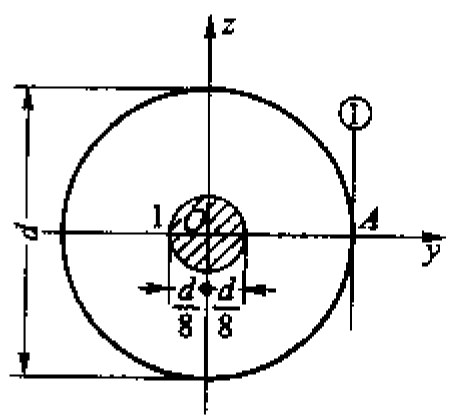


图 8－11

由于圆截面对于圆心 O 是极对称的，因而，截面核心的边界对于圆心也应是极对称的，即为一圆心为 O 的圆。作一条与圆截面周边相切于 A 点的直线①（图 8－11），将其看作为中性轴，并取 OA 为 y 轴，于是，该中性轴在 y，z 两个形心主惯性轴上的截距分别为

$$a_{y1} = d/2, \qquad a_{z1} = \infty$$

而圆截面的 $i_y^2 = i_z^2 = d^2/16$，将以上各值代入式（a），就可得到与其对应的截面核

心边界上点 1 的坐标为

$$\rho_{y1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}} = -\frac{d^2/16}{d/2} = -\frac{d}{8}, \qquad \rho_{z1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}} = 0$$

从而可知，截面核心边界是一个以 O 为圆心、以 $d/8$ 为半径的圆，即图 8-11 中带阴影线的区域。

对于边长为 b 和 h 的矩形截面(图 8-12)，y、z 两对称轴为截面的形心主惯性轴。先将与 AB 边相切的直线①看作是中性轴，其在 y，z 两轴上的截距分别为

$$a_{y1} = \frac{h}{2}, \quad a_{z1} = \infty$$

矩形截面 $i_y^2 = \frac{b^2}{12}$，$i_z^2 = \frac{h^2}{12}$。将以上各值代入式(a)，就可以得到与中性轴①对应的截面核心边界上点 1(图 8-12)的坐标为

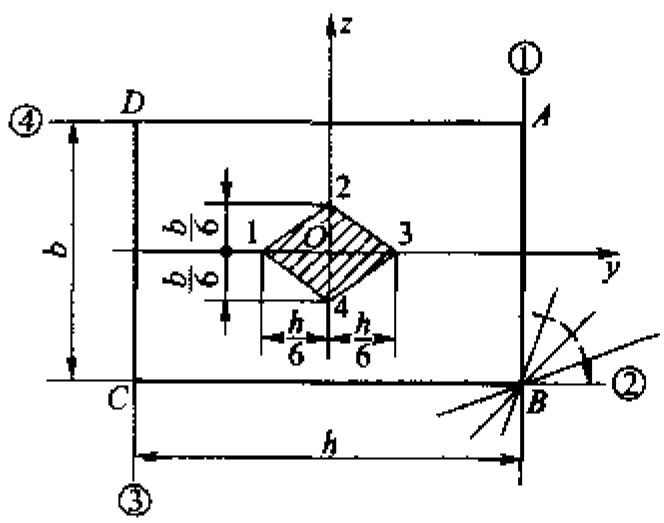


图 8-12

$$\rho_{y1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{2}} = -\frac{h}{6}, \qquad \rho_{z1} = -\frac{i_z^2}{a_{z1}} = 0$$

同理，分别将与 BC，CD 和 DA 边相切的直线②，③，④看作是中性轴，可求得对应的截面核心边界上点 2,3,4 的坐标依次为

$$\rho_{y2} = 0, \quad \rho_{z2} = \frac{b}{6}; \qquad \rho_{y3} = \frac{h}{6}, \quad \rho_{z3} = 0; \qquad \rho_{y4} = 0, \quad \rho_{z4} = -\frac{b}{6}$$

这样，就得到了截面核心边界上的 4 个点。当中性轴从截面的一个侧边绕截面的顶点旋转到其相邻边时，例如当中性轴绕顶点 B 从直线①旋转到直线②时，将得到一系列通过 B 点但斜率不同的中性轴，而 B 点的坐标 y_B，z_B 是这一系列中性轴上所共有的，将其代入中性轴方程(8-4)，经改写后即得

$$1 + \frac{z_B}{i_y^2}z_F + \frac{y_B}{i_z^2}y_F = 0$$

由于上式中的 y_B，z_B 为常数，因此该式就可看作是表示外力作用点坐标 y_F 与 z_F 间关系的直线方程。即当中性轴绕 B 点旋转时，相应的外力作用点移动的轨迹是一条连接点 1,2 的直线。于是，将 1,2,3,4 四点中相邻的两点连以直线，即得矩形截面的截面核心边界。它是个位于截面中央的菱形，其对角线长度分别为 $h/3$ 和 $b/3$(图 8-12)。

对于具有棱角的截面，均可按上述方法确定截面核心。对于周边有凹进部分的截面(例如槽形或T字形截面等)，在确定截面核心的边界时，应该注意不能取与凹进部分的周边相切的直线作为中性轴，因为这种直线显然将与横截面相交。

例题 8-4　试确定图示T字形截面的截面核心边界。图中 y，z 轴为截面的形心主惯性轴。

解：首先求出截面的有关几何性质：

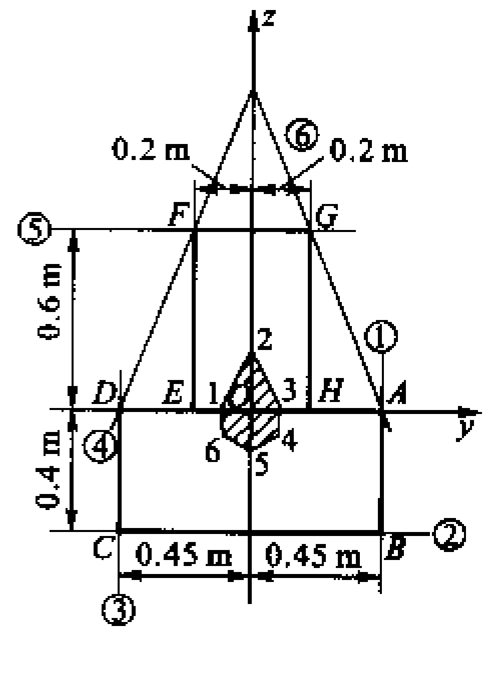
$$A=(0.4\ \text{m}\times 0.6\ \text{m})+(0.4\ \text{m}\times 0.9\ \text{m})=0.6\ \text{m}^2$$

$$I_y=\frac{1}{3}[(0.9\ \text{m})(0.4\ \text{m})^3+(0.4\ \text{m})(0.6\ \text{m})^3]=48\times 10^{-3}\ \text{m}^4$$

$$I_z=\frac{1}{12}[(0.4\ \text{m})(0.9\ \text{m})^3+(0.6\ \text{m})(0.4\ \text{m})^3]=27.5\times 10^{-3}\ \text{m}^4$$

$$i_y^2=\frac{I_y}{A}=\frac{48\times 10^{-3}\ \text{m}^4}{6\times 10^{-1}\ \text{m}^2}=8\times 10^{-2}\ \text{m}^2$$

$$i_z^2=\frac{I_z}{A}=\frac{27.5\times 10^{-3}\ \text{m}^4}{6\times 10^{-1}\ \text{m}^2}=4.58\times 10^{-2}\ \text{m}^2$$



例题 8-4 图

然后作①，②，…等6条直线，将它们看作是中性轴，其中①，②，③和⑤分别与周边 AB，BC，CD 和 FG 相切，而④和⑥则分别连接两顶点 D，F 和两顶点 G，A(见图)。依次求出其在 y、z 坐标轴上的截距，并用式(a)算出与这些中性轴对应的核心边界上1，2，…等6个点的坐标值。再利用中性轴绕一点旋转时相应的外力作用点移动的轨迹为一直线的关系，将6个点中每相邻两点用直线连接，即得图中所示的截面核心边界。其计算结果列于表中。

中性轴编号		①	②	③	④	⑤	⑥
中性轴的截距/m	a_y	0.45	∞	−0.45	−0.45	∞	0.45
	a_z	−∞	−0.40	∞	1.08	0.60	1.08
对应的截面核心边界上的点		1	2	3	4	5	6
截面核心边界上点的坐标值/m	$\rho_y=\frac{-i_z^2}{a_y}$	−0.102	0	0.102	0.102	0	−0.102
	$\rho_z=\frac{-i_y^2}{a_z}$	0	0.20	0	−0.074	−0.133	−0.074

§ 8 - 4 扭转与弯曲

一般的传动轴(如图 8 - 1b 所示)通常发生扭转与弯曲组合变形。由于传动轴大都是圆截面的,故以圆截面杆为主,讨论杆件发生扭转与弯曲组合变形时的强度计算。

设一直径为 d 的等直圆杆 AB,A 端固定,B 端具有与 AB 成直角的刚臂,并承受铅垂力 F 作用,如图 8 - 13a 所示。为分析杆 AB 的内力,可将力 F 向 AB 杆右端截面的形心 B 简化,简化后为一作用于杆端的横向力 F 和一作用于杆端截面的力偶矩 $M_e = Fa$(图 8 - 13b)。可见,杆 AB 将发生弯曲与扭转组合变形。分别作杆的弯矩图和扭矩图(图 8 - 13c,d),可见,杆的危险截面为固定端截面,其内力分量分别为

$$M = Fl, \qquad T = M_e = Fa$$

由弯曲和扭转的应力变化规律可知,危险截面上的最大弯曲正应力 σ 发生在铅垂直径的上、下两端点 C_1 和 C_2 处(图 8 - 13e),而最大扭转切应力 τ 发生在截面周边上的各点处(图 8 - 13f)。因此,危险截面上的危险点为 C_1 和 C_2。对于许用拉、压应力相等的塑性材料制成的杆,这两点的危险程度是相同的。为此,取其中的任一点(如 C_1 点)来研究。围绕 C_1 点分别用横截面、径向纵截面和切向纵截面截取单元体,可得 C_1 点处的应力状态如图 8 - 13g 所示。可见,C_1 点处于平面应力状态,其三个主应力为

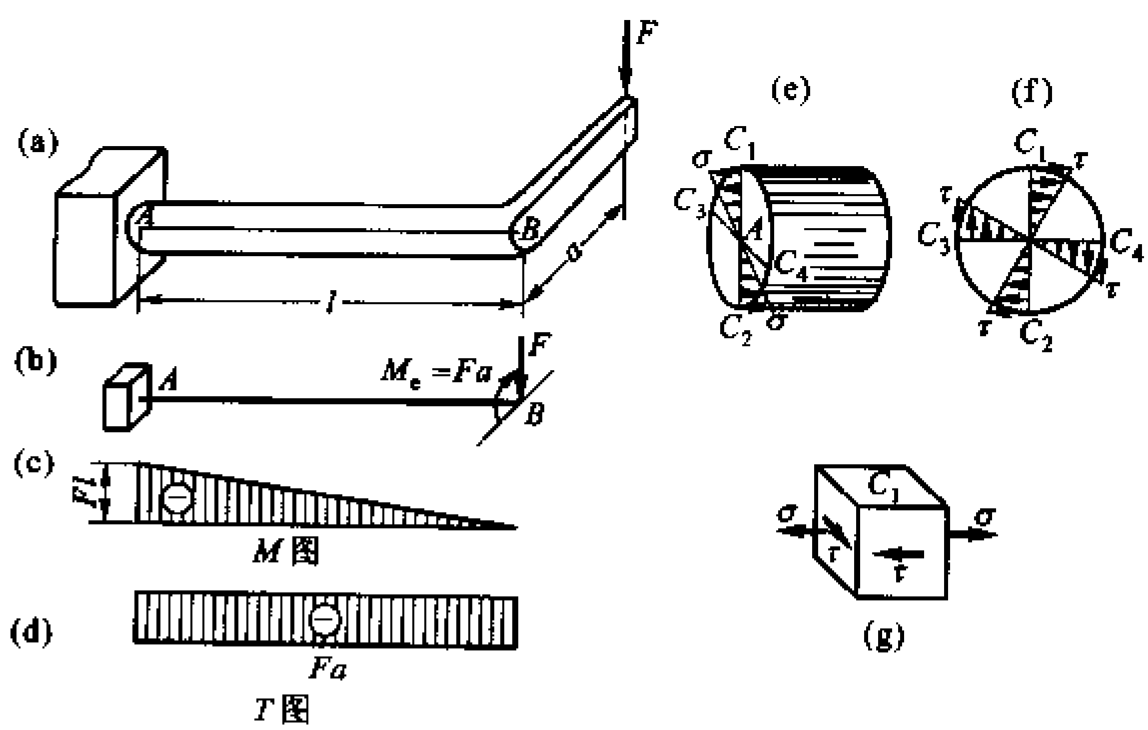


图 8 - 13

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2},\qquad \sigma_2=0$$

对于用塑性材料制成的杆件，选用第三或第四强度理论来建立强度条件。若用第三强度理论，则将上述各主应力代入相应的相当应力表达式

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$$

经化简后，即得

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} \tag{8-7a}$$

若用第四强度理论，则可得相应的相当应力为

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2} \tag{8-7b}$$

求得相当应力后，即可根据材料的许用应力$[\sigma]$来建立强度条件，并对杆进行强度计算。

注意到弯曲正应力 $\sigma=M/W$，扭转切应力 $\tau=T/W_p$，且对于圆截面有 $W_p=2W=\pi d^3/16$，代入式(8－7)，相应的相当应力表达式可改写为

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2+4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W} \tag{8-8a}$$

和

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2+3\left(\frac{T}{W_p}\right)^2}=\frac{\sqrt{M^2+0.75T^2}}{W} \tag{8-8b}$$

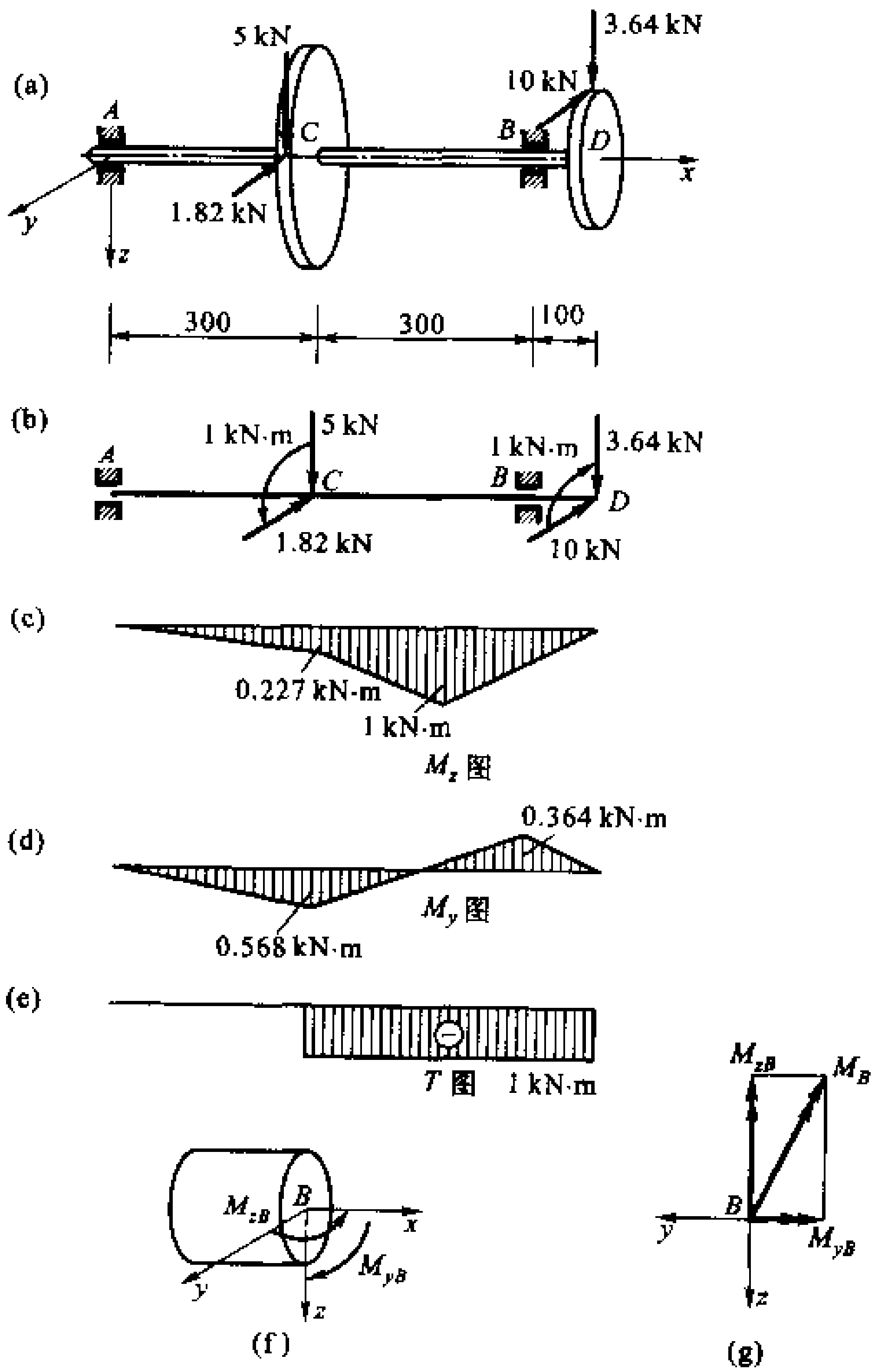
在求得危险截面的弯矩 M 和扭矩 T 后，就可直接利用式(8－8a 或 b)建立强度条件，进行强度计算。式(8－8)同样适用于空心圆杆，而只需将式中的 W 改用空心圆截面的弯曲截面系数。

值得注意的是，式(8－7a 或 b)适用于如图 8－13g 所示的平面应力状态，而不论正应力 σ 是由弯曲或是由其他变形引起的，切应力 τ 是由扭转或是由其他变形引起的，也不论正应力和切应力是正值或是负值。例如，船舶的推进轴将同时发生扭转、弯曲和轴向压缩(或拉伸)，其危险点处的正应力 σ 等于弯曲正应力与轴向压缩(或拉伸)正应力之和，相当应力表达式(8－7a 或 b)仍然适用。但式(8－8a 或 b)仅适用于扭转与弯曲组合变形下的圆截面杆。对于非圆截面杆，即使在扭、弯组合变形时，由于不存在 $W_p=2W$ 的关系，式(8－8a 或 b)就不再适用。但其分析方法依然相同。必须指出，非圆截面杆在扭转时往往发生约束扭转，这时横截面上还将产生附加正应力。尤其是开口薄壁截面杆在约束扭转时，这种附加正应力的数值较大，不容忽视。

最后还应指出，对于机器中的转轴，其横截面周边各点的位置将随轴的转动

而改变。因此，截面周边各点处弯曲正应力的数值和正负号都将随着轴的转动而交替变化，这种应力称为**交变应力**。实践表明，在交变应力下，杆件往往在最大应力远小于材料的静荷强度指标的情况下就发生破坏（见《材料力学（II）》中的§6-5）。所以在机械设计中，对于在交变应力下工作的构件另有相应的强度计算准则。但在一般转轴的初步设计时，仍按上述式(8-7)或(8-8)进行强度计算，只是需将许用应力值适当降低。

例题 8-5　图 a 示一钢制实心圆轴，轴上的齿轮 C 上作用有铅垂切向力 5 kN，径向力 1.82 kN；齿轮 D 上作用有水平切向力 10 kN，径向力 3.64 kN。齿轮 C 的节圆直径 $d_C = 400$ mm，齿轮 D 的节圆直径 $d_D = 200$ mm。设许用应力



例题 8-5 图

$[\sigma]=100\ \mathrm{MPa}$，试按第四强度理论求轴的直径。

解：首先将每个齿轮上的切向外力向该轴的截面形心简化，从而得到一个力和一个力偶（图 b）。于是，可得使轴产生扭转和在 xy，xz 两个纵对称平面内发生弯曲的三组外力。然后分别作出轴在 xy 和 xz 两纵对称平面内的两个弯矩图以及扭矩图，如图 c，d，e 所示。

由于通过圆轴轴线的任一平面都是纵向对称平面，所以当轴上的外力位于相互垂直的两纵对称平面内时，可将其引起的同一横截面上的弯矩按矢量和求得总弯矩，并用总弯矩来计算该横截面上的正应力。由轴的两个弯矩图（图 c，d）可知，横截面 B 上的总弯矩为最大。

按矢量和可得截面 B 上的总弯矩 M_B（图 g）为

$$M_B=\sqrt{M_{yB}^2+M_{zB}^2}=\sqrt{(364\ \mathrm{N\cdot m})^2+(1\ 000\ \mathrm{N\cdot m})^2}=1\ 064\ \mathrm{N\cdot m}$$

在 CD 段内各横截面上的扭矩均相同，故截面 B 是危险截面，其扭矩为

$$T_B=-1\ \mathrm{kN\cdot m}=-1\ 000\ \mathrm{N\cdot m}$$

于是，按式（8－8b）建立强度条件：

$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M_B^2+0.75T_B^2}}{W}=\frac{\sqrt{(1\ 064\ \mathrm{N\cdot m})^2+0.75(-1\ 000\ \mathrm{N\cdot m})^2}}{W}$$

$$=\frac{1\ 372\ \mathrm{N\cdot m}}{W}\leqslant[\sigma]$$

对于实心圆轴，$W=\dfrac{\pi d^3}{32}$，由此可按强度条件求得所需的直径为

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32\times 1\ 372\ \mathrm{N\cdot m}}{\pi(100\times 10^6\ \mathrm{Pa})}}=0.051\ 9\ \mathrm{m}=51.9\ \mathrm{mm}$$

§8－5　连接件的实用计算法

如前所述，连接件的本身尺寸较小，而其变形往往较为复杂，在工程设计中为简化计算，通常按照连接的破坏可能性，采用实用计算法。以螺栓（或铆钉）连接（图 8－14a）为例，连接处的破坏可能性有三种：螺栓在两侧与钢板接触面的压力 F 作用下，将沿 $m-m$ 截面（图 8－14b）被剪断；螺栓与钢板在相互接触面上因挤压而使连接松动；以及钢板在受螺栓孔削弱的截面处被拉断。其他的连接也都有类似的破坏可能性。下面分别介绍剪切和挤压的实用计算。

一、剪切的实用计算

设两块钢板用螺栓连接后承受拉力 F（图 8－14a），显然，螺栓在两侧面上分别受到大小相等、方向相反、作用线相距很近的两组分布外力系的作用（图 8

－14b)。螺栓在这样的外力作用下，将沿两侧外力之间，并与外力作用线平行的截面 $m-m$ 发生相对错动(如图 8－14b 中虚线所示)，这种变形形式为剪切。发生剪切变形的截面 $m-m$，称为**剪切面**。

应用截面法，可得剪切面上的内力，即剪力 F_S(图 8－14c)。在剪切实用计算中，假设剪切面上各点处的切应力相等，于是，得剪切面上的名义切应力为

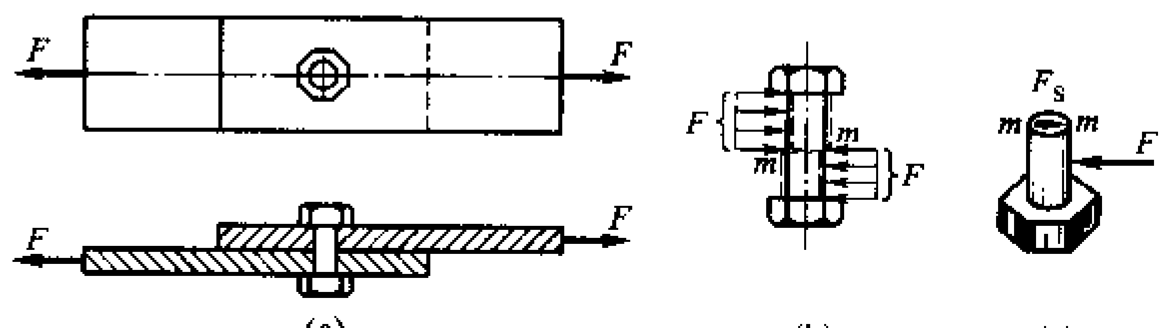


图 8－14

$$\tau=\frac{F_S}{A_s} \tag{8-9}$$

式中，F_S 为剪切面上的剪力；A_s 为剪切面的面积。

然后，通过直接试验，并按名义切应力公式(8－9)，得到剪切破坏时材料的极限切应力 τ_u。再除以安全因数，即得材料的许用切应力$[\tau]$。于是，剪切的强度条件可表示为

$$\tau=\frac{F_S}{A_s}\leqslant[\tau] \tag{8-10}$$

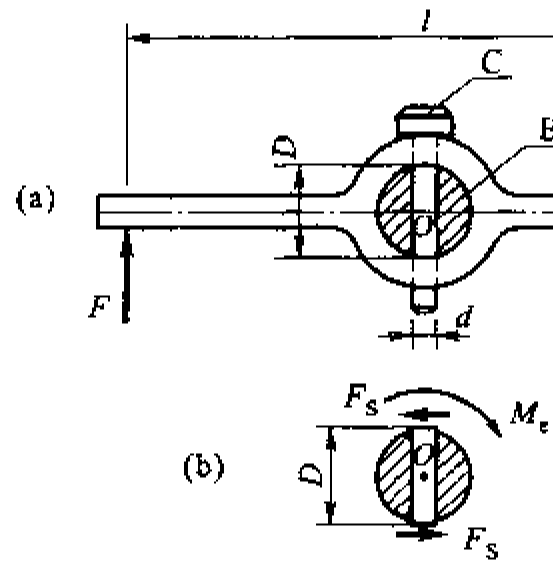
虽然按名义切应力公式(8－9)求得的切应力值，并不反映剪切面上切应力的精确理论值，它只是剪切面上的平均切应力，但对于用低碳钢等塑性材料制成的连接件，当变形较大而临近破坏时，剪切面上的切应力将逐渐趋于均匀。而且，满足剪切强度条件式(8－10)时，显然不至于发生剪切破坏，从而满足工程实用的要求。对于大多数的连接件(或连接)来说，剪切变形及剪切强度是主要的。

例题 8－6　图 a 所示的销钉连接中，构件 A 通过安全销 C 将力偶矩传递到构件 B。已知荷载 $F=2\ \mathrm{kN}$，加力臂长 $l=1.2\ \mathrm{m}$，构件 B 的直径 $D=65\ \mathrm{mm}$，销钉的极限切应力 $\tau_u=200\ \mathrm{MPa}$。试求安全销所需的直径 d。

解：取构件 B 和安全销为研究对象，安全销的受力图如图 b 所示。由平衡条件

$$\sum M_O=0,\qquad F_SD=M_e=Fl$$

可得安全销上的剪力 F_S 为



例题 8－6 图

$$F_S = \frac{Fl}{D} = \frac{(2\times10^3\ \text{N})(1.2\ \text{m})}{0.065\ \text{m}} = 36.92\ \text{kN}$$

当安全销横截面上的切应力达到其极限值时销钉被剪断，即剪断条件为

$$\tau = \frac{F_S}{A_s} = \frac{F_S}{\dfrac{\pi d^2}{4}} = \tau_u$$

由此可得安全销所需的直径为

$$d = \sqrt{\frac{4F_S}{\pi\tau_u}} = \sqrt{\frac{4\times36.92\times10^3\ \text{N}}{\pi\times200\times10^6\ \text{Pa}}} = 0.015\,3\ \text{m} = 15.3\ \text{mm}$$

二、挤压的实用计算

在图 8－14a 所示的螺栓连接中，在螺栓与钢板相互接触的侧面上，将发生彼此间的局部承压现象，称为**挤压**。在接触面上的压力，称为**挤压力**，并记为 F_{bs}。显然，挤压力可根据被连接件所受的外力，由静力平衡条件求得。当挤压力过大时，可能引起螺栓压扁或钢板在孔缘压皱，从而导致连接松动而失效，如图 8－15a 所示。在挤压实用计算中，假设名义挤压应力的计算式为

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \tag{8-11}$$

式中，F_{bs}为接触面上的挤压力；A_{bs}为**计算挤压面面积**。当接触面为圆柱面（如螺栓或铆钉连接中螺栓与钢板间的接触面）时，计算挤压面面积 A_{bs}取为实际接触面在直径平面上的投影面积，如图 8－15b 所示。理论分析表明，这类圆柱状连接件与钢板孔壁间接触面上的理论挤压应力沿圆柱面的变化情况如图 8－15c 所示，而按式(8－11)算得的名义挤压应力与接触面中点处的最大理论挤压应力值相近。当连接件与被连接构件的接触面为平面（如图 8－2b 所示键连接中键与轴或轮毂间的接触面）时，计算挤压面面积 A_{bs}即为实际接触面的面积。

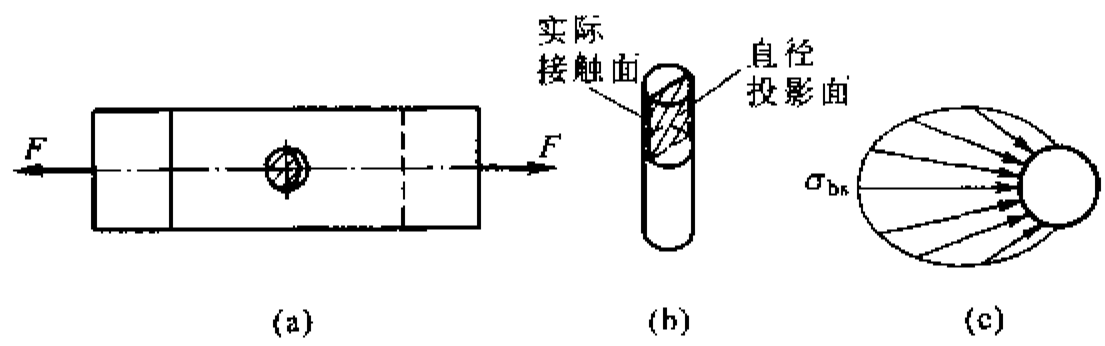


图 8-15

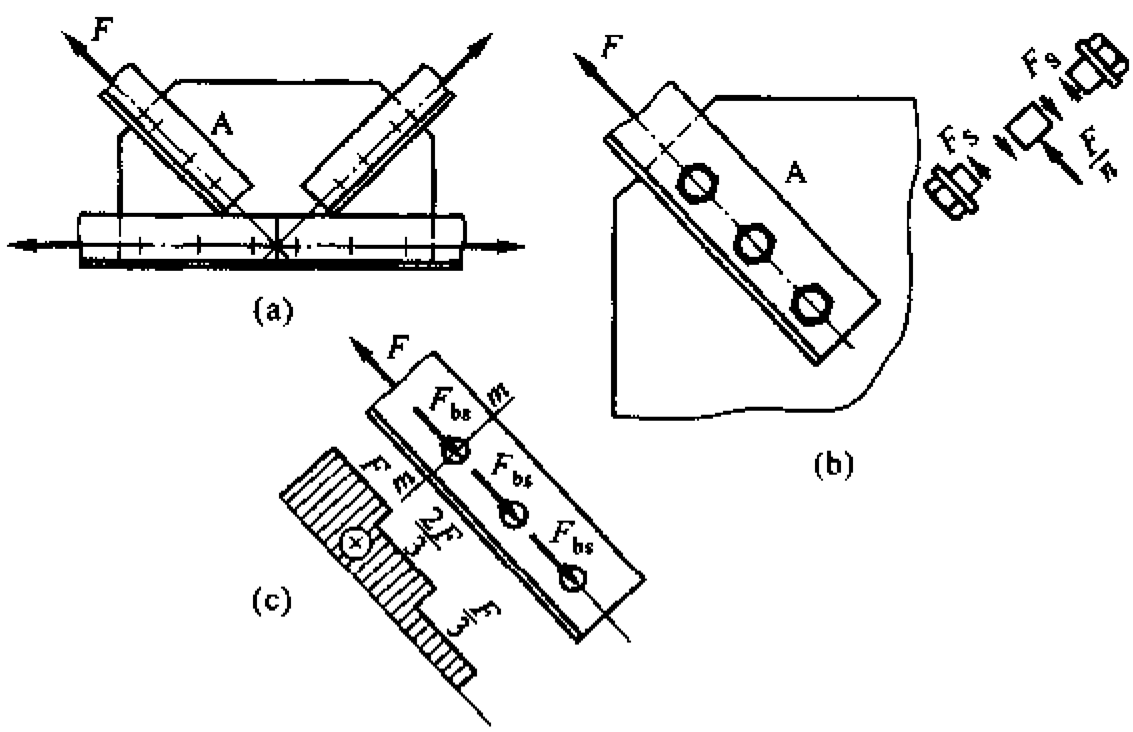
然后，通过直接试验，并按名义挤压应力公式得到材料的极限挤压应力，从而确定许用挤压应力$[\sigma_{bs}]$。于是，挤压强度条件可表达为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}] \tag{8-12}$$

应当注意，挤压应力是在连接件和被连接件之间相互作用的。因而，当两者材料不同时，应校核其中许用挤压应力较低的材料的挤压强度。

根据连接件的工程实用计算方法，下面主要讨论工程中常用的铆钉连接和榫齿连接的计算。至于焊缝连接，计算的基本原理是相同的，但在焊缝连接的计算方法上有一些具体规定，可参阅有关钢结构的教材①。

例题 8-7 某钢桁架的一结点如图 a 所示。斜杆 A 由两个 63 mm×6 mm 的等边角钢组成，受力 $F=140$ kN 的作用。该斜杆用螺栓连接在厚度为 $\delta=$



例题 8-7 图

10 mm的结点板上，螺栓直径为 $d=16$ mm。已知角钢、结点板和螺栓的材料均

① 例如，黎钟、高云虹编《钢结构》，高等教育出版社，1990 年。

为 Q235 钢，许用应力为$[\sigma]=170\ \text{MPa}$，$[\tau]=130\ \text{MPa}$，$[\sigma_{bs}]=300\ \text{MPa}$。试选择螺栓个数，并校核斜杆 A 的拉伸强度。

解：选择螺栓个数的问题在性质上与截面选择的问题相同，先从剪切强度条件式(8－10)选择螺栓个数，然后用挤压强度条件式(8－12)来校核。

首先分析每个螺栓所受到的力。当各螺栓直径相同，且外力作用线通过该组螺栓截面的形心时，可假定每个螺栓的受力相等。所以，在具有 n 个螺栓的接头上作用的外力为F时，每个螺栓所受到的力即等于 F/n。

螺栓有两个剪切面(参看图 b)，由截面法可得每个剪切面上的剪力为

$$F_S=\frac{F/n}{2}=\frac{F}{2n} \tag{1}$$

将剪力和有关的已知数据代入剪切强度条件式(8－10)，即得

$$\tau=\frac{F_S}{A_s}=\frac{\dfrac{F}{2n}}{\dfrac{\pi}{4}d^2}=\frac{2\times 140\times 10^3\ \text{N}}{n\pi\times(16\times 10^{-3}\ \text{m})^2}\leqslant 130\times 10^6\ \text{Pa}=130\ \text{MPa} \tag{2}$$

于是求得螺栓数为

$$n=\frac{2\times 140\times 10^3\ \text{N}}{\pi\times(16\times 10^{-3}\ \text{m})^2\times(130\times 10^6\ \text{Pa})}=2.68 \tag{3}$$

取 $n=3$。

校核挤压强度。由于结点板的厚度小于两角钢厚度之和，所以应校核螺栓与结点板之间的挤压强度。每个螺栓所受的力为$\dfrac{F}{n}$，也即螺栓与结点板间相互的挤压力，即

$$F_{bs}=\frac{F}{n} \tag{4}$$

由式(8－11)可得名义挤压应力为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{\dfrac{F}{n}}{\delta d} \tag{5}$$

将已知数据代入上式，得

$$\begin{aligned}\sigma_{bs}&=\frac{F}{n\delta d}=\frac{140\times 1\,000\ \text{N}}{3\times(10\times 10^{-3}\ \text{m})(16\times 10^{-3}\ \text{m})}\\&=292\times 10^6\ \text{Pa}=292\ \text{MPa}<[\sigma_{bs}]\end{aligned} \tag{6}$$

可见，采用 3 个螺栓满足挤压强度条件。

校核角钢的拉伸强度。取两根角钢一起作为分离体，其受力图及轴力图如图 c 所示。由于角钢在 $m-m$ 截面上轴力最大，该横截面又因螺栓孔而削弱，故为危险截面。该截面上的轴力为

$$F_{N,max} = F = 140\ kN \tag{7}$$

由型钢规格表查得 63 mm×6 mm 角钢的横截面面积为 7.29 cm²，故危险截面 $m-m$ 的面积为

$$A = 2(729\ mm^2 - 6\ mm \times 16\ mm) = 1\,266\ mm^2 \tag{8}$$

角钢横截面 $m-m$ 上的拉伸正应力为

$$\sigma = \frac{F_{N,max}}{A} = \frac{140\,000\ N}{12.66\times 10^{-4}\ m^2} = 111\times 10^6\ Pa = 111\ MPa < [\sigma] \tag{9}$$

可见，斜杆满足拉伸强度条件。

在计算 $m-m$ 截面上的拉应力时应用了轴向拉伸的正应力公式，实际上，由于角钢上的螺栓孔，使横截面发生应力集中现象。但考虑到杆的材料为 Q235 钢，具有良好的塑性，当杆接近破坏时，危险截面 $m-m$ 上各部分材料均将达到屈服，各点处的正应力趋于相等，故假设该截面上各点处的正应力相等是可以的。

§8-6　铆钉连接的计算

铆钉连接在建筑结构中被广泛采用。铆接的方式主要有搭接(图 8-16a)、单盖板对接(图 8-16b)和双盖板对接(图 8-16c)三种。搭接和单盖板对接中的铆钉具有一个剪切面(称为单剪)，双盖板对接中的铆钉具有两个剪切面(称为双剪)，分别如图 8-16 中所示。下面分别按铆钉组的受载方式讨论铆钉连接的强度计算。

I. 铆钉组承受横向荷载

在搭接(图 8-16a)和单盖板对接(图 8-16b)中，由铆钉的受力可见，铆钉(或钢板)显然将发生弯曲。在铆钉组连接(图 8-17)中，由于铆钉和钢板的弹性变形，可以想象两端铆钉的受力与中间铆钉的受力并不完全相同。为简化计算，并考虑到连接在破坏前将发生塑性变形，在铆钉组的计算中假设：

(1) 不论铆接的方式如何，均不考虑弯曲的影响。

(2) 若外力的作用线通过铆钉组横截面的形心，且同一组内各铆钉的材料与直径均相同，则每个铆钉的受力也相等。

按照上述假设，就可得到每个铆钉的受力 F_1 为

$$F_1 = \frac{F}{n} \tag{a}$$

式中，n 为铆钉组中的铆钉个数。

求得每个铆钉的受力 F_1 后，即可按式(8-10)和(8-12)分别核算其剪切

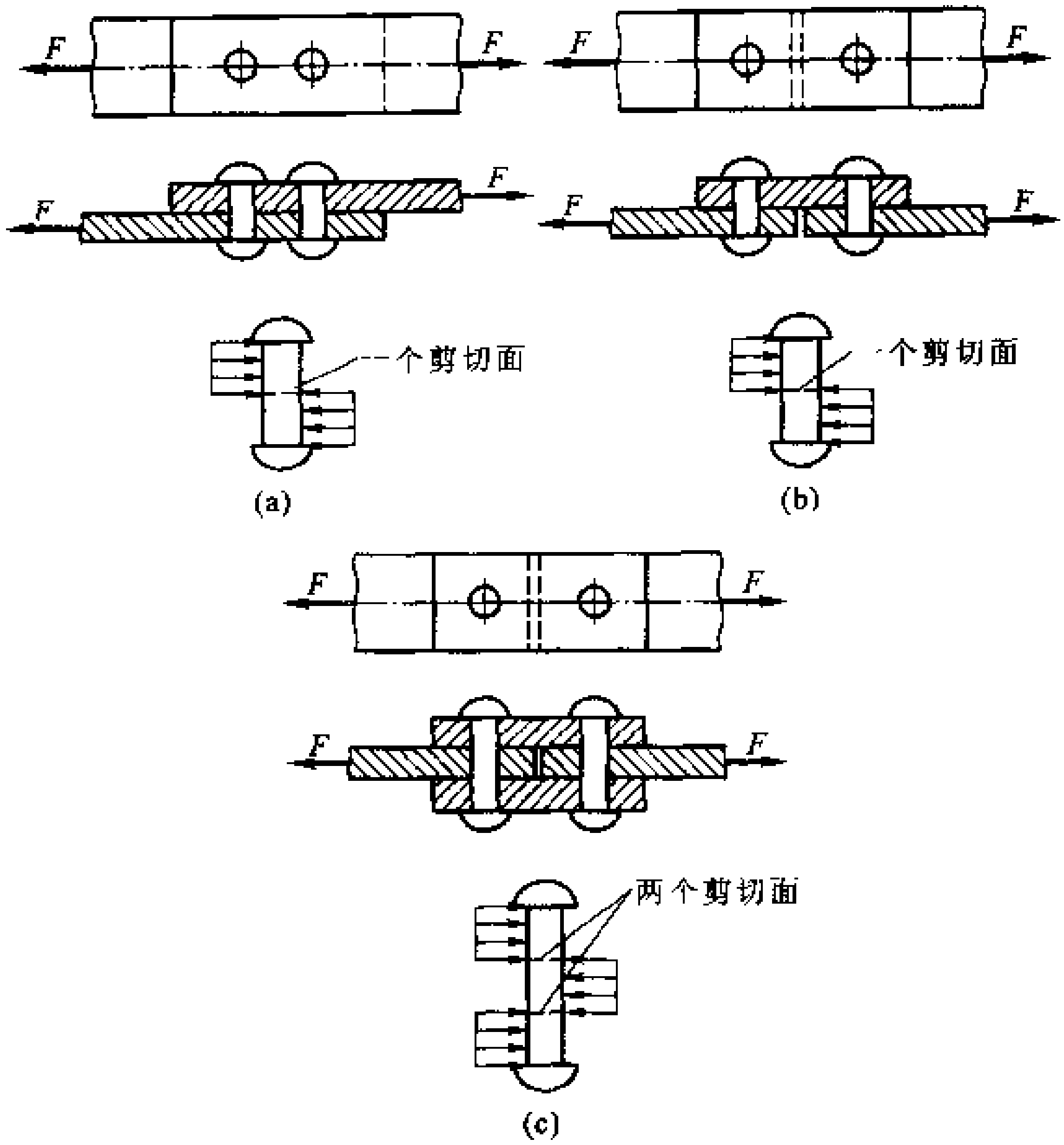


图 8－16

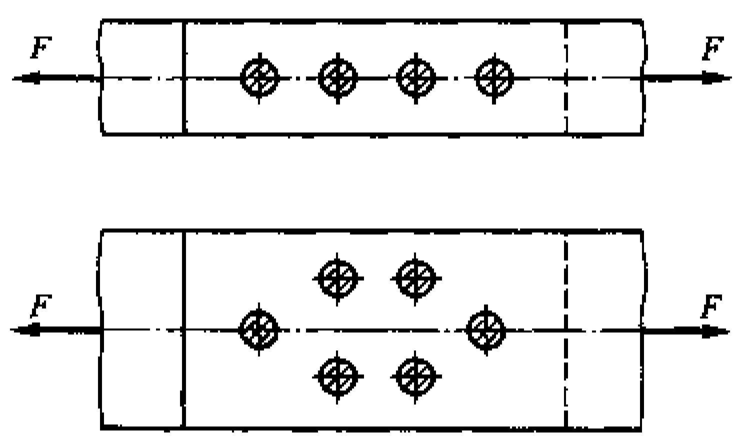


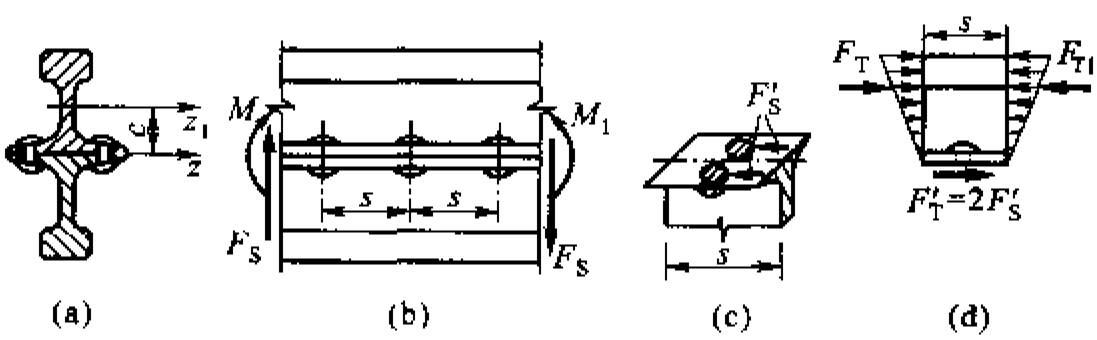
图 8－17

强度和挤压强度。被连接件由于铆钉孔的削弱，其拉伸强度应以最弱截面(轴力较大，而截面积较小)为依据，但不考虑应力集中的影响。

对于销钉或螺栓连接，其分析计算方法与铆钉连接相同。螺栓连接中的紧连接，通过拧紧螺栓而使螺栓产生预拉应力，同时在贴紧的两层钢板间产生足够

的摩擦，以传递荷载。对这种连接(通常称为高强度螺栓连接)的强度计算，可参阅有关钢结构教材[①]。

例题 8－8 两根钢轨铆接成组合梁，其连接情况如图 a，b 所示。每根钢轨的横截面面积 $A=8\,000\ \mathrm{mm}^2$，形心距离底边的高度 $c=80\ \mathrm{mm}$，每一钢轨横截面对其自身形心轴的惯性矩 $I_{z_1}=1\,600\times10^4\ \mathrm{mm}^4$；铆钉间距 $s=150\ \mathrm{mm}$，直径 $d=20\ \mathrm{mm}$，许用切应力$[\tau]=95\ \mathrm{MPa}$。若梁内剪力 $F_S=50\ \mathrm{kN}$，试校核铆钉的剪切强度。不考虑上、下两钢轨间的摩擦。



例题 8－8 图

解：上、下两钢轨作为整体弯曲时，上面钢轨的横截面上全为压应力，而下面钢轨的横截面上则全为拉应力。在横力弯曲的情况下，由于相邻横截面上弯矩不同，相应点处的正应力不相等，故上、下两钢轨有沿其接触面发生纵向错动的趋势，作为连接件的铆钉承受剪力(图 c)。每排铆钉(图 c 中为两个)承受的剪力为一根钢轨在距离等于铆钉纵向间距 s(图 b)的两个横截面上压力(或拉力)之差(图 d)，$F_T'=F_{T1}-F_T$。为了便于计算 F_T'，可先假想两钢轨在接触面上处处传递切应力 τ，而后将其与接触面宽度 b(轨底宽度)及间距 s 相乘，以得出 F_T'，即

$$F_T' = \tau' bs \tag{1}$$

式中，τ'可由弯曲切应力公式计算：

$$\tau' = \frac{F_S S_z^*}{bI_z} \tag{2}$$

于是，每一铆钉承担的剪力 F_S'为

$$F_S' = \frac{F_T'}{2} = \frac{1}{2}\tau' bs = \frac{sF_S S_z^*}{2I_z} \tag{3}$$

为了计算 F_S'，先计算梁在铆钉剪切面以上部分横截面(即一根钢轨的横截面)面积对中性轴的静矩 $S_{z,\max}^*$和整个截面对中性轴的惯性矩 I_z：

① 例如，宗听聪编《钢结构》，中国建筑工业出版社，1991 年。

$$S_{z,\max}^{*} = A \cdot c = 8\,000\ \text{mm}^2 \times 80\ \text{mm} = 64 \times 10^4\ \text{mm}^3 = 640 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$I_z = 2(I_{z_1} + A \cdot c^2) = 2[1\,600 \times 10^4\ \text{mm}^4 + (8\,000\ \text{mm}^2)(80\ \text{mm})^2]$$

$$= 1.344 \times 10^8\ \text{mm}^4 = 1.344 \times 10^{-4}\ \text{m}^4$$

将 s,F_S,S_z^* 和 I_z 的值代入式(3),得

$$F'_S = \frac{(0.15\ \text{m})(50 \times 10^3\ \text{N})(640 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{2 \times 1.344 \times 10^{-4}\ \text{m}^4} = 17.86 \times 10^3\ \text{N} = 17.86\ \text{kN}$$

由已知的 $d = 20\ \text{mm} = 20 \times 10^{-3}\ \text{m}$ 和求得的 F'_S,得铆钉内的切应力为

$$\tau = \frac{F'_S}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{17\,860\ \text{N}}{\frac{\pi}{4} \times (20 \times 10^{-3}\ \text{m})^2} = 56.9 \times 10^6\ \text{Pa} = 56.9\ \text{MPa} < [\tau]$$

由此可见,铆钉内的切应力满足强度条件。

II. 铆钉组承受扭转荷载

承受扭转荷载的铆钉组(图 8－18a),由于被连接件(钢板)的转动趋势,每一铆钉的受力将不再相同。令铆钉组横截面的形心为 O 点(图 8－18b),假设钢板的变形不计,可视为刚体。于是,每一铆钉的平均切应变与该铆钉截面中心(如 A 或 B 点)至 O 点的距离成正比。若铆钉组中每个铆钉的直径相同,且切应力与切应变成正比,则每个铆钉所受的力与该铆钉截面中心(如 A 或 B 点)至铆钉组的截面形心 O 点的距离成正比,其方向垂直于该点与 O 点的连线,而每一铆钉上的力对 O 点力矩的代数和就等于钢板所受的转矩 M_e(图 8－18b),即

$$M_e = Fe = \sum F_i a_i \tag{b}$$

式中,F_i 为铆钉 i 所受的力;a_i 为该铆钉截面中心至铆钉组截面形心的距离。

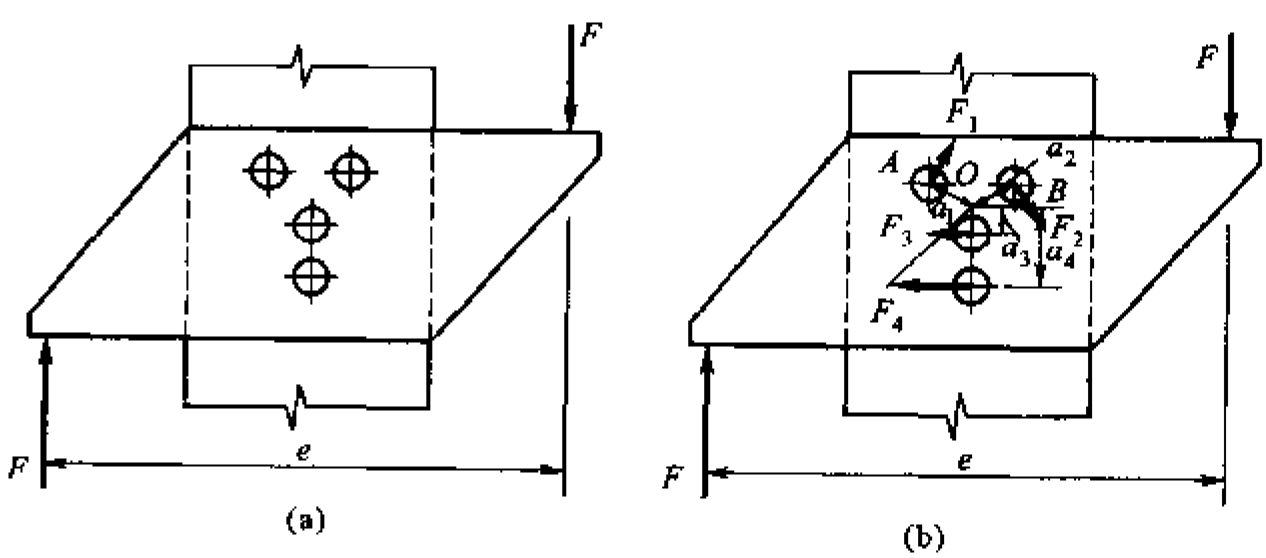


图 8－18

对于承受偏心横向荷载的铆钉组(图 8－19a),可将偏心荷载 F 向铆钉组截面形心 O 点简化,得到一个通过 O 点的荷载 F 和一个绕 O 点旋转的转矩 $M_e =$

Fe(图 8-19b)。若同一铆钉组中每一铆钉的材料和直径均相同，则可分别按式(a)和(b)计算由力 F 引起的力 F_i' 和由转矩 M_e 引起的力 F_i''，铆钉 i 的受力为力 F_i' 和 F_i'' 的矢量和，如图 8-19b 所示。

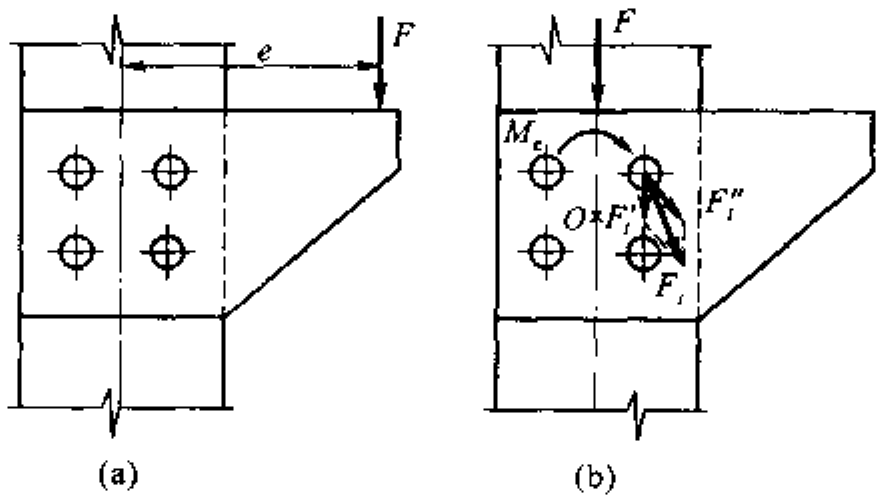
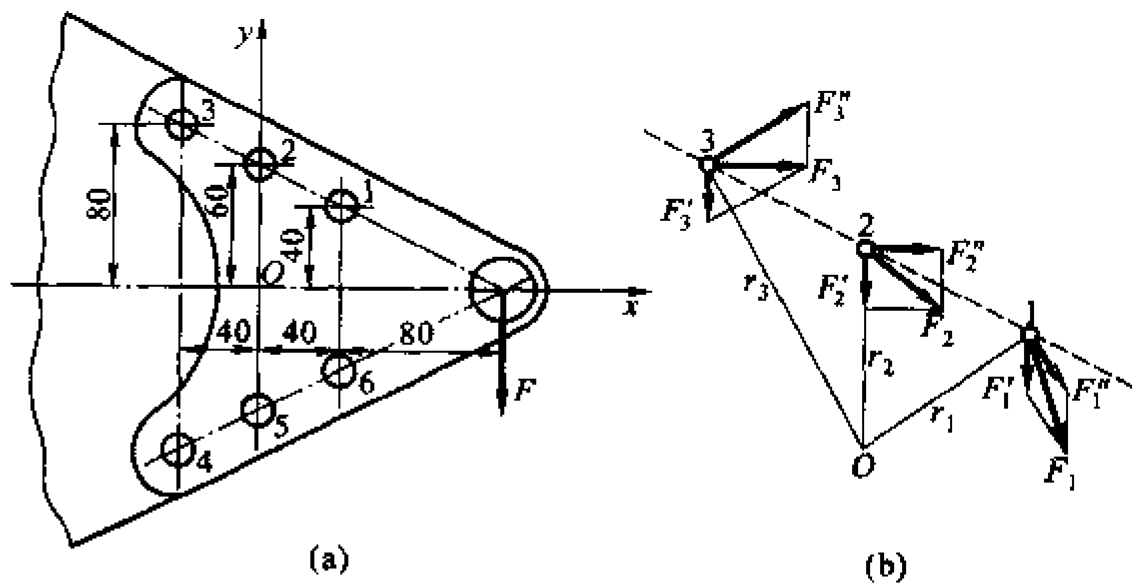


图 8-19

求得铆钉 i 的受力 F_i 后，即可按式(8-10)和(8-12)分别核算受力最大的铆钉的剪切强度和挤压强度，以保证连接的安全。

例题 8-9　一铆钉连接的托架受集中力 F 作用，如图 a 所示。已知外力 $F=12$ kN，铆钉直径 $d=20$ mm，连接为搭接。试求受力最大的铆钉剪切面上的切应力。



例题 8-9 图

解：托架的铆钉组对称于 x 轴，转动中心为铆钉 2 与铆钉 5 的连线与 x 轴的交点 O。与 x 轴对称的铆钉受力相同，故可取 x 轴的上边或下边作为研究对象。现研究其上边。

(1) 将外力 F 向转动中心 O 点简化，得力 F 和力偶矩

$$M_e = 12\times10^3\ \text{N}\times0.12\ \text{m} = 1.44\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m} = 1.44\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 在通过铆钉组截面形心的力 F 作用下，每个铆钉上所受的力相等，即

$$F'_1 = F'_2 = \cdots = F'_6 = \frac{F}{6} = \frac{12\ \text{kN}}{6} = 2\ \text{kN} \tag{1}$$

(3) 在力偶矩 M_e 作用下，其所承受的力 F''_i 与其到转动中心的距离 r_i 成正比：

$$\left.\begin{aligned}\frac{F''_1}{F''_2} &= \frac{r_1}{r_2}\\ \frac{F''_1}{F''_3} &= \frac{r_1}{r_3}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

根据平衡条件 $\sum F''_i r_i = M_e$，有

$$2F''_1 r_1 + 2F''_2 r_2 + 2F''_3 r_3 = M_e$$

再将式(2)代入上式，可得

$$2F''_1 r_1 + 2F''_1 \frac{r_2^2}{r_1} + 2F''_3 \frac{r_3^2}{r_1} = M_e$$

由此解出

$$F''_1 = \frac{M_e r_1}{2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)} \tag{3}$$

其中

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(0.04\ \text{m})^2 + (0.04\ \text{m})^2} = 0.056\ 6\ \text{m}$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{0 + (0.06\text{m})^2} = 0.06\ \text{m}$$

$$r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{(-0.04\ \text{m})^2 + (0.08\ \text{m})^2} = 0.089\ 4\text{m}$$

将这些数据代入式(3)，得到

$$F''_1 = \frac{(1.44 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}) \times 0.056\ 6\ \text{m}}{2[(0.056\ 6\ \text{m})^2 + (0.06\ \text{m})^2 + (0.089\ 4\ \text{m})^2]}$$

$$= 2.754 \times 10^3\ \text{N} = 2.754\ \text{kN}$$

同理可得

$$F''_2 = 2.928\ \text{kN}, \qquad F''_3 = 4.344\ \text{kN}$$

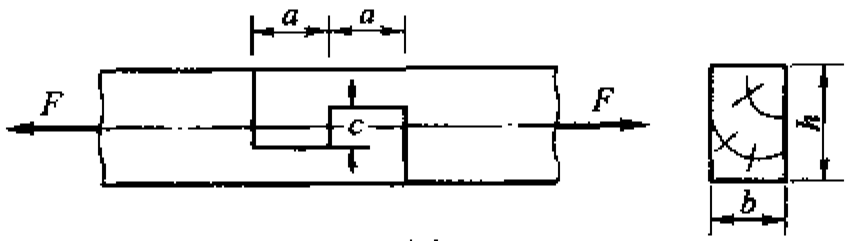
求得 F'_i 和 F''_i 后，便可绘出每个铆钉的受力图(图 b)。将 F'_i 与 F''_i 用矢量合成，得出每一铆钉的总剪力的大小和方向。经比较得知铆钉 1 和铆钉 6 的受力最大，其值为 $F_1 = 4.41$ kN。该铆钉剪切面上的切应力为

$$\tau_1 = \frac{F_1}{A_{s1}} = \frac{4.41 \times 10^3\ \text{N}}{\frac{\pi}{4}(0.02\ \text{m})^2} = 14\ \text{MPa}$$

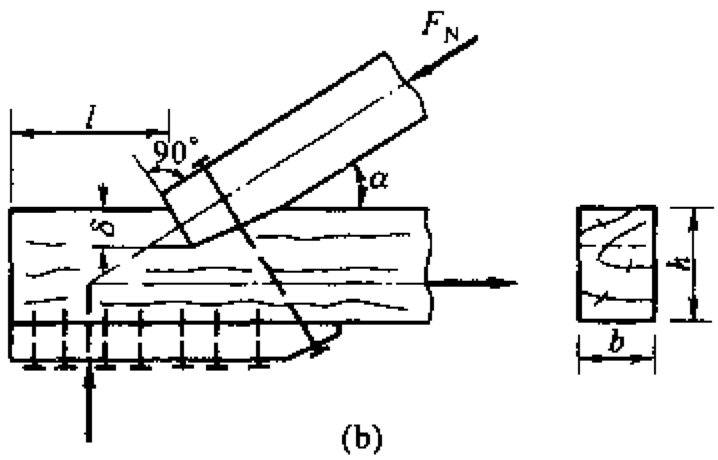
*§8-7　榫齿连接

在木结构中，除了螺栓连接和钉连接外，通常还采用榫齿连接。榫齿连接有

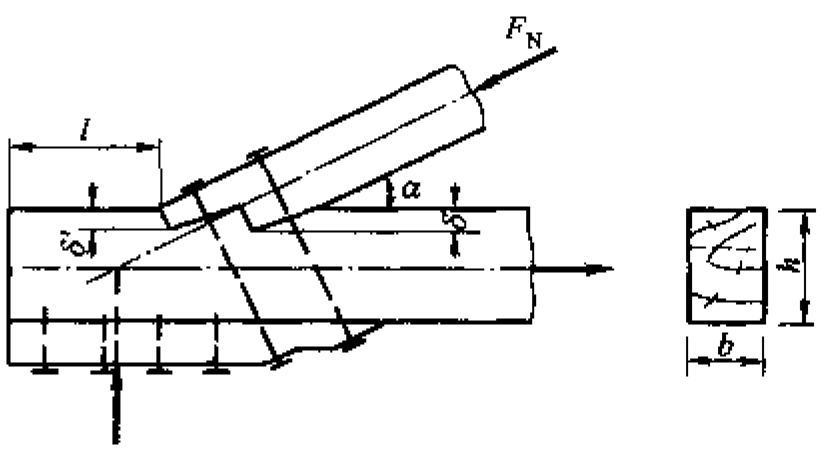
平齿、单齿和双齿连接三种，分别如图 8-20a，b 和 c 所示。



(a)



(b)



(c)

图 8-20

在单齿和双齿连接中，必须设置保险螺栓，以压紧接触面，并防止因剪切破坏或其他因素引起结构的突然破坏。榫齿连接应核算木材的压缩强度、剪切强度和拉伸强度，现分述如下。

榫接处木材的压缩强度条件为

$$\sigma_c = \frac{F_N}{A_c} \leqslant [\sigma_c]_\alpha \tag{8-13}$$

式中，F_N 为承压面的压力；A_c 为齿的承压面面积，但在图 8-20c 的双齿连接中，应取两个齿的承压面面积之和；$[\sigma_c]_\alpha$ 为木材的斜纹许用压应力，其中下标 α 为压力 F_N 与木纹间的夹角。

斜纹许用压应力按设计规范取为

当 $\alpha \leqslant 10°$， $[\sigma_c]_\alpha = [\sigma_c]$ (8-14a)

当 $10^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$，$[\sigma_c]_\alpha = \dfrac{[\sigma_c]}{1+\left(\dfrac{[\sigma_c]}{[\sigma_c']}-1\right)\dfrac{\alpha-10^\circ}{80^\circ}\sin\alpha}$　　(8－14b)

式中，$[\sigma_c]$为木材的顺纹许用压应力；$[\sigma_c']$为横纹许用压应力；α 为压力与木纹间的夹角。

榫接处木材的剪切强度条件为

$$\tau = \frac{F_S}{A_s} \leqslant K_s[\tau] \tag{8－15}$$

式中，F_S 为剪切面上的剪力；A_s 为剪切面的面积，在图 8－20c 的双齿连接中，只取第二个齿的剪切面面积，即 $A_s = bl$；$[\tau]$为木材的顺纹许用切应力；K_s 为考虑沿剪切面长度切应力分布不均匀的降低因数，其值可按表 8－1 选用。

木材的拉伸强度仍按轴向拉伸进行核算。值得注意的是，木材的许用应力不仅和应力与木纹间的夹角大小有关，而且与温度、含水率、荷载作用时间以及木节、裂纹等缺陷有关，因此，为安全计，木材的许用应力通常规定得较为保守。有关的讨论可参阅《木结构设计手册》① 等资料。

表 8－1　降低因数 K_s

l/t		4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	10
K_s	单齿	1.0	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75
	双齿	—	—	1.0	0.95	0.9	0.85

例题 8－10　在图 8－20b 所示的木结构榫齿连接中，作用在斜杆上的力 $F_N = 70$ kN，斜杆与下弦杆间的夹角为 $\alpha = 30^\circ$。已知下弦杆宽度 $b = 200$ mm，高度 $h = 300$ mm；木材的许用拉应力$[\sigma] = 10$ MPa，斜纹许用压应力$[\sigma_c]_{30^\circ} = 5.0$ MPa，顺纹许用切应力$[\tau] = 1.2$ MPa。试确定榫接处的深度 δ、下弦杆末端长度 l，并校核下弦杆削弱处的拉伸强度。

解：(1) 由斜杆端部与下弦杆接触处的压缩强度条件：

$$\sigma_c = \frac{F_N}{b\dfrac{\delta}{\cos 30^\circ}} \leqslant [\sigma_c]_{30^\circ}$$

得

$$\delta \geqslant \frac{F_N\cos 30^\circ}{b[\sigma_c]_{30^\circ}} = \frac{(70\times 10^3\,\text{N})\times 0.866}{(0.2\,\text{m})\times(5\times 10^6\,\text{Pa})} = 0.061\text{ m} = 61\text{ mm}$$

(2) 根据榫接处下弦杆的剪切强度条件：

$$\tau = \frac{F_N\cos 30^\circ}{bl} \leqslant K_s[\tau]$$

① 《木结构设计手册》编写组，《木结构设计手册》，中国建筑工业出版社，1981 年。

式中，取 $K_{\searrow}=1.0$，可得

$$l \geqslant \frac{F_{\searrow}\cos 30^{\circ}}{b[\tau]}=\frac{(70\times 10^{3}\ \mathrm{N})\times 0.866}{(0.2\ \mathrm{m})\times(1.2\times 10^{6}\ \mathrm{Pa})}=0.252\ \mathrm{m}=252\ \mathrm{mm}$$

（3）在下弦杆削弱处校核净截面的拉伸强度：

$$\sigma=\frac{F_{\searrow}\cos 30^{\circ}}{b(h-\delta)}=\frac{(70\times 10^{3}\ \mathrm{N})\times 0.866}{(0.2\ \mathrm{m})\times(0.3\ \mathrm{m}-0.061\ \mathrm{m})}$$

$$=1.27\times 10^{6}\ \mathrm{Pa}=1.27\ \mathrm{MPa}<[\sigma]$$

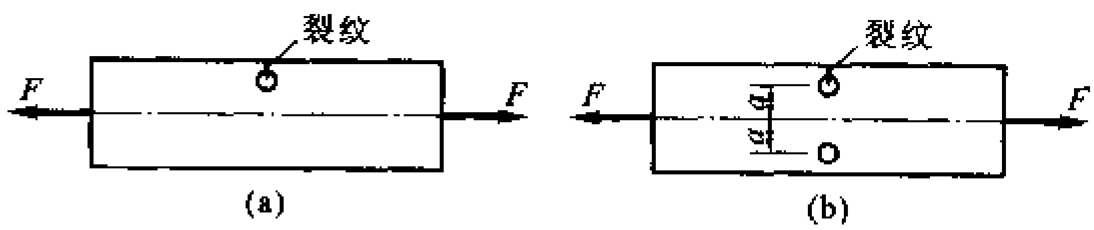
可见下弦杆榫接处满足拉伸强度条件。

思　考　题

8-1　试问双对称截面梁在两相互垂直的平面内发生对称弯曲时，采用什么样的截面形状最为合理？为什么？

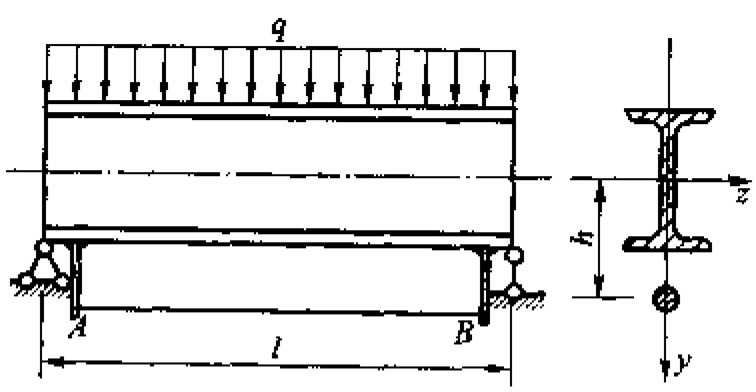
8-2　试问构件发生弯曲与拉伸(压缩)组合变形时，在什么条件下可按叠加原理计算其横截面上的最大正应力？

8-3　某工厂修理机器时，发现一受拉的矩形截面杆在一侧有一小裂纹。为了防止裂纹扩展，有人建议在裂纹尖端处钻一个光滑小圆孔即可(图 a)，还有人认为除在上述位置钻孔外，还应当在其对称位置再钻一个同样大小的圆孔(图 b)。试问哪一种作法好？为什么？



思考题 8-3 图

8-4　由 16 号工字钢制成的简支梁的尺寸及荷载情况如图所示。因该梁强度不足，在紧靠支座处焊上钢板，并设置钢拉杆 AB 加强。已知拉杆横截面面积为 A，钢材的弹性模量为 E。试写出在考虑和不考虑梁的轴向压缩变形时，求解钢拉杆轴力的过程。(注：分析时拉杆长度可近似等于两支座间的距离。)



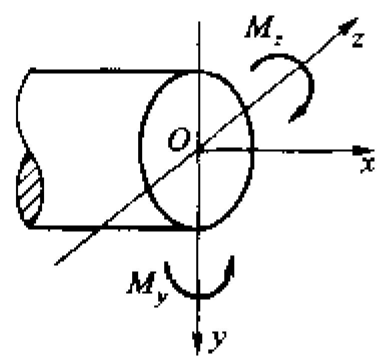
思考题 8-4 图

8-5　图示为一钢圆轴危险截面上的两弯矩分量 M_y 和 M_z。试问是否必须用应力叠加

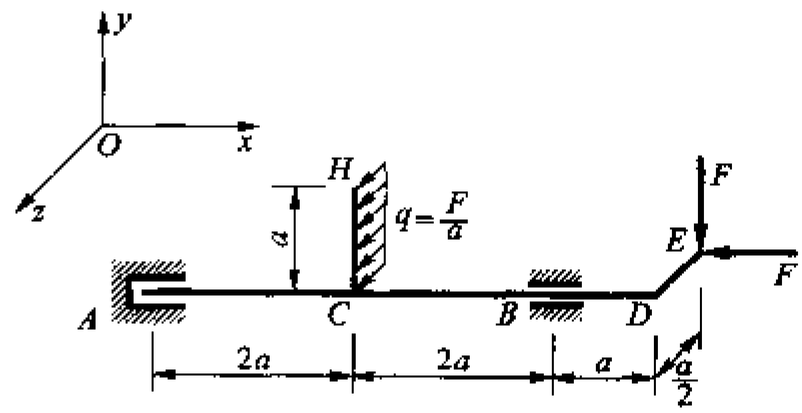
方法推出其最大正应力的表达式：

$$\sigma_{\max}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2}}{W}$$

8-6 一折杆由直径为 d 的Q235钢实心圆截面杆构成，其受力情况及尺寸如图所示。若已知杆材料的许用应力$[\sigma]$，试分析杆 AB 的危险截面及危险点处的应力状态，并列出强度条件表达式。

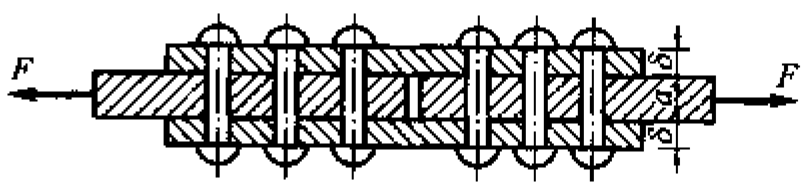


思考题 8-5 图



思考题 8-6 图

8-7 试问在图示铆接结构中，力是怎样传递的？

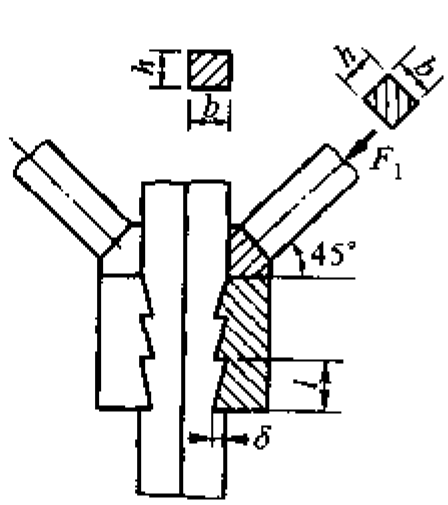


思考题 8-7 图

8-8 试问压缩与挤压有何区别？为何挤压许用应力大于压缩许用应力？

8-9 若思考题8-7图中所示各铆钉的材料相同但直径不同，或者直径相同但材料不同，试问能否仍用式(8-9)来计算各铆钉上的切应力？

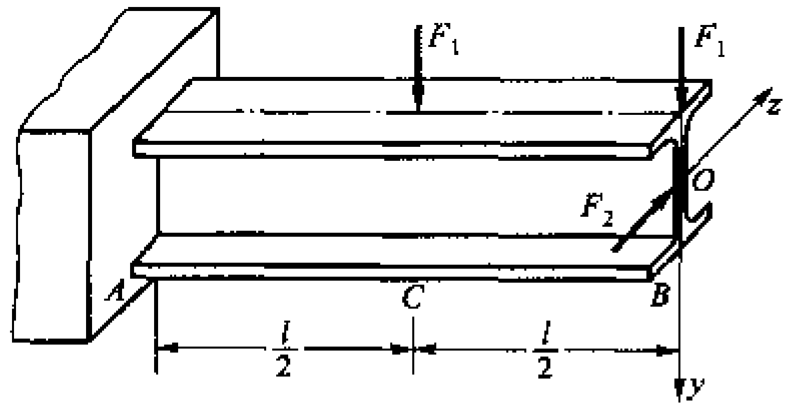
8-10 某木桥上的斜支柱是撑在橡木垫上的，而橡木垫又通过齿形榫将力传递给桥桩，如图所示。试分析该齿形榫的剪切面面积和承压面面积。



思考题 8-10 图

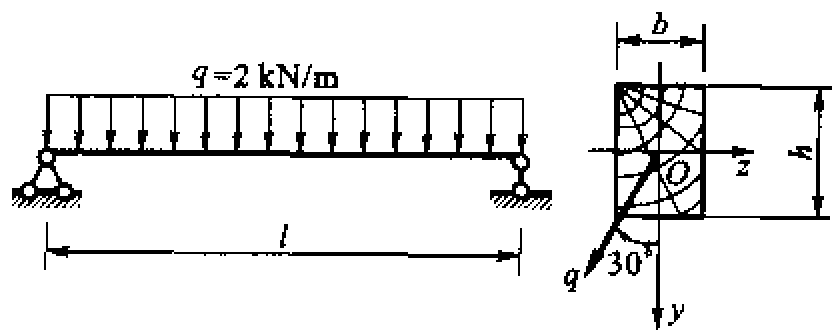
习　题

8-1　14 号工字钢悬臂梁受力情况如图所示。已知 $l=0.8$ m, $F_1=2.5$ kN, $F_2=1.0$ kN,试求危险截面上的最大正应力。



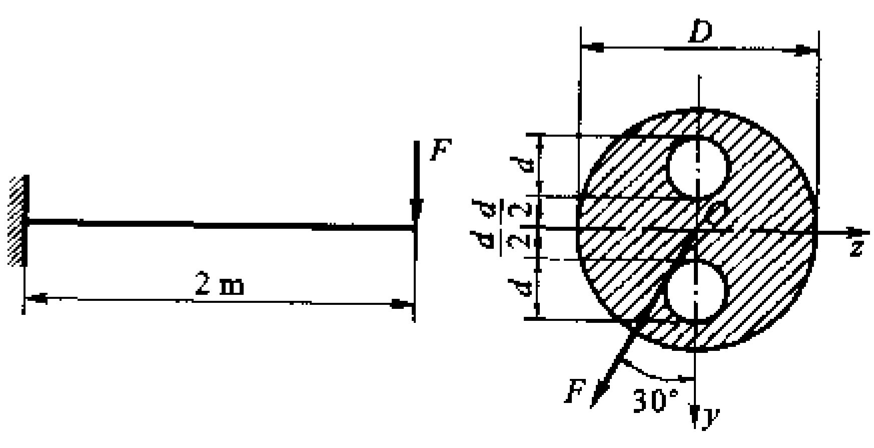
习题 8-1 图

8-2　受集度为 q 的均布荷载作用的矩形截面简支梁,其荷载作用面与梁的纵向对称面间的夹角为 $\alpha=30°$,如图所示。已知该梁材料的弹性模量 $E=10$ GPa;梁的尺寸为 $l=4$ m, $h=160$ mm, $b=120$ mm;许用应力 $[\sigma]=12$ MPa;许可挠度 $[w]=\frac{l}{150}$。试校核梁的强度和刚度。



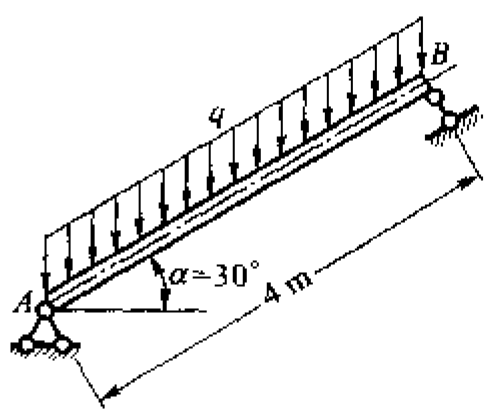
习题 8-2 图

8-3　悬臂梁受集中力 F 作用如图所示。已知横截面的直径 $D=120$ mm, $d=30$ mm,材料的许用应力 $[\sigma]=160$ MPa。试求中性轴的位置,并按照强度条件求梁的许可荷载 $[F]$。

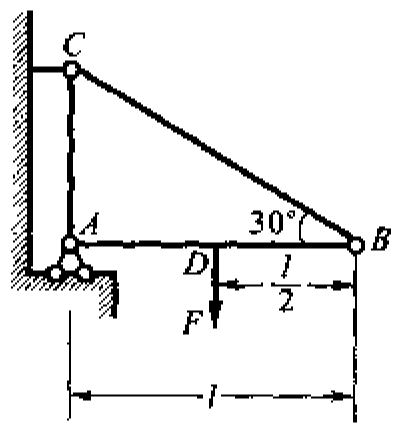


习题 8-3 图

8－4　图示一楼梯木斜梁的长度为 $l=4$ m，截面为 0.2 m×0.1 m 的矩形，受均布荷载作用，$q=2$ kN/m。试作梁的轴力图和弯矩图，并求横截面上的最大拉应力和最大压应力。



习题 8－4 图



习题 8－5 图

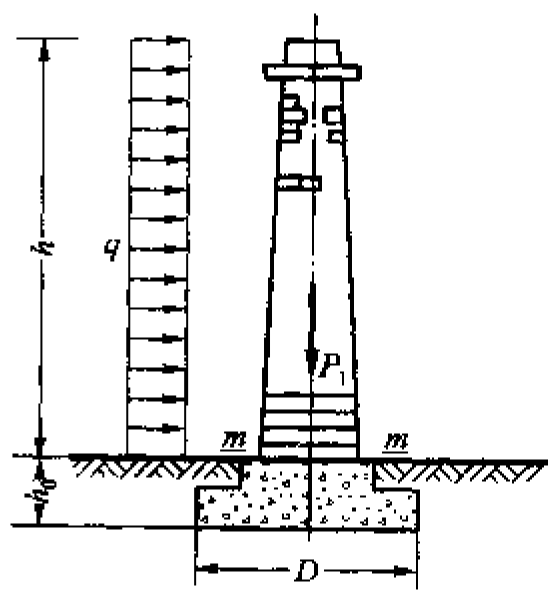
8－5　图示一悬臂滑车架，杆 AB 为 18 号工字钢，其长度为 $l=2.6$ m。试求当荷载 $F=25$ kN 作用在 AB 的中点 D 处时，杆内的最大正应力。设工字钢的自重可略去不计。

8－6　砖砌烟囱高 $h=30$ m，底截面 $m-m$ 的外径 $d_1=3$ m，内径 $d_2=2$ m，自重 $P_1=2\,000$ kN，受 $q=1$ kN/m 的风力作用。试求：

(1) 烟囱底截面上的最大压应力；

(2) 若烟囱的基础埋深 $h_0=4$ m，基础及填土自重按 $P_2=1\,000$ kN 计算，土壤的许用压应力$[\sigma]=0.3$ MPa，圆形基础的直径 D 应为多大？

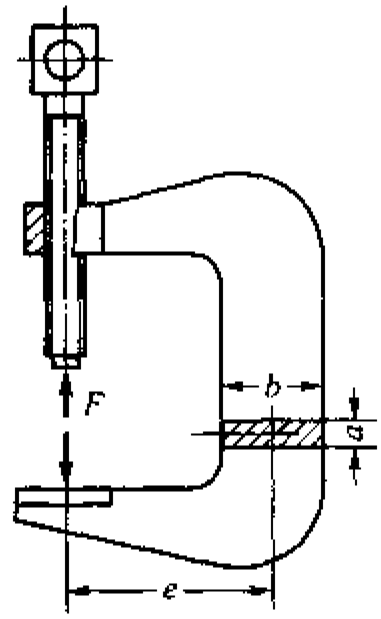
注：计算风力时，可略去烟囱直径的变化，把它看作是等截面的。



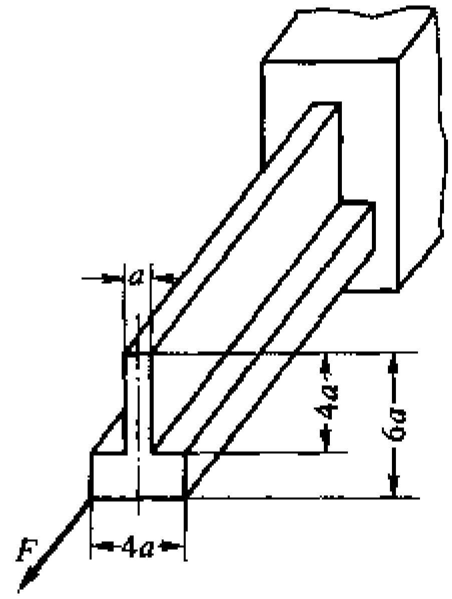
习题 8－6 图

8－7　螺旋夹紧器立臂的横截面为 $a\times b$ 的矩形，如图所示。已知该夹紧器工作时承受的夹紧力 $F=16$ kN，材料的许用应力$[\sigma]=160$ MPa，立臂厚 $a=20$ mm，偏心距 $e=140$ mm。试求立臂宽度 b。

8－8　试求图示杆内的最大正应力。力 F 与杆的轴线平行。



习题 8－7 图



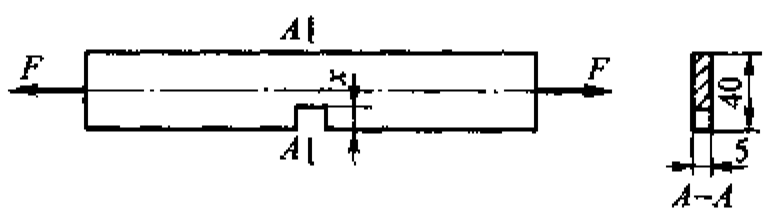
习题 8－8 图

8－9　有一座高为 1.2 m、厚为 0.3 m 的混凝土墙，浇筑于牢固的基础上，用作挡水用的小坝。试求：

(1) 当水位达到墙顶时墙底处的最大拉应力和最大压应力(设混凝土的密度为 2.45 kg/m^3)；

(2) 如果要求混凝土中没有拉应力，试问最大许可水深 h 为多大？

8－10　受拉构件形状如图，已知截面尺寸为 40 mm×5 mm，通过轴线的拉力 $F=12$ kN。现拉杆开有切口，如不计应力集中影响，当材料的$[\sigma]=100$ MPa 时，试确定切口的最大许可深度，并绘出切口截面的应力变化图。



习题 8－10 图

8－11　一圆截面直杆受偏心拉力作用，偏心距 $e=20$ mm，杆的直径为 70 mm，许用拉应力$[\sigma]$为 120 MPa。试求杆的许可偏心拉力值。

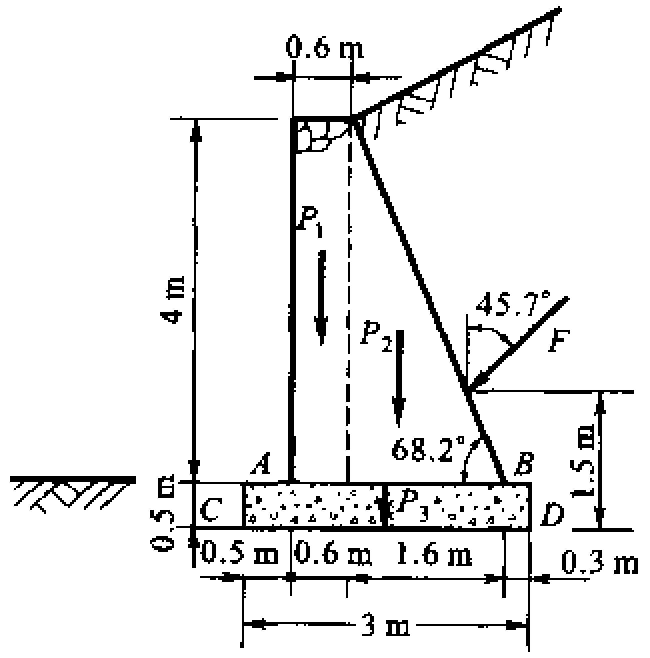
8－12　图示一浆砌块石挡土墙，墙高 4 m，已知墙背承受的土压力 $F=137$ kN，并且与铅垂线成夹角 $\alpha=45.7°$，浆砌石的密度为 2.35 kg/m^3，其他尺寸如图所示。试取 1 m 长的墙体作为计算对象，计算出作用在截面 AB 上 A 点和 B 点处的正应力。又砌体的许用压应力$[\sigma_c]$为 3.5 MPa，许用拉应力$[\sigma_t]$为 0.14 MPa，试作强度校核。

8－13　试确定图示十字形截面的截面核心边界。

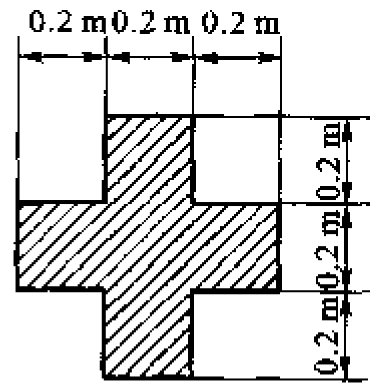
8－14　试确定图示各截面的截面核心边界。

8－15　曲拐受力如图示，其圆杆部分的直径 $d=50$ mm。试画出表示 A 点处应力状态的单元体，并求其主应力及最大切应力。

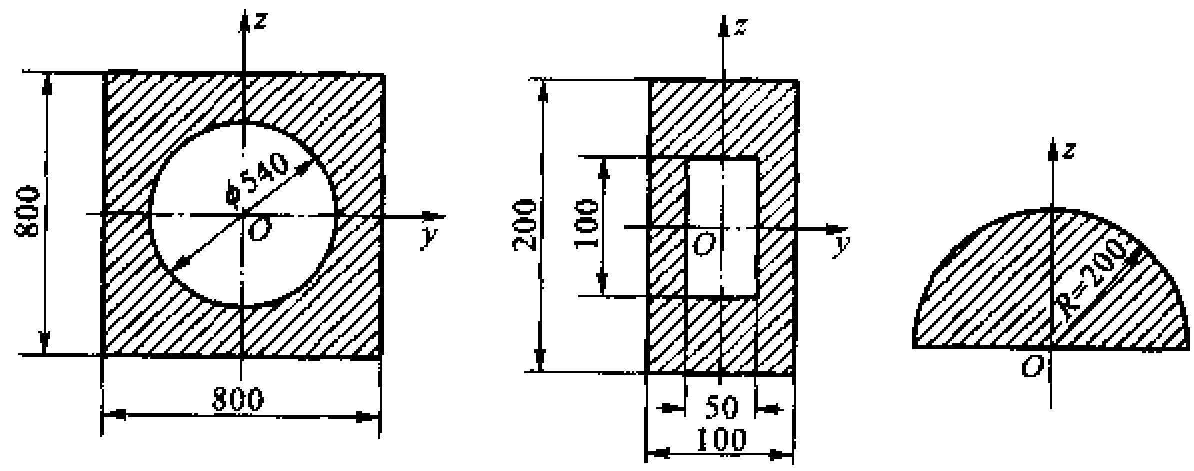
8－16　铁道路标圆信号板，装在外径 $D = 60$ mm 的空心圆柱上，所受的最大风载 $p = 2$ kN/m^2，$[\sigma] = 60$ MPa。试按第三强度理论选定空心柱的厚度。



习题 8－12 图

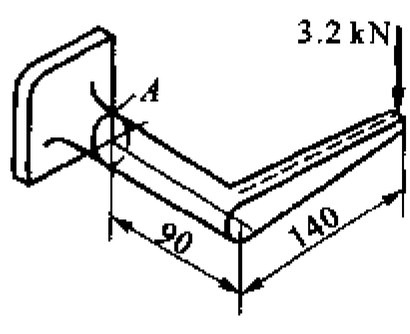


习题 8－13 图

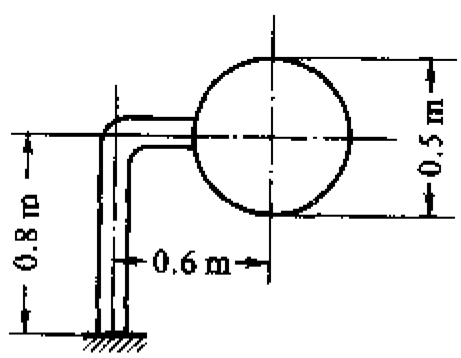


(a)　(b)　(c)

习题 8－14 图



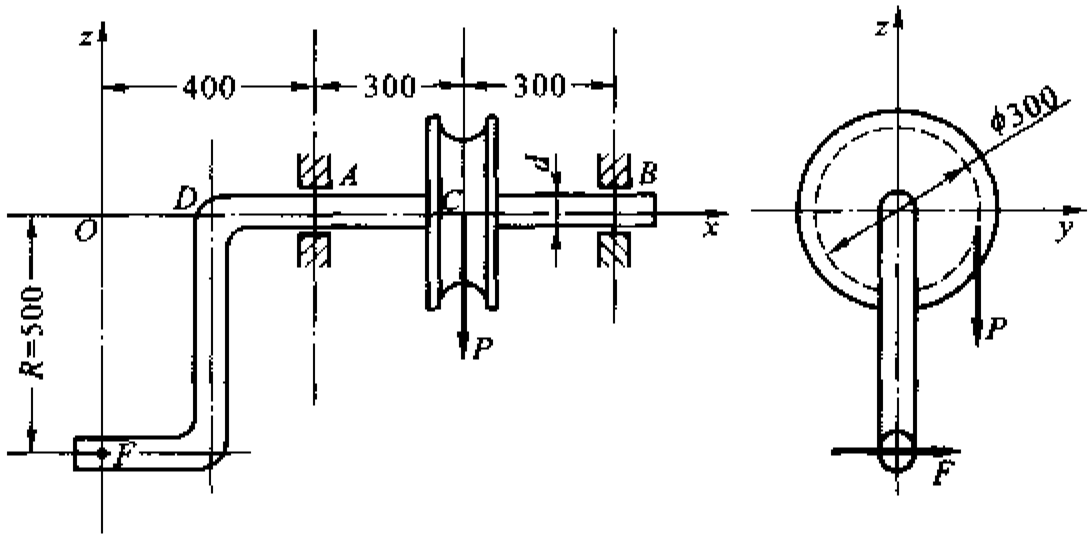
习题 8－15 图



习题 8－16 图

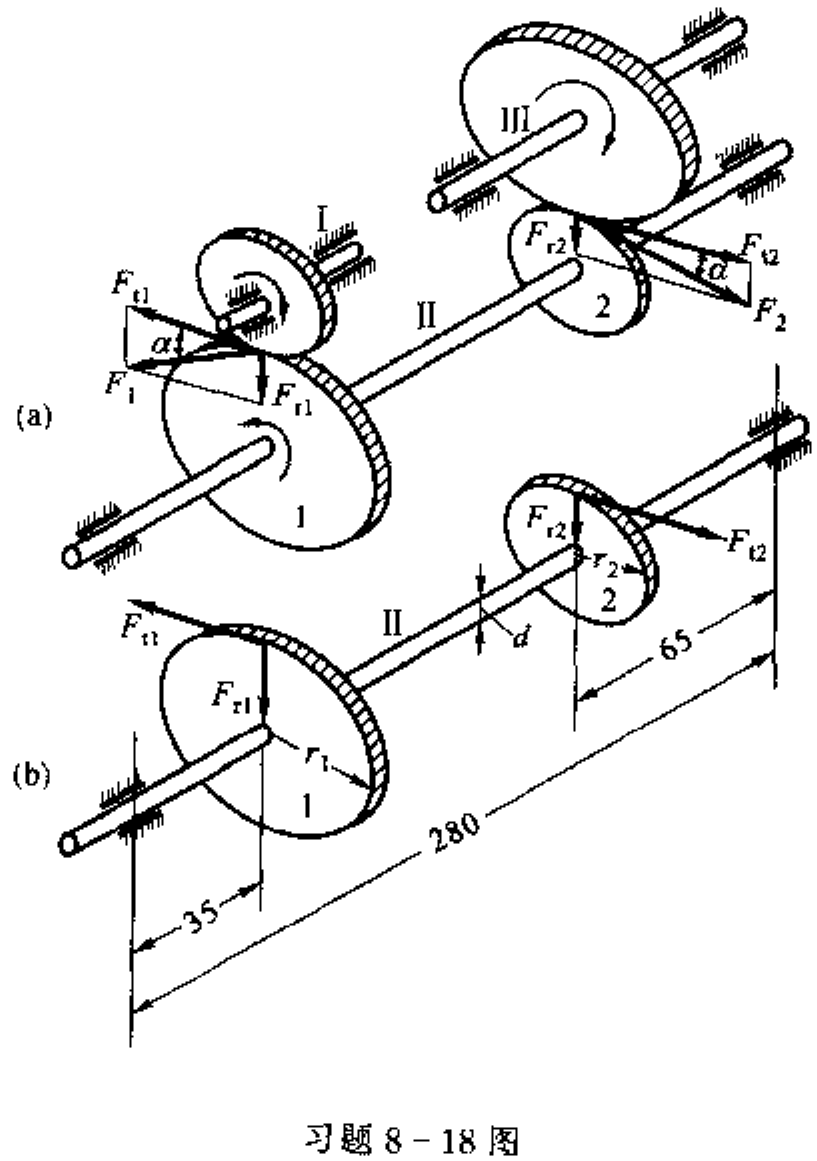
8－17　一手摇绞车如图所示。已知轴的直径 $d = 25$ mm，材料为 Q235 钢，其许用应力 $[\sigma] = 80$ MPa。试按第四强度理论求绞车的最大起吊重量 P。

8－18　图 a 所示的齿轮传动装置中，第 II 轴的受力情况及尺寸如图 b 所示。轴上大齿



习题 8-17 图

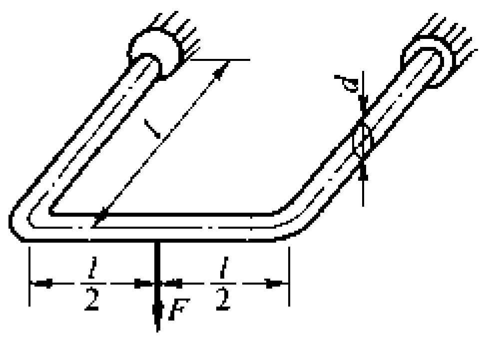
轮 1 的半径 $r_1 = 85$ mm，受周向力 F_{t1} 和径向力 F_{r1} 作用，且 $F_{r1} = 0.364F_{t1}$；小齿轮 2 的半径 $r_2 = 32$ mm，受周向力 F_{t2} 和径向力 F_{r2} 作用，且 $F_{r2} = 0.364F_{t2}$。已知轴工作时传递的功率 $P = 73.5$ kW，转速 $n = 2\ 000$ r/min，轴的材料为合金钢，其许用应力 $[\sigma] = 150$ MPa。试按第三强度理论计算轴的直径。



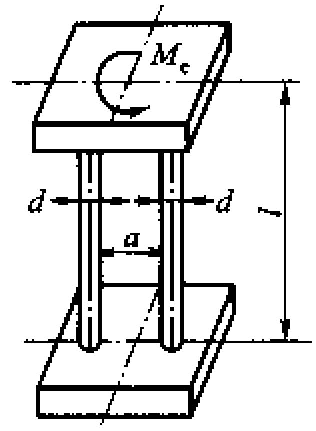
习题 8-18 图

*8-19　一框架由直径为 d 的圆截面杆组成，受力如图所示。试给出各杆危险截面上危险点处单元体上的应力状态。

*8－20 两根直径为 d 的立柱，上、下端分别与强劲的顶、底块刚性连接，并在两端承受外扭转力偶矩 M_e，如图所示。试分析杆的受力情况，绘出内力图，并写出强度条件的表达式。

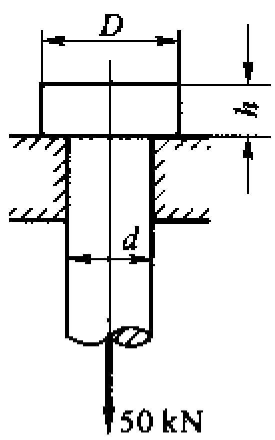


习题 8－19 图

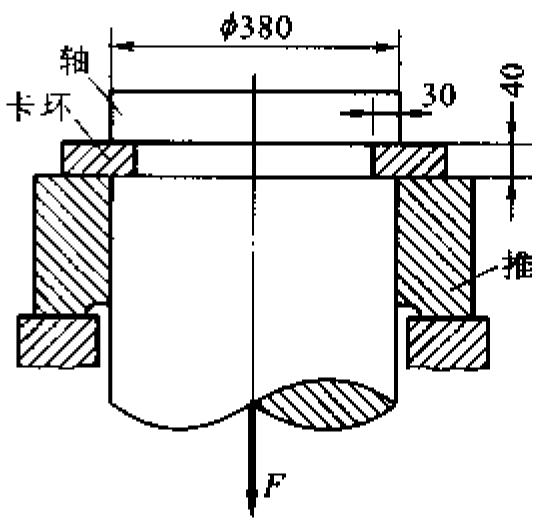


习题 8－20 图

8－21 试校核图示拉杆头部的剪切强度和挤压强度。已知图中尺寸 $D = 32$ mm，$d = 20$ mm 和 $h = 12$ mm，杆的许用切应力 $[\tau] = 100$ MPa，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 240$ MPa。



习题 8－21 图



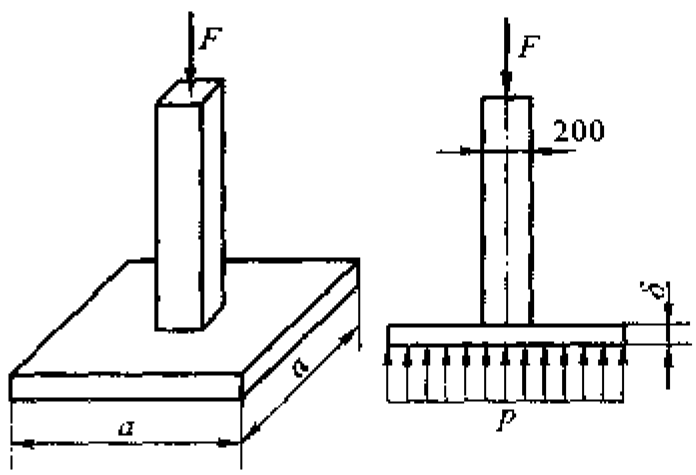
习题 8－22 图

8－22 水轮发电机组的卡环尺寸如图所示。已知轴向荷载 $F = 1\ 450$ kN，卡环材料的许用切应力 $[\tau] = 80$ MPa，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 150$ MPa。试对卡环进行强度校核。

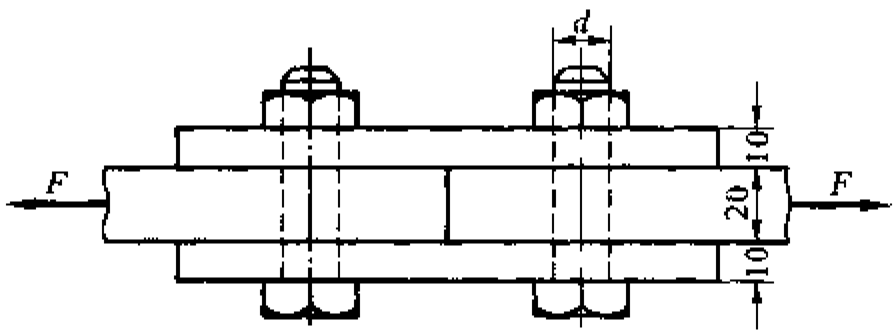
8－23 正方形截面的混凝土柱，其横截面边长为 200 mm，其基底为边长 $a = 1$ m 的正方形混凝土板，柱承受轴向压力 $F = 100$ kN，如图所示。假设地基对混凝土板的支反力为均匀分布，混凝土的许用切应力为 $[\tau] = 1.5$ MPa，试问为使柱不穿过板，混凝土板所需的最小厚度 δ 应为多少？

8－24 图示一螺栓接头。已知 $F = 40$ kN，螺栓的许用切应力 $[\tau] = 130$ MPa，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 300$ MPa。试计算螺栓所需的直径。

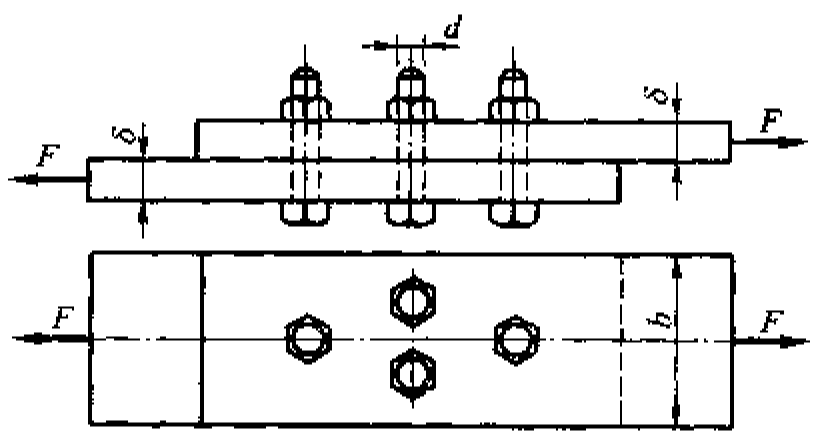
8－25 拉力 $F = 80$ kN 的螺栓连接如图所示。已知 $b = 80$ mm，$\delta = 10$ mm，$d = 22$ mm，螺栓的许用切应力 $[\tau] = 130$ MPa，钢板的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 300$ MPa，许用拉应力 $[\sigma] =$



习题 8－23 图



习题 8－24 图



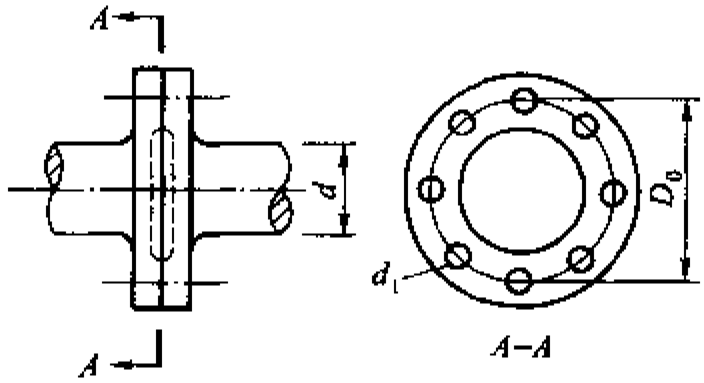
习题 8－25 图

170 MPa。试校核接头的强度。

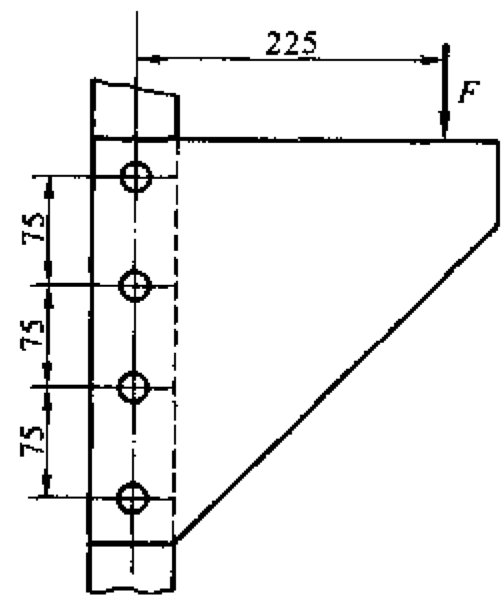
8－26　两直径 $d=100$ mm 的圆轴，由凸缘和螺栓连接，共有 8 个螺栓布置在 $D_0=200$ mm 的圆周上，如图所示。已知轴在扭转时的最大切应力为 70 MPa，螺栓的许用切应力$[\tau]=60$ MPa。试求螺栓所需的直径 d_1。

8－27　一托架如图所示。已知外力 $F=35$ kN，铆钉的直径 $d=20$ mm，铆钉与钢板为搭接。试求最危险的铆钉剪切面上切应力的数值及方向。

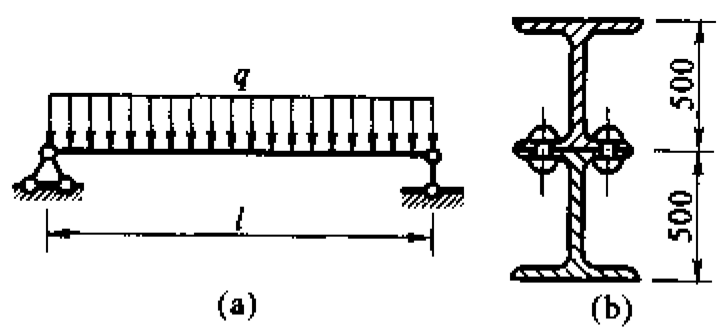
8－28　跨长 $l=11.5$ m 的临时桥的主梁，由两根 50b 号工字钢相叠铆接而成(图 b)。梁受均布载荷 q 作用，能够在许用正应力$[\sigma]=165$ MPa 下工作。已知铆钉直径 $d=23$ mm，许用切应力$[\tau]=95$ MPa，试按剪切强度条件计算铆钉间的最大间距 s。



习题 8-26 图

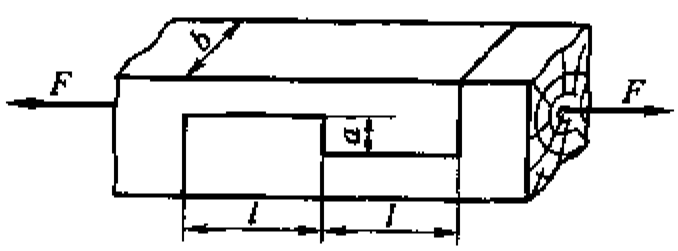


习题 8-27 图



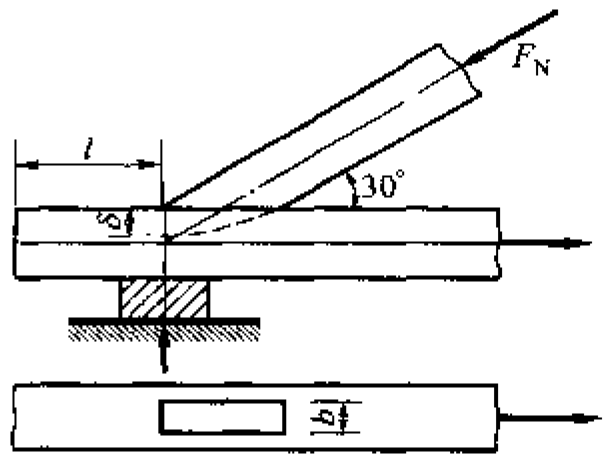
习题 8-28 图

*8-29 矩形截面木拉杆的榫接头如图所示。已知轴向拉力 $F=50$ kN，截面宽度 $b=250$ mm，木材的顺纹许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=10$ MPa，顺纹许用切应力 $[\tau]=1$ MPa。试求接头处所需的尺寸 l 和 a。



习题 8-29 图

*8-30 在木桁架的支座部位，斜杆以宽度 $b=60$ mm 的榫舌和下弦杆连接在一起，如图所示。已知木材斜纹许用压应力 $[\sigma_c]_{30^\circ}=5$ MPa，顺纹许用切应力 $[\tau]=0.8$ MPa，作用在桁架斜杆上的压力 $F_N=20$ kN。试按强度条件确定榫舌的高度 δ（即榫接的深度）和下弦杆末端的长度 l。



习题 8-30 图

第九章　压杆稳定

§9－1　压杆稳定性的概念

在轴向拉伸(压缩)杆件的强度计算中，只需其横截面上的正应力不超过材料的许用应力，就从强度上保证杆件的正常工作。但在实际结构中，受压杆件的横截面尺寸一般都较按强度条件算出的为大，且其横截面的形状往往与梁的横截面形状相仿。例如，钢桁架桥上弦杆(压杆)的截面(图 9－1a)、厂房钢柱的截面(图 9－1b)等。其原因可由一个简单的实验来加以说明。

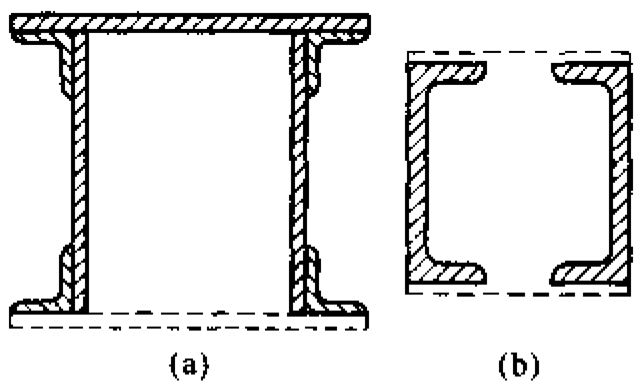


图 9－1

取一根长为 300 mm 的钢板尺，其横截面尺寸为 20 mm×1 mm。若钢的许用应力为$[\sigma]=196$ MPa，则按强度条件算得钢尺所能承受的轴向压力应为

$$F=(196\times10^6\ \mathrm{Pa})(20\times10^{-3}\ \mathrm{m}\times1\times10^{-3}\ \mathrm{m})=3\,920\ \mathrm{N}=3.92\ \mathrm{kN}$$

但若将钢尺竖立在桌上，用手压其上端，则当压力不到 40 N 时，钢尺就被明显压弯。显然，这个压力较 3.92 kN 小两个数量级。当钢尺被明显压弯时，就不可能再承担更大的压力。由此可见，钢尺的承载能力并不取决于轴向压缩的压缩强度，而是与钢尺受压时变弯有关。为此需提高压杆的弯曲刚度。同理，将一张平的卡片纸竖放在桌上，其自重就可能使其变弯。但若把纸片折成类似于角钢的形状，就须在其顶端放上一个轻砝码，才能使其变弯。而若将纸片卷成圆筒形，则虽放上一个轻砝码，也不能使其变弯。这就表明，压杆是否变弯，与杆横截面的弯曲刚度有关。而且，实际的压杆在制造时其轴线不可避免地会存在初曲率，作用在压杆上的外力的合力作用线也不可能毫无偏差地与杆的轴线相重合，压杆的材料本身也不可避免地存在不均匀性。这些因素都可能使压杆在外压力作

用下除发生轴向压缩变形外，还发生附加的弯曲变形。为便于说明问题，可将这些因素用外压力的偏心来模拟。压杆在偏心压力作用下，即使偏心距很小，压杆的次要变形——弯曲变形也有可能随着压力的增大而加速增长，并逐渐转化为主要变形，从而导致压杆丧失承载能力。

如上所述，实际压杆受压力作用时，将会发生不同程度的压弯现象。但在对压杆的承载能力进行理论研究时，通常将压杆抽象为由均质材料制成、轴线为直线且外压力作用线与压杆轴线重合的理想"中心受压直杆"的力学模型。在这一力学模型中，由于不存在使压杆产生弯曲变形的初始因素，因此，在轴向压力下就不可能发生弯曲现象。为此，在分析中心受压直杆时，当压杆承受轴向压力(图9-2a中的力F)后，假想地在杆上施加一微小的横向力(图9-2a中的力F')，使杆发生弯曲变形，然后撤去横向力。实验表明，当轴向力不大时，撤去横向力后，杆的轴线将恢复其原来的直线平衡形态(图9-2b)，则压杆在直线形态下的平衡是稳定的平衡；当轴向力增大到一定的界限值时，撤去横向力后，杆的轴线将保持弯曲的平衡形态，而不再恢复其原有的直线平衡形态(图9-2c)，则压杆原来在直线形态下的平衡是不稳定的平衡。中心受压直杆在直线形态下的平衡，由稳定平衡转化为不稳定平衡时所受轴向压力的界限值，称为**临界压力**，或简称**临界力**，并用F_{cr}表示。中心受压直杆在临界力F_{cr}作用下，其直线形态的平衡开始丧失稳定性，简称为**失稳**。

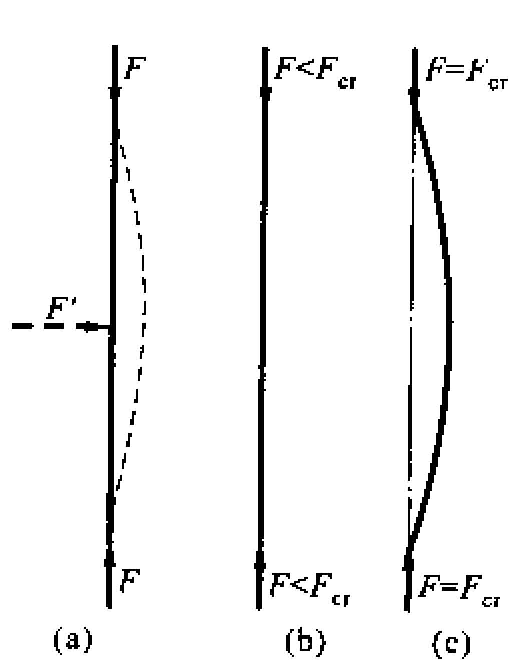


图 9-2

必须指出，通常所说的压杆的稳定性及其在临界力F_{cr}作用下的失稳，是就中心受压直杆的力学模型而言的。对于实际的压杆，由于存在前述几种导致压杆受压时弯曲的因素，通常可用偏心受压直杆作为其力学模型。实际压杆的平衡稳定性问题是在偏心压力作用下，杆的弯曲变形是否会出现急剧增大而丧失正常的承载能力。关于这类问题，将在《材料力学(II)》的第四章中详加讨论。

压杆失稳的概念在中心受压直杆的力学模型中与在偏心受压直杆的力学模型中是截然不同的。本章主要以中心受压直杆这一力学模型为对象，来研究压杆平衡稳定性的问题及其临界力F_{cr}的计算。

§9-2 细长中心受压直杆临界力的欧拉公式

细长的中心受压直杆在临界力作用下，处于不稳定平衡的直线形态下，其材

料仍处于理想的线弹性范围内，这类稳定问题称为线弹性稳定问题。

现以两端球形铰支、长度为 l 的等截面细长中心受压直杆(图 9－3a)为例，推导其临界力的计算公式。由前所述，中心受压直杆在临界力作用下将在微弯形态下维持平衡。假设压杆的轴线在临界力 F_{cr} 作用下呈图 9－3a 中所示的曲线形态。此时，压杆任一 x 截面沿 y 方向的挠度为 $w=f(x)$，该截面上的弯矩(图 9－3b)为

$$M(x)=F_{cr}w \tag{a}$$

弯矩的正负号仍按 §4－2 中的规定，压力 F_{cr} 取为正值，挠度 w 以沿 y 轴正值方向者为正。

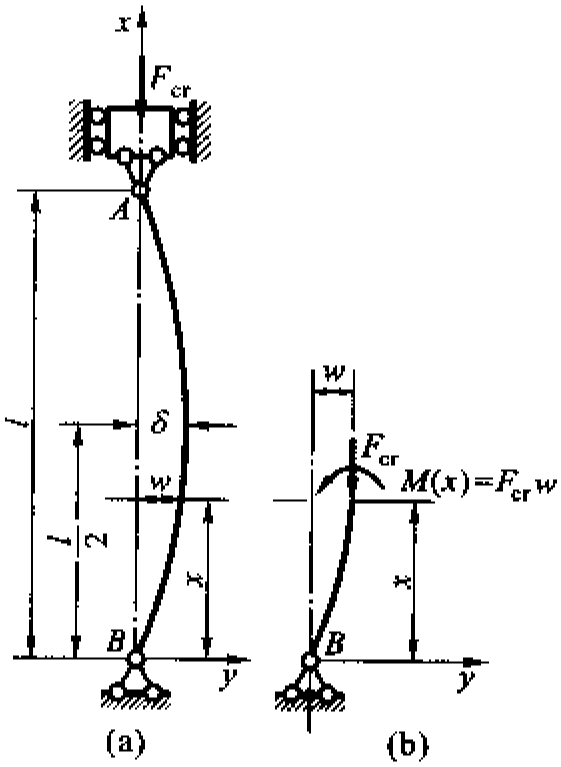


图 9－3

将弯矩 $M(x)$ 代入式(5－2)可得挠曲线的近似微分方程为

$$EIw''=-M(x)=-F_{cr}w \tag{b}$$

其中 I 为压杆横截面的最小形心主惯性矩。

将上式两端均除以 EI，并令

$$\frac{F_{cr}}{EI}=k^2 \tag{c}$$

则式(b)可改写为二阶常系数线性微分方程：

$$w''+k^2w=0 \tag{d}$$

其通解为

$$w=A\sin kx+B\cos kx \tag{e}$$

式中，A、B 和 k 三个待定常数可用挠曲线的边界条件确定。

由 $x=0, w=0$ 的边界条件，可得 $B=0$。由 $x=\frac{l}{2}, w=\delta$(δ 为挠曲线中点的挠度)的边界条件，可得

$$A=\frac{\delta}{\sin(kl/2)}$$

最后，由常数 A，B 及 $x=l, w=0$ 的边界条件，得

$$0=\frac{\delta}{\sin(kl/2)}\sin kl=2\delta\cos(kl/2) \tag{f}$$

上式仅在 $\delta=0$ 或 $\cos(kl/2)=0$ 时才能成立。显然，若 $\delta=0$，则压杆的轴线并非微弯的挠曲线。欲使压杆在微弯形态下维持平衡，必须有

$$\cos\frac{kl}{2}=0 \tag{g}$$

即得

$$\frac{kl}{2}=\frac{n\pi}{2}\qquad(n=1,3,5,\cdots)$$

其最小解为 $n=1$ 时的解，于是

$$kl=\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}}\,l=\pi \tag{h}$$

即得

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{9-1}$$

上式即两端球形铰支（简称两端铰支）等截面细长中心受压直杆临界力 F_{cr} 的计算公式。由于上式最早由欧拉(L. Euler)导出，所以，通常称为**欧拉公式**。

在 $kl=\pi$ 的情况下，$\sin(kl/2)=\sin(\pi/2)=1$，故由常数 A，B 及式(e)可知，挠曲线方程为

$$w=\delta\sin\frac{\pi x}{l} \tag{i}$$

即挠曲线为半波正弦曲线。

应该指出，在以上求解过程中，挠曲线中点挠度 δ 是个无法确定的值，即不论 δ 为任何微小值，上述平衡条件都能成立，似乎压杆受临界力作用时可以在微弯形态下处于随遇平衡（或"中性平衡"）的状态。事实上这种随遇平衡状态是不成立的，δ 值之所以无法确定，是因在推导过程中使用了挠曲线的近似微分方程。

若采用挠曲线的精确微分方程

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{M(x)}{EI}=-\frac{F_{cr}w}{EI} \tag{j}$$

将该式两边对 s 取导数，并注意到 $\frac{dw}{ds}=\sin\theta$，其中 θ 为挠曲线的转角，则有

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}=-\frac{F_{cr}}{EI}\sin\theta \tag{k}$$

由上式可解得挠曲线中点的挠度 δ 与压力 F 之间的近似关系式为[①]

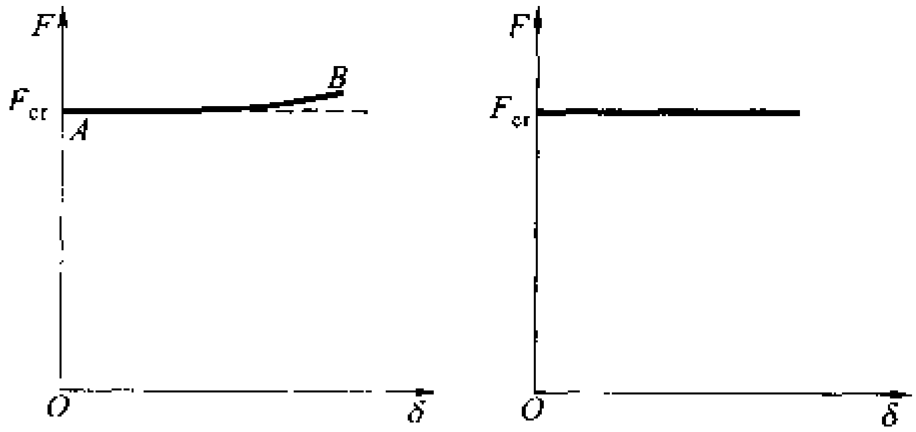
$$\delta=\frac{2\sqrt{2}l}{\pi}\sqrt{\frac{F}{F_{cr}}-1}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{F}{F_{cr}}-1\right)\right] \tag{l}$$

式(l)可用图 9-4a 中的曲线 AB 来表示，即曲线在 A 点处的切线是水平的；当 $F\geqslant F_{cr}$ 时，压杆在微弯平衡形态下，压力 F 与挠度 δ 间存在一一对应的关系。

---

① 详细推导过程可参看 Timoshenko, S. Theory of Elastic Stability, p. 70~74, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1936.

而由挠曲线近似微分方程得出的 $F-\delta$ 关系如图 9-4b 所示，即当 $F=F_{cr}$ 时，压杆在微弯形态下，呈现随遇平衡的特征。



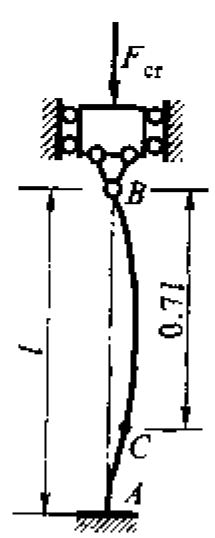
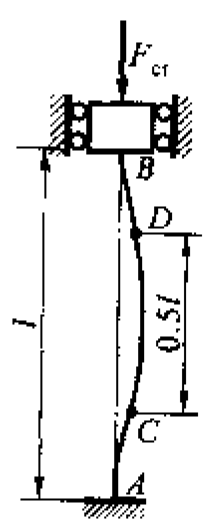
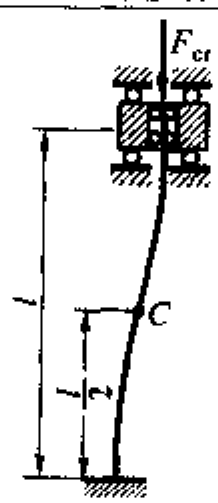
(a) (b)

图 9-4

§9-3 不同杆端约束下细长压杆临界力的欧拉公式·压杆的长度因数

不同杆端约束下细长中心受压直杆的临界力表达式，可通过类似的方法推导。本节给出几种典型的理想支承约束条件下，细长中心受压直杆的欧拉公式表达式（表 9-1）。

表 9-1 各种支承约束条件下等截面细长压杆临界力的欧拉公式

支端情况	两端铰支	一端固定另端铰支	两端固定	一端固定另端自由	两端固定但可沿横向相对移动
失稳时挠曲线形状		 C—挠曲线拐点	 C，D—挠曲线拐点		 C—挠曲线拐点
临界力 F_{cr} 欧拉公式	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$F_{cr}\approx\frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$
长度因数 μ	$\mu=1$	$\mu\approx0.7$	$\mu=0.5$	$\mu=2$	$\mu=1$

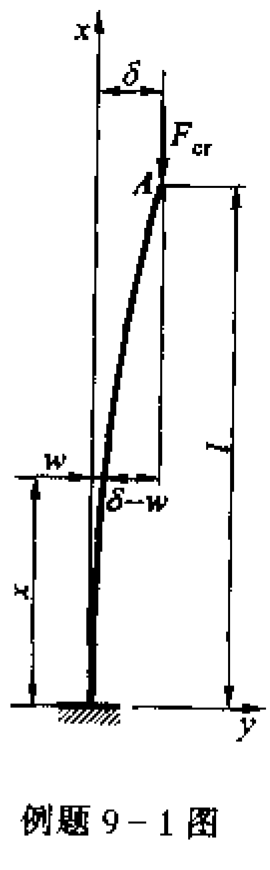
由表9-1所给的结果可以看出，中心受压直杆的临界力 F_{cr} 受到杆端约束情况的影响。杆端约束越强，杆的抗弯能力就越大，其临界力也就越高。对于各种杆端约束情况，细长中心受压等直杆临界力的欧拉公式可写成统一的形式：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \tag{9-2}$$

式中，因数 μ 称为压杆的**长度因数**，与杆端的约束情况有关。μl 称为原压杆的**相当长度**，其物理意义可从表9-1中各种杆端约束下细长压杆失稳时挠曲线形状的比拟来说明：由于压杆失稳时挠曲线上拐点处的弯矩为零，故可设想拐点处有一铰，而将压杆在挠曲线两拐点间的一段看作为两端铰支压杆，并利用两端铰支压杆临界力的欧拉公式(9-1)，得到原支承条件下压杆的临界力 F_{cr}。这两拐点之间的长度，即为原压杆的相当长度 μl。或者说，相当长度为各种支承条件下的细长压杆失稳时，挠曲线中相当于半波正弦曲线的一段长度。

应当注意，细长压杆临界力的欧拉公式(9-1)或(9-2)中，I 是横截面对某一形心主惯性轴的惯性矩。若杆端在各个方向的约束情况相同(如球形铰等)，则 I 应取最小的形心主惯性矩。若杆端在不同方向的约束情况不同(如柱形铰)，则 I 应取挠曲时横截面对其中性轴的惯性矩。在工程实际问题中，支承约束程度与理想的支承约束条件总有所差异，因此，其长度因数 μ 值应根据实际支承的约束程度，以表9-1作为参考来加以选取。在有关的设计规范中，对各种压杆的 μ 值多有具体的规定。

例题9-1 图示一下端固定、上端自由并在自由端受轴向压力作用的等直细长压杆，杆长为 l。在临界力作用下，杆失稳时有可能在 xy 平面内维持微弯状态下的平衡，其弯曲刚度为 EI。试推导其临界力 F_{cr} 的欧拉公式，并求压杆的挠曲线方程。



例题9-1图

解：根据杆端约束情况，杆在临界力 F_{cr} 作用下的挠曲线形状如图所示。最大挠度 δ 发生在杆的自由端。由临界力引起的杆任意 x 横截面上的弯矩为

$$M(x) = -F_{cr}(\delta - w) \tag{1}$$

式中，w 为该横截面处杆的挠度。将式(1)代入杆的挠曲线近似微分方程即得

$$EIw'' = -M = F_{cr}(\delta - w) \tag{2}$$

将式(2)移项，并简化后得

$$w'' + k^2 w = k^2 \delta \tag{3}$$

式中，$k^2=\dfrac{F_{cr}}{EI}$。微分方程的通解为

$$w = A\sin kx + B\cos kx + \delta \tag{4}$$

上式中的待定常数 A,B,k 可由挠曲线的边界条件确定：

在 $x=0$ 处，　　$w=0$，　$w'=0$

在 $x=l$ 处，　　$w=\delta$

将式(4)取一阶导数后可得

$$w' = Ak\cos kx - Bk\sin kx \tag{5}$$

将边界条件 $x=0$、$w'=0$ 代入式(5)，得 $A=0$。再将边界条件 $x=0$，$w=0$ 代入式(4)，得 $B=-\delta$。于是，式(4)可写作

$$w = \delta(1-\cos kx) \tag{6}$$

最后将边界条件 $x=l$，$w=\delta$ 代入式(6)，即得

$$\delta = \delta(1-\cos kl) \tag{7}$$

能使挠曲线成立的条件为

$$\cos kl = 0 \tag{8}$$

从而得到

$$kl = n\pi/2 \quad (n=1,3,5,\cdots) \tag{9}$$

由其最小解 $kl=\dfrac{\pi}{2}$，即得压杆临界力 F_{cr} 的欧拉公式为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \tag{10}$$

以 $k=\dfrac{\pi}{2l}$ 代入式(6)，即得此压杆的挠曲线方程为

$$w = \delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)$$

式中，δ 为杆自由端的微小挠度，其值不定。

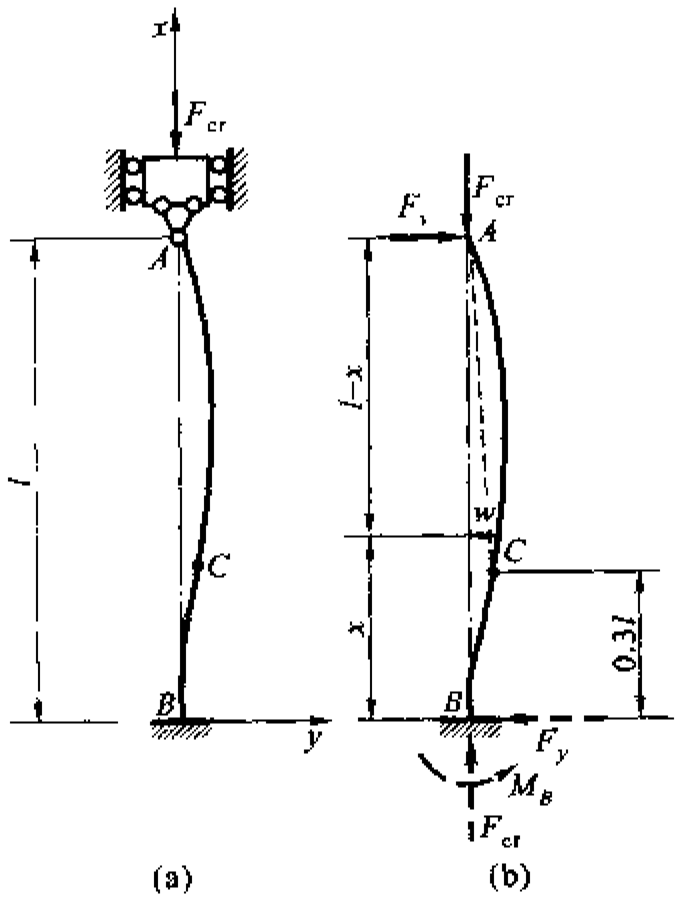
例题 9－2　图 a 示一下端固定、上端铰支、长度为 l 的细长中心受压等直杆，杆的弯曲刚度为 EI。试推导其临界力 F_{cr} 的欧拉公式，并求压杆的挠曲线方程。

解：在临界力 F_{cr} 作用下，根据压杆的约束情况，其挠曲线形状将如图所示。在上端支承处，除临界力 F_{cr} 外将有水平力 F_y 作用(图 b)。因此，杆的任意 x 横截面上的弯矩为

$$M(x) = F_{cr}w - F_y(l-x) \tag{1}$$

将 $M(x)$ 代入杆的挠曲线近似微分方程，并经简化后，即得

$$w'' + k^2 w = k^2\frac{F_y}{F_{cr}}(l-x) \tag{2}$$



例题 9-2 图

式中，$k^2=\dfrac{F_{cr}}{EI}$。微分方程的通解为

$$w = A\sin kx + B\cos kx + \frac{F_y}{F_{cr}}(l-x) \tag{3}$$

其一阶导数为

$$w' = Ak\cos kx - Bk\sin kx - \frac{F_y}{F_{cr}} \tag{4}$$

由挠曲线在固定端处的边界条件 $x=0, w'=0$，可得

$$A = \frac{F_y}{kF_{cr}} \tag{5}$$

又由边界条件 $x=0, w=0$，可得

$$B = -\frac{F_y l}{F_{cr}} \tag{6}$$

将(5)，(6)两式中的 A，B 代入式(3)，即得

$$w = \frac{F_y}{F_{cr}}\left[\frac{1}{k}\sin kx - l\cos kx + (l-x)\right] \tag{7}$$

由铰支端处的边界条件 $x=l, w=0$，得

$$\frac{F_y}{F_{cr}}\left(\frac{1}{k}\sin kl - l\cos kl\right) = 0 \tag{8}$$

杆在微弯状态下平衡时 F_y 不可能等于零，于是必须有

$$\frac{1}{k}\sin kl - l\cos kl = 0 \tag{9}$$

即

$$\tan kl = kl \tag{10}$$

由此解得[①]

$$kl = 4.49 \tag{11}$$

从而得到压杆临界力 F_{cr} 的欧拉公式为

$$F_{cr} = \frac{(4.49)^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \tag{12}$$

将式(11)中的 $k = \frac{4.49}{l}$ 代入式(7)，可得压杆的挠曲线方程为

$$w = \frac{F_y l}{F_{cr}}\left[\frac{\sin kx}{4.49} - \cos kx + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] \tag{13}$$

§9-4 欧拉公式的应用范围·临界应力总图

在推导中心受压直杆临界力的欧拉公式时，假定材料是在线弹性范围内工作的，因此，压杆在临界力 F_{cr} 作用下的应力不得超过材料的比例极限 σ_p，否则，挠曲线的近似微分方程不能成立，也就不可能得到压杆临界力的欧拉公式。由此可见，压杆临界力的欧拉公式有其一定的应用范围。

一、欧拉公式的应用范围

当压杆受临界力 F_{cr} 作用而在直线平衡形态下维持不稳定平衡时，横截面上的压应力可按公式 $\sigma = \frac{F}{A}$ 计算。于是，各种支承情况下压杆横截面上的应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l/i)^2} \tag{9-3}$$

式中，σ_{cr} 称为**临界应力**；$i = \sqrt{I/A}$ 为压杆横截面对中性轴的惯性半径，μl 为压杆的相当长度，两者的比值（$\mu l/i$）为一量纲为一的参数，称为压杆的**长细比**或**柔度**。其值越大，相应的 σ_{cr} 值就越小，即压杆越容易失稳。压杆的柔度记为 λ，即

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \tag{9-4}$$

于是，式(9-3)可写作

① 利用三角函数表，可求得 $\tan\theta = \theta$ 的最小非零解为 $\theta = 4.49$。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{9-5}$$

按前面的分析可知,只有在 $\sigma_{cr} \leqslant \sigma_p$ 的范围内[①],才可用欧拉公式(9-2)计算压杆的临界力。于是,欧拉公式的应用范围可表示为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_p$$

或写作

$$\lambda \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \lambda_p \tag{9-6}$$

式中,λ_p 为能够应用欧拉公式的压杆柔度的界限值。通常称 $\lambda \geqslant \lambda_p$ 的压杆为**大柔度压杆**,或**细长压杆**。而当压杆的柔度 $\lambda < \lambda_p$ 时,就不能应用欧拉公式,通常称其为**小柔度压杆**。这一界限值 λ_p 的大小取决于压杆材料的力学性能。例如,对于 Q235 钢,可取 $E = 206$ GPa,$\sigma_p = 200$ MPa,则由式(9-6)可得

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{206 \times 10^9\ \text{Pa}}{200 \times 10^6\ \text{Pa}}} \approx 100$$

因而,由 Q235 钢制成的压杆,只有当其柔度 $\lambda \geqslant 100$ 时才能按欧拉公式计算其临界力。

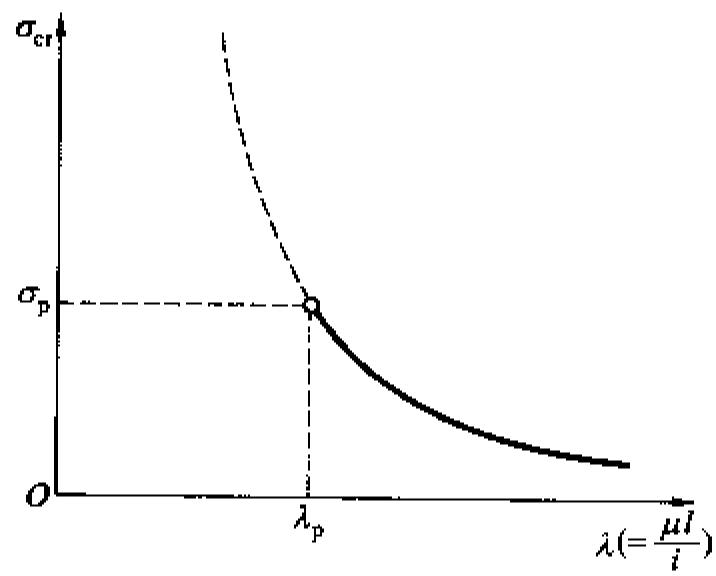


图 9-5

将式(9-5)所示压杆临界应力 σ_{cr} 与压杆柔度 λ 间的关系用曲线来表示,如图 9-5 中的双曲线所示,称为**欧拉临界应力曲线**。显然,图中的实线部分是欧

① 严格地说,应该是在 $\sigma_{max} \leqslant \sigma_p$ 的范围内才可应用欧拉公式。这里,σ_{max} 是压杆在 F_{cr} 作用下处于微弯平衡形态时危险截面上的最大压应力,其值可按下式求得:

$$\sigma_{max} = \frac{F_{cr}}{A} + \frac{F_{cr}\delta}{W}$$

拉公式适用范围内的曲线，而虚线部分则无意义，因为当 $\lambda<\lambda_p$ 时，$\sigma_{cr}>\sigma_p$，欧拉公式已不再适用。

*二、折减弹性模量理论

工程中所采用的压杆绝大多数不是大柔度压杆。这类压杆的临界力的理论分析和实验研究是工程应用中最为关心的。下面简要地介绍折减弹性模量理论的基本思路。

以两端铰支并将在 xy 平面内发生弯曲的矩形截面压杆为例来说明。图 9－6a 为材料在压缩时的应力－应变曲线，当应力超过材料的比例极限 σ_p 时，$\sigma-\varepsilon$ 间的关系就从线性转化为非线性。在大于比例极限 σ_p 的某一应力水平下，加载时可将 $\sigma-\varepsilon$ 曲线的切线斜率视为该应力水平时的弹性模量，称为**切线弹性模量**，并用 E_σ 表示。而卸载时的弹性模量则由卸载规律可知，与初始直线段的弹性模量 E 相同。对于所研究的 $\lambda<\lambda_p$ 的中心受压直杆，其临界应力 σ_{cr} 已超过材料的比例极限 σ_p。注意到在临界力 F_{cr} 作用下，压杆从不稳定的直线平衡形态转到微弯的平衡形态时，在杆的横截面上对应于弯曲变形的受压侧，压应力要比 $\sigma_{cr}=F_{cr}/A$ 稍大，而在对应于受拉侧的压应力，则比 σ_{cr} 略有减小，如图 9－6b 所示。因此，当压杆从直线变到微弯的平衡形态时，在横截面上附加弯曲正应力为压应力的部分，材料的弹性模量应用加载的切线弹性模量 E_σ，而在横截面上附加弯曲正应力为拉应力的部分，则应用卸载弹性模量 E。由弯曲变形的平面假设可知，压杆在弯曲时横截面上各点处的纵向线应变 ε 沿 y 轴按线性规律变化，$\varepsilon=y/\rho$。根据以上所述分别利用 E_σ 及 E，即可得到横截面上对应于弯曲变形的受压区和受拉区内弯曲正应力的表达式：

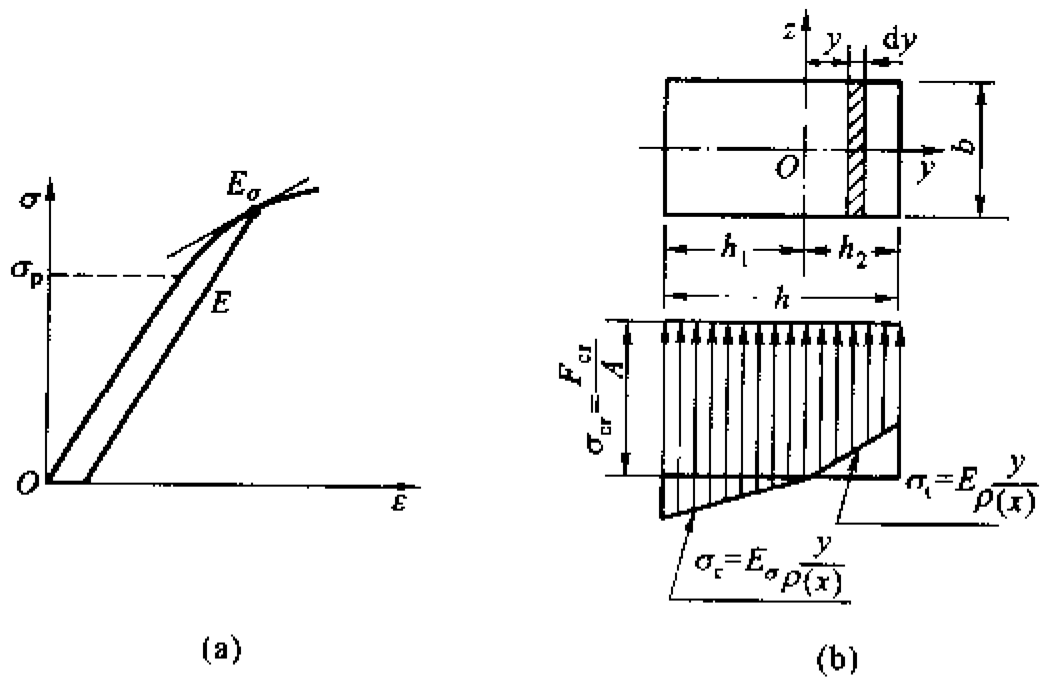


图 9－6

$$\begin{aligned}&\text{受压区} && \sigma_c = E_\sigma \frac{y}{\rho(x)}\\ &\text{受拉区} && \sigma_t = E \frac{y}{\rho(x)}\end{aligned}\qquad \text{(a)}$$

式中，$\rho(x)$为微弯挠曲线的曲率半径。

根据式(a)所示的横截面上附加弯曲正应力表达式，可仿照§4-4中的两个静力条件式(d)和(f)，确定弯曲时的中性轴位置(不通过横截面形心)，并得到经简化后的弯矩表达式为

$$\frac{I}{\rho(x)}\left[\frac{4E_\sigma E}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_\sigma})^2}\right] = M(x) \qquad \text{(b)}$$

式中，$I=\frac{bh^3}{12}$为横截面对形心轴 z 的惯性矩。在上式中令

$$\frac{4E_\sigma E}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_\sigma})^2} = E_r \qquad (9-7)$$

并称 E_r 为**折减弹性模量**。于是，式(b)可简写为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E_r I} \qquad \text{(c)}$$

这样，对于柔度 $\lambda<\lambda_p$ 的压杆，临界力 F_{cr}的表达式可仿照欧拉公式(9-1)写作

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{l^2} \qquad (9-8)$$

从而，在 $\sigma_{cr}>\sigma_p$ 情况下，不同杆端约束时压杆临界应力 σ_{cr}的普遍表达式为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{(\mu l/i)^2} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \qquad (9-9)$$

按上式所得的 $\sigma_{cr}-\lambda$ 关系曲线，如图9-7中 $\sigma_{cr}>\sigma_p$(即 $\lambda<\lambda_p$)范围内的实线所示。

应该指出，折减弹性模量 E_r 的表达式(9-7)仅适用于矩形截面。对于其他形状截面的压杆，E_r 的表达式并不相同，因而，相应的 $\sigma_{cr}-\lambda$ 关系曲线也不同。图9-7中的另两条曲线分别表示T形和工字形截面在 $\sigma_{cr}>\sigma_p$时的 $\sigma_{cr}-\lambda$ 关系曲线。

三、压杆的临界应力总图

由上述讨论可知，中心受压直杆的临界应力 σ_{cr}的计算与压杆的柔度 $\lambda=\mu l/i$ 有关。对于 $\lambda\geqslant\lambda_p$ 的大柔度压杆，临界应力可按欧拉公式(9-5)计算。对于 $\lambda\leqslant\lambda_p$ 的小柔度压杆，其临界应力的计算有很多不同的观点，折减弹性模量理论仅是其中之一。当压杆的柔度很小时，按折减弹性模量求得的临界应力值，

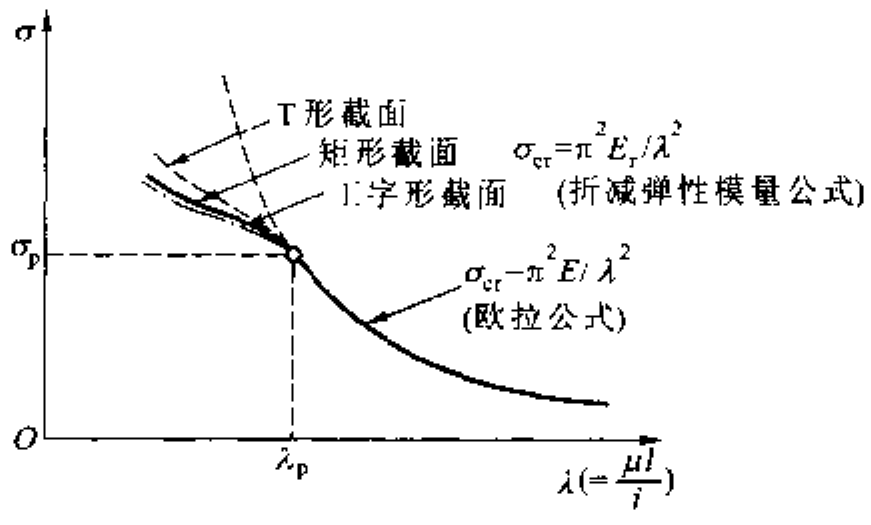


图 9-7

有可能超过材料的屈服极限 σ_s,这时,就应以屈服极限 σ_s 作为压杆的临界应力 σ_{cr}。综上所述,在不同 λ 范围内,压杆的临界应力 σ_{cr} 与柔度 λ 间的关系图线如图 9-8 所示,图 9-8 称为压杆的**临界应力总图**。

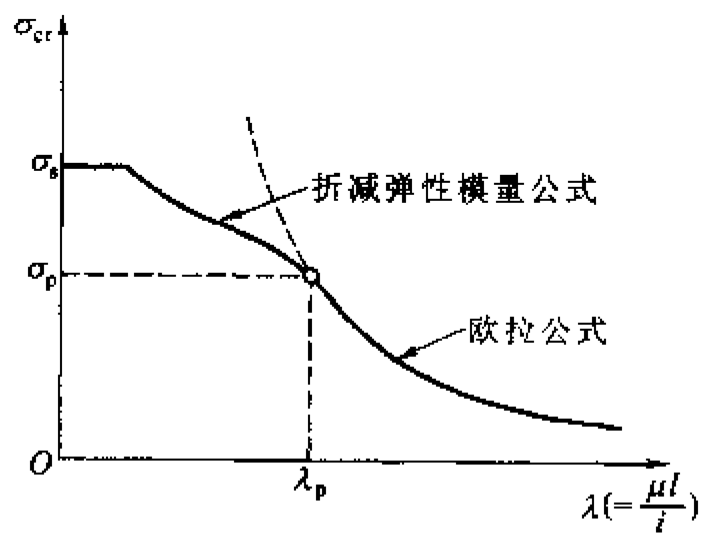


图 9-8

§9-5 实际压杆的稳定因数

如前所述,实际压杆可能存在杆件的初曲率、压力的偏心度以及截面上的残余应力等不利因素,降低压杆的临界应力。然而,压杆所能承受的极限应力总是随压杆的柔度而改变的,柔度越大,极限应力值越低。因此,设计压杆时所用的许用应力也应随压杆柔度的增大而减小。在压杆设计中,将压杆的稳定许用应力 $[\sigma]_{st}$ 写作材料的强度许用应力 $[\sigma]$ 乘以一个随压杆柔度 λ 而改变的**稳定因数** $\varphi=\varphi(\lambda)$,即

$$[\sigma]_{st}=\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}=\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}[\sigma]}[\sigma]=\varphi[\sigma] \tag{9-10}$$

以反映压杆的稳定许用应力随压杆柔度改变的这一特点。在稳定因数 $\varphi=\varphi(\lambda)$ 中，也考虑了压杆的稳定安全因数 n_{st} 随压杆柔度而改变的因素。

我国钢结构设计规范根据国内常用构件的截面形式、尺寸和加工条件，规定了相应的残余应力变化规律，并考虑了 $l/1\,000$ 的初曲率，计算了 96 根压杆的稳定因数 φ 与柔度 λ 间的关系值，然后把承载能力相近的截面归并为 a,b,c 三类，根据不同材料的屈服强度分别给出 a,b,c 三类截面在不同柔度 λ 下的 φ 值（对于 Q235 钢，a,b 类截面的稳定因数 φ 如表 9-2,9-3 所示），以供压杆设计时参考。其中 a 类的残余应力影响较小，稳定性较好，c 类的残余应力影响较大，基本上多数情况可取作 b 类。

对于木制压杆的稳定因数 φ 值，我国木结构设计规范按照树种的强度等级分别给出了两组计算公式：

树种强度等级为 TC17,TC15 及 TB20 时，

$\lambda\leqslant 75$
$$\varphi=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\lambda}{80}\right)^2} \tag{9-11a}$$

$\lambda>75$
$$\varphi=\frac{3\,000}{\lambda^2} \tag{9-11b}$$

树种强度等级为 TC13,TC11,TB17 及 TB15 时，

$\lambda\leqslant 91$
$$\varphi=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\lambda}{65}\right)^2} \tag{9-12a}$$

$\lambda>91$
$$\varphi=\frac{2\,800}{\lambda^2} \tag{9-12b}$$

在式(9-11)和(9-12)中，λ 为压杆的柔度。关于树种强度等级，TC17 有柏木、东北落叶松等；TC15 有红杉、云杉等；TC13 有红松、马尾松等；TC11 有西北云杉、冷杉等；TB20 有栎木、桐木等；TB17 有水曲柳等；TB15 有栲木、桦木等。代号后的数字为树种的弯曲强度(MPa)。

例题 9-3 图示长 3 m、两端球铰支承的中心受压直杆，由两根 110 mm×70 mm×7 mm 角钢通过缀条及缀板联成整体，并符合钢结构设计规范中的实腹式 b 类截面中心受压杆的要求。已知该杆材料为 Q235 钢，其强度许用应力为 $[\sigma]=170$ MPa。试求压杆的稳定许用应力。

解：计算组合截面的惯性矩。从型钢表上查得有关截面的几何性质，分别算出组合截面对其形心主轴 y,z 的惯性矩为

$I_z=2(153\times10^4\ \text{mm}^4)=306\times10^4\ \text{mm}^4$

$I_y=2[49.01\times10^4\ \text{mm}^4+(1\,230\ \text{mm}^2)(23.6\ \text{mm})^2]=235\times10^4\ \text{mm}^4$

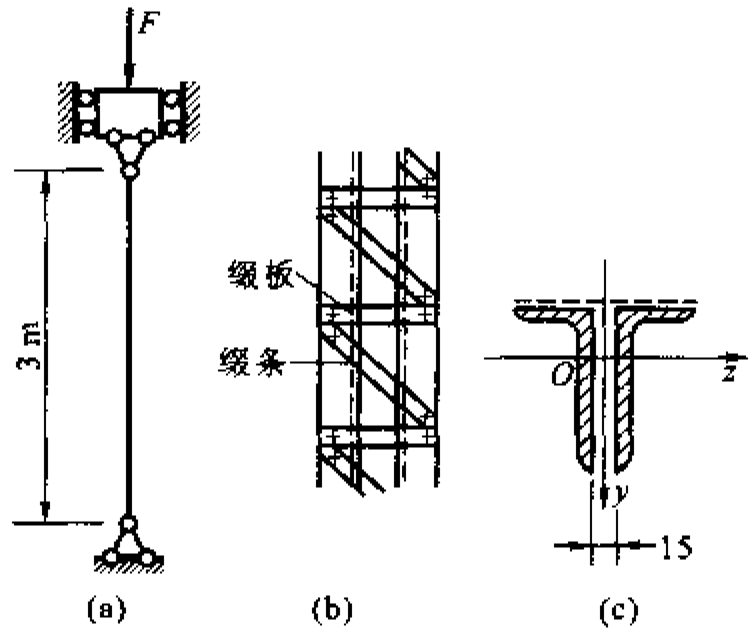
确定压杆柔度值。由于 $I_z>I_y$，说明压杆的弱轴为 y，强轴为 z，故应当以

表 9-2 Q235 钢 a 类截面中心受压直杆的稳定因数 φ

λ	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996
10	0.995	0.994	0.993	0.992	0.991	0.989	0.988	0.986	0.985	0.983
20	0.981	0.979	0.977	0.976	0.974	0.972	0.970	0.968	0.966	0.964
30	0.963	0.961	0.959	0.957	0.955	0.952	0.950	0.948	0.946	0.944
40	0.941	0.939	0.937	0.934	0.932	0.929	0.927	0.924	0.921	0.919
50	0.916	0.913	0.910	0.907	0.904	0.900	0.897	0.894	0.890	0.886
60	0.883	0.879	0.875	0.871	0.867	0.863	0.858	0.851	0.849	0.844
70	0.830	0.834	0.829	0.824	0.818	0.813	0.807	0.801	0.795	0.789
80	0.788	0.776	0.770	0.763	0.757	0.750	0.743	0.736	0.728	0.721
90	0.714	0.706	0.699	0.691	0.684	0.676	0.668	0.661	0.653	0.645
100	0.638	0.630	0.622	0.615	0.607	0.600	0.592	0.585	0.577	0.570
110	0.563	0.555	0.548	0.541	0.534	0.527	0.520	0.514	0.507	0.500
120	0.494	0.488	0.481	0.475	0.469	0.463	0.457	0.451	0.445	0.440
130	0.434	0.429	0.423	0.418	0.412	0.407	0.402	0.397	0.392	0.387
140	0.383	0.378	0.373	0.369	0.364	0.360	0.356	0.351	0.347	0.343
150	0.339	0.335	0.331	0.327	0.323	0.320	0.316	0.312	0.309	0.305
160	0.302	0.298	0.295	0.292	0.289	0.285	0.282	0.279	0.276	0.273
170	0.270	0.267	0.264	0.262	0.259	0.256	0.253	0.251	0.248	0.246
180	0.243	0.241	0.238	0.236	0.233	0.231	0.229	0.226	0.224	0.222
190	0.220	0.218	0.215	0.213	0.211	0.209	0.207	0.205	0.203	0.201
200	0.199	0.198	0.196	0.194	0.192	0.190	0.189	0.187	0.185	0.183
210	0.182	0.180	0.179	0.177	0.175	0.174	0.172	0.171	0.169	0.168
220	0.166	0.165	0.164	1.162	0.161	0.159	0.158	0.157	0.155	0.154
230	0.150	0.152	0.150	0.149	0.148	0.147	0.146	0.144	0.143	0.142
240	0.141	0.140	0.139	0.138	0.136	0.135	0.134	0.133	0.132	0.131
250	0.130									

表 9－3　Q235 钢 b 类截面中心受压直杆的稳定因数 φ

λ	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.994
10	0.992	0.991	0.989	0.987	0.985	0.983	0.981	0.978	0.976	0.973
20	0.970	0.967	0.963	0.960	0.957	0.953	0.950	0.946	0.943	0.939
30	0.936	0.932	0.929	0.925	0.922	0.918	0.914	0.910	0.906	0.903
40	0.899	0.895	0.891	0.887	0.882	0.878	0.874	0.870	0.865	0.861
50	0.856	0.852	0.847	0.842	0.838	0.833	0.828	0.823	0.818	0.813
60	0.807	0.802	0.797	0.791	0.786	0.780	0.774	0.769	0.763	0.757
70	0.751	0.745	0.739	0.732	0.726	0.720	0.714	0.707	0.701	0.694
80	0.688	0.681	0.675	0.668	0.661	0.655	0.648	0.641	0.635	0.628
90	0.621	0.614	0.608	0.601	0.594	0.588	0.581	0.575	0.568	0.561
100	0.555	0.549	0.542	0.536	0.529	0.523	0.517	0.511	0.505	0.499
110	0.493	0.487	0.481	0.475	0.470	0.464	0.458	0.453	0.447	0.442
120	0.437	0.432	0.426	0.421	0.416	0.411	0.406	0.402	0.397	0.392
130	0.387	0.383	0.378	0.374	0.370	0.365	0.361	0.357	0.353	0.349
140	0.345	0.341	0.337	0.333	0.329	0.326	0.322	0.318	0.315	0.311
150	0.308	0.304	0.301	0.298	0.265	0.291	0.288	0.285	0.282	0.279
160	0.276	0.273	0.270	0.267	0.265	0.262	0.259	0.256	0.254	0.251
170	0.249	0.246	0.244	0.241	0.239	0.236	0.234	0.232	0.229	0.227
180	0.225	0.223	0.220	0.218	0.216	0.214	0.212	0.210	0.208	0.206
190	0.204	0.202	0.200	0.198	0.197	0.195	0.193	0.191	0.190	0.188
200	0.186	0.184	0.183	0.181	0.180	0.178	0.176	0.175	0.173	0.172
210	0.170	0.169	0.167	0.166	0.165	0.163	0.162	0.160	0.159	0.158
220	0.156	0.155	0.154	0.153	0.151	0.150	0.149	0.148	0.146	0.145
230	0.144	0.143	0.142	0.141	0.140	0.138	0.137	0.136	0.135	0.134
240	0.133	0.132	0.131	0.130	0.129	0.128	0.127	0.126	0.125	0.124
250	0.123									



例题 9-3 图

与 y 轴对应的惯性半径 i_y 来计算其柔度值[①]，即

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{235\times10^4\ \text{mm}^4}{2\times(1\ 230\ \text{mm}^2)}}=30.9\ \text{mm}$$

$$\lambda_y=\frac{\mu l}{i_y}=\frac{1\times3\ \text{m}}{30.9\times10^{-3}\ \text{m}}=97$$

计算稳定许用应力。根据柔度 $\lambda=97$，由表 9－3 查得 $\varphi=0.575$，代入式 (9－10)，即得压杆的稳定许用应力为

$$[\sigma]_{st}=\varphi[\sigma]=0.575\times170\ \text{MPa}=97.8\ \text{MPa}$$

§9－6 压杆的稳定计算·压杆的合理截面

如上所述，压杆的稳定条件可表达为

$$\frac{F}{A}\leqslant\varphi[\sigma] \tag{9-13a}$$

通常改写为

$$\frac{F}{\varphi A}\leqslant[\sigma] \tag{9-13b}$$

式中，F 为压杆承受的轴向压力；φ 为压杆的稳定因数；A 为压杆的横截面面积，当压杆由于钉孔等原因而使横截面有局部削弱时，由于压杆的临界力是根据整杆的失稳来确定的，所以在稳定计算中不必考虑局部截面削弱的影响，而以毛

① 对于具有单对称轴截面和角钢及其组合截面的压杆柔度的计算，在钢结构设计规范中有具体规定，这里未作考虑。

面积进行计算。但在强度计算中，应按局部被削弱的净面积进行计算；[σ]为压杆材料的许用压应力。对于木材，[σ]应为顺纹压缩许用应力。

在稳定计算中，若已知压杆的材料、杆长和杆端约束条件，而需选择压杆的截面尺寸时，由于压杆的稳定因数 φ(或柔度 λ)受截面形状和大小的影响，通常需采用试算法。实际上，利用稳定因数表，这种试算法也并不很困难，如例题 9-5 所示。

关于压杆的合理截面，由于压杆的稳定性与其柔度有关，而柔度 λ 与截面的最小惯性半径 i 成反比，因此，对于各个方向的杆端约束条件相同的压杆，要求截面对两形心主惯性轴的惯性半径相等：$i_y=i_z$(即 $I_y=I_z$)，且尽可能增大截面的 i 值。例如，面积相等的方形截面(图 9-9a)与矩形截面(图 9-9b)相比较，由于矩形截面的 i_y 小于方形截面的 i，故方形截面的压杆较为合理。又如面积相同的空心圆截面(图 9-9d)与实心圆截面(图 9-9c)相比较，由于空心圆截面的 i 值必大于实心圆截面的 i 值，显然空心圆截面的压杆较为合理。因而，压杆多采用空心截面或型钢组合截面。而在选用型钢组合截面时，一般宜采用薄腹板的型号(即型钢 a，b，c 三型中的 a 型)，例如图 9-9e 中两个槽钢的组合截面，25a 槽钢的 $i_z=9.823$ 就大于 25c 号槽钢的 $i_z=9.065$。至于组合截面对 y 轴的柔度，则可调整其间距 h 以达到 $\lambda_y\approx\lambda_z$，而充分发挥材料的作用。应该注意，当采用薄壁截面或组合截面时，需注意其局部稳定性。

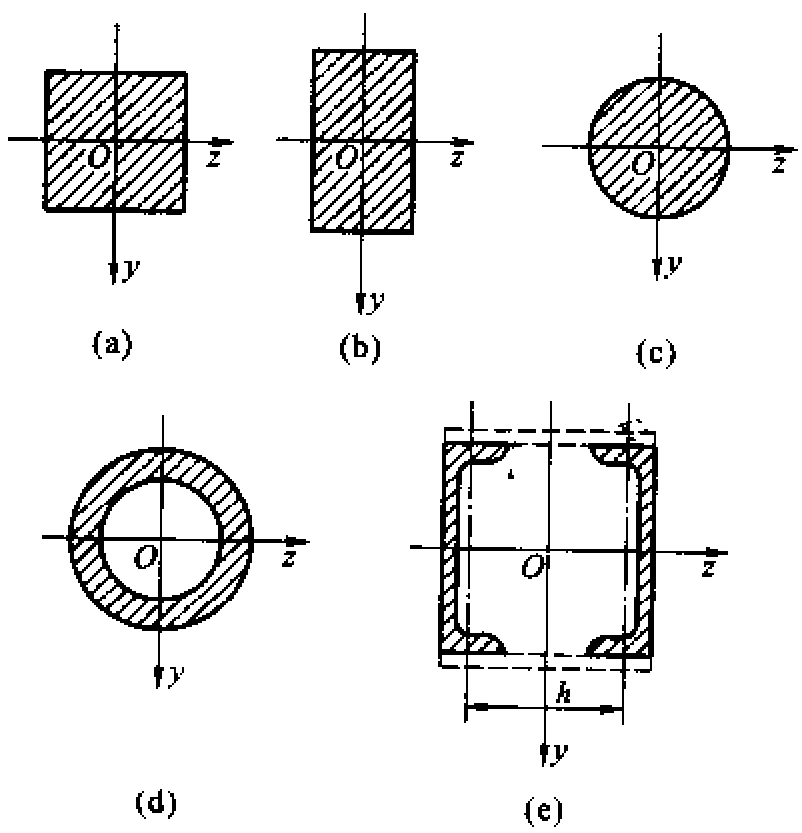
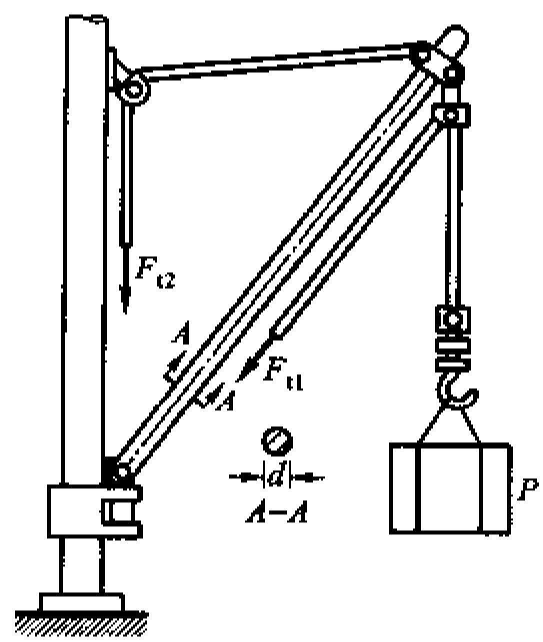


图 9-9

对于各个方向的杆端约束条件不同(例如柱形铰)的压杆,为了充分发挥材料的作用,则要求截面对两形心主惯性轴的 i 值不同,以使两柔度大致相等,即 $\lambda_y \approx \lambda_z$。

例题 9-4 一强度等级为 TC13 的圆松木,长 6 m,中径为 300 mm,其强度许用应力为 10 MPa。现将圆木用来当作起重用的扒杆(见图),试计算圆木所能承受的许可压力值。



例题 9-4 图

解:在图示平面内,若扒杆在轴向压力作用下失稳,则杆的轴线将弯成半个正弦波,长度因数可取为 $\mu=1$。于是,其柔度为

$$\lambda = \frac{\mu i}{i} = \frac{1\times 6\text{m}}{\frac{1}{4}\times(0.3\text{ m})} = 80$$

根据 $\lambda=80$,按式(9-12a),求得木压杆的稳定因数为

$$\varphi = \frac{1}{1+\left(\frac{\lambda}{65}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{80}{65}\right)^2} = 0.398$$

从而可求得圆木所能承受的许可压力为

$$[F] = \varphi[\sigma]A = 0.398\times(10\times10^6\text{ Pa})\times\frac{\pi}{4}\times(0.3\text{ m})^2 = 281.3\text{ kN}$$

如果扒杆的上端在垂直于纸面的方向并无任何约束,则杆在垂直于纸面的平面内失稳时,只能视为下端固定而上端自由,即 $\mu=2$。于是,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2\times 6\text{ m}}{\frac{1}{4}\times(0.3\text{ m})} = 160$$

按式(9-12b)求得

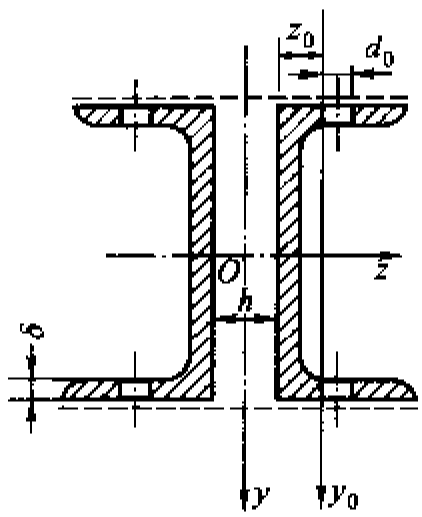
$$\varphi = \frac{2\,800}{\lambda^2} = \frac{2\,800}{160^2} = 0.109$$

$$[F] = \varphi[\sigma]A = 0.109\times(10\times10^6\text{ Pa})\times\frac{\pi}{4}\times(0.3\text{ m})^2 = 77\text{ kN}$$

显然,圆木作为扒杆使用时,所能承受的许可压力应为 77 kN,而不是 281.3 kN。

例题 9-5 厂房的钢柱长 7 m,上、下两端分别与基础和梁连接。由于与梁连接的一端可发生侧移,因此,根据柱顶和柱脚的连结刚度,钢柱的长度因数取为 $\mu=1.3$。钢柱由两根 Q235 钢的槽钢组成,符合钢结构设计规范中的实腹式 b 类截面中心受压杆的要求。在柱脚和柱顶处用螺栓借助于连结板与基础和梁

连接，同一横截面上最多有四个直径为 30 mm 的螺栓孔。钢柱承受的轴向压力为 270 kN，材料的强度许用应力为 $[\sigma]=170$ MPa。试为钢柱选择槽钢号码。



例题 9－5 图

解：(1) 按稳定条件选择槽钢号码。

在选择截面时，由于 $\lambda=\mu l/i$ 中的 i 不知道，λ 值无法算出，相应的稳定因数 φ 也就无法确定。于是，先假设一个 φ 值进行计算。

假设 $\varphi=0.50$，得到压杆的稳定许用应力为

$$[\sigma]_{st}=\varphi[\sigma]=0.50\times170\text{ MPa}=85\text{ MPa}$$

按稳定条件可算出每根槽钢所需的横截面面积为

$$A=\frac{F/2}{[\sigma]_{st}}=\frac{270\times10^3\text{ N}/2}{85\times10^6\text{ Pa}}=15.9\times10^{-4}\text{ m}^2$$

由型钢表查得，14a 号槽钢的横截面面积为 $A=18.51\text{ cm}^2$，$i_z=5.52$ cm。对于图示组合截面，由于 I_z 和 A 均为单根槽钢的两倍，故 i_z 值与单根槽钢截面的值相同。由 i_z 算得

$$\lambda=\frac{1.3\times7\text{ m}}{5.52\times10^{-2}\text{ m}}=165$$

由表 9－3 查出，Q235 钢压杆对应于柔度 $\lambda=165$ 的稳定因数为

$$\varphi=0.262$$

显然，前面假设的 $\varphi=0.50$ 过大，需重新假设较小的 φ 值再进行计算。但重新假设的 φ 值也不应采用 $\varphi=0.262$，因为降低 φ 后所需的截面面积必然加大，相应的 i_z 也将加大，从而使 λ 减小而 φ 增大。因此，试用 $\varphi=0.35$ 进行截面选择：

$$A=\frac{F/2}{\varphi[\sigma]}=\frac{270\times10^3\text{ N}/2}{0.35\times(170\times10^6\text{ Pa})}=22.7\times10^{-4}\text{ m}^2$$

试用 16 号槽钢：$A=25.15\text{ cm}^2$，$i_z=6.1$ cm，柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_z}=\frac{1.3\times7\text{ m}}{6.1\times10^{-2}\text{ m}}=149.2$$

与 λ 值对应的 φ 为 0.311，接近于试用的 $\varphi=0.35$。按 $\varphi=0.311$ 进行核算，以校核 16 号槽钢是否可用。此时，稳定许用应力为

$$[\sigma]_{st}=\varphi[\sigma]=0.311\times170\text{ MPa}=52.9\text{ MPa}$$

而钢柱的工作应力为

$$\sigma=\frac{F/2}{A}=\frac{270\times10^3\text{ N}/2}{25.15\times10^{-4}\text{ m}^2}=53.7\text{ MPa}$$

虽然工作应力略大于压杆的稳定许用应力，但仅超过

$$\frac{53.7\ \text{MPa} - 52.9\ \text{MPa}}{52.9\ \text{MPa}} = 1.5\%$$

这是允许的。

(2) 计算组合槽钢间距 h。

以上计算是根据横截面对于 z 轴的惯性半径 i_z 进行的，亦即考虑的是压杆在 xy 平面内的稳定性。为保证槽钢组合截面压杆在 xz 平面内的稳定性，须计算两槽钢的间距 h（见图）。假设压杆在 xy，xz 两平面内的长度因数相同，则应使槽钢组合截面对 y 轴的 i_y 与对 z 轴的 i_z 相等。由惯性矩平行移轴定理

$$I_y = I_{y_0} + A\left(z_0 + \frac{h}{2}\right)^2$$

可得

$$i_y^2 = i_{y_0}^2 + \left(z_0 + \frac{h}{2}\right)^2$$

16 号槽钢的 $i_{y_0} = 1.82\ \text{cm} = 18.2\ \text{mm}$，$z_0 = 1.75\ \text{cm} = 17.5\ \text{mm}$。令 $i_y = i_z = 61$ mm，可得

$$\frac{h}{2} = \sqrt{(61\ \text{mm})^2 - (18.2\ \text{mm})^2} - 17.5\ \text{mm} = 40.7\text{mm}$$

从而得到

$$h = 2 \times 40.7\ \text{mm} = 81.4\ \text{mm}$$

实际所用的两槽钢间距应不小于 81.4 mm。

组成压杆的两根槽钢是靠缀板（或缀条）将它们连接成整体的，为了防止单根槽钢在相邻两缀板间局部失稳，应保证其局部稳定性不低于整个压杆的稳定性。根据这一原则来确定相邻两缀板的最大间距。有关这方面的细节问题将在钢结构计算中讨论。

(3) 校核净截面强度。

被每个螺栓孔所削弱的横截面面积为

$$\delta d = 10\ \text{mm} \times 30\ \text{mm} = 300\ \text{mm}^2$$

因此，压杆横截面的净截面面积为

$$\begin{aligned} 2A - 4\delta d &= 2 \times 2\,515\ \text{mm}^2 - 4 \times 300\ \text{mm}^2 \\ &= 3\,830\ \text{mm}^2 \end{aligned}$$

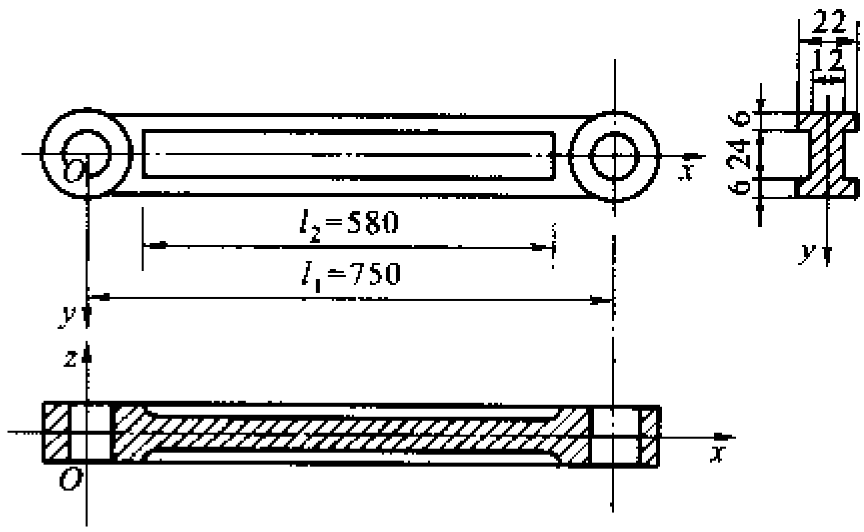
从而净截面上的压应力为

$$\sigma = \frac{F}{2A - 4\delta d} = \frac{270 \times 10^3\ \text{N}}{3.830 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = 70.5\ \text{MPa} < [\sigma]$$

由此可见，净截面的强度是足够的。

例题 9－6 由 Q235 钢加工成的工字形截面连杆，两端为柱形铰，即在 xy

平面内失稳时，杆端约束情况接近于两端铰支，长度因数 $\mu_z=1.0$；而在 xz 平面内失稳时，杆端约束情况接近于两端固定，$\mu_y=0.6$，如图所示。已知连杆在工作时承受的最大压力为 $F=35\ \text{kN}$，材料的强度许用应力 $[\sigma]=206\ \text{MPa}$，并符合钢结构设计规范中 a 类中心受压杆的要求。试校核其稳定性。



例题 9-6 图

解：横截面的面积和形心主惯性矩分别为

$$A=(12\ \text{mm})(24\ \text{mm})+2\times(6\ \text{mm})(22\ \text{mm})=552\ \text{mm}^2$$

$$I_z=\frac{(12\ \text{mm})(24\ \text{mm})^3}{12}+2\left[\frac{(22\ \text{mm})(6\ \text{mm})^3}{12}+(22\ \text{mm})(6\ \text{mm})(15\ \text{mm})^2\right]$$
$$=7.40\times10^4\ \text{mm}^4$$

$$I_y=\frac{(24\ \text{mm})(12\ \text{mm})^3}{12}+2\times\frac{(6\ \text{mm})(22\ \text{mm})^3}{12}=1.41\times10^4\ \text{mm}^4$$

横截面对 z 轴和 y 轴的惯性半径分别为

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{7.40\times10^4\ \text{mm}^4}{552\ \text{mm}^2}}=11.58\ \text{mm}$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{1.41\times10^4\ \text{mm}^4}{552\ \text{mm}^2}}=5.05\ \text{mm}$$

于是，连杆的柔度值为

$$\lambda_z=\frac{\mu_z l_1}{i_z}=\frac{1.0\times750\ \text{mm}}{11.58\ \text{mm}}=64.8$$

$$\lambda_y=\frac{\mu_y l_2}{i_y}=\frac{0.6\times580\ \text{mm}}{5.05\ \text{mm}}=68.9$$

在两柔度值中，应按较大的柔度值 $\lambda_y=68.9$ 来确定压杆的稳定因数 φ。由表 9-2，并用内插法求得

$$\varphi=0.849+\frac{9}{10}(0.844-0.849)=0.845$$

将 φ 值代人式(9－10),即得杆的稳定许用应力为

$$[\sigma]_{st} = \varphi[\sigma] = 0.845 \times 206\ \text{MPa} = 174\ \text{MPa}$$

将连杆的工作应力与稳定许用应力比较,可得

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{35 \times 10^3\ \text{N}}{552 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 63.4\ \text{MPa} < [\sigma]_{st}$$

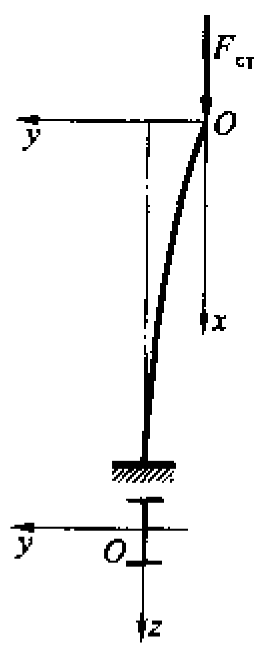
故连杆满足稳定性要求。

思　考　题

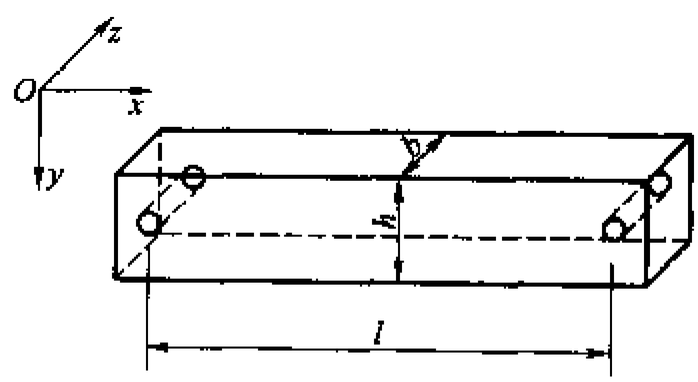
9－1　试问具有初曲率和荷载偶然偏心的拉杆,是否也存在丧失稳定的问题?

9－2　细长压杆在推导欧拉临界力时,是否与所选坐标有关?就下端固定、上端自由,并在自由端受轴向压力作用的等直细长压杆而言,若取坐标如图所示,试问能否推导出欧拉公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$



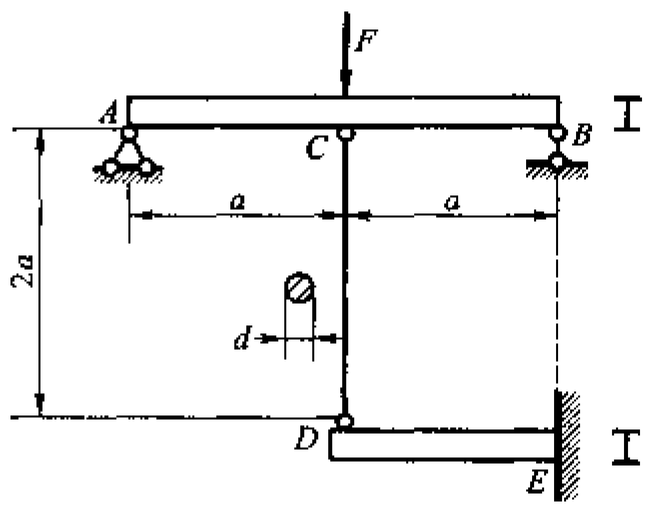
思考题 9－2 图



思考题 9－3 图

9－3　两端为柱形铰、受轴向压力作用的矩形截面杆如图所示。杆在 xy 平面内失稳时,杆端约束为两端铰支;在 xz 平面内失稳时,杆端约束可认为不能绕 y 轴转动。试问压杆的 b 与 h 的合理比值应为多大?

9－4　试分析图示结构在什么情况下会丧失承载能力,什么情况下不会丧失承载能力?若要计算该结构的许可荷载,则应从哪些方面考虑?



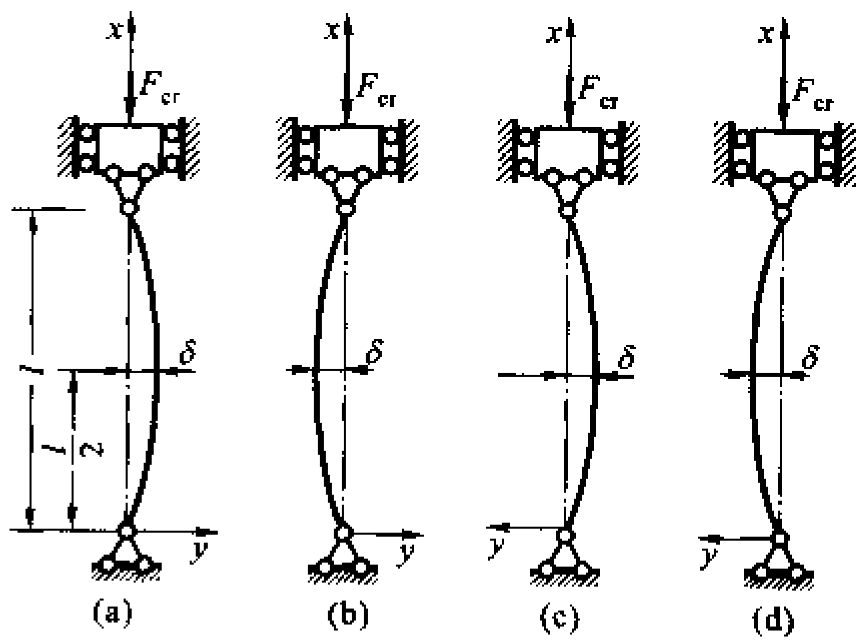
思考题 9－4 图

习 题

9－1 在§9－2中已对两端球形铰支的等截面细长压杆，按图a所示坐标系及挠曲线形状，导出了临界力公式

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

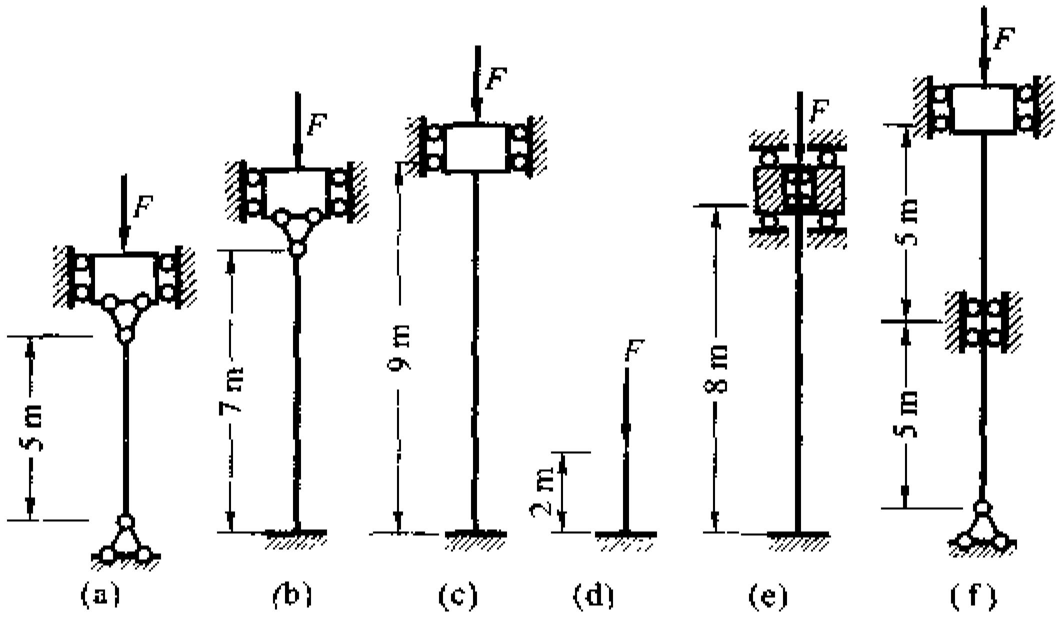
试分析当分别取图b,c,d所示坐标系及挠曲线形状时，压杆在 F_{cr} 作用下的挠曲线微分方程是否与图a情况下的相同，由此所得的 F_{cr} 公式又是否相同。



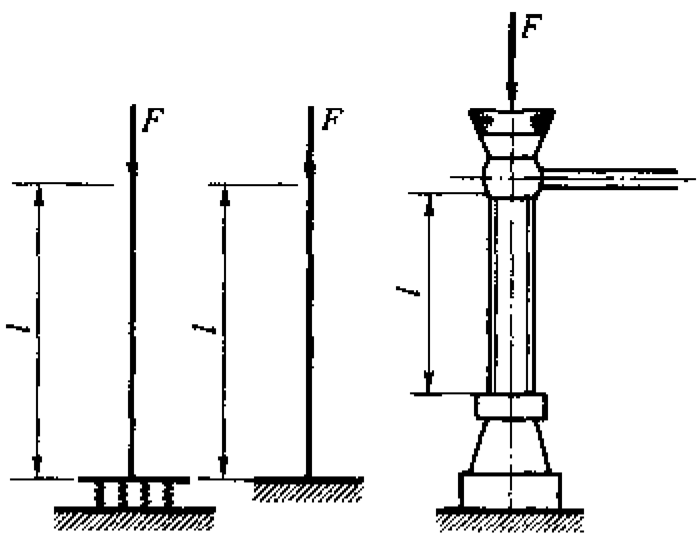
习题 9－1 图

9－2 图示各杆材料和截面均相同，试问杆能承受的压力哪根最大，哪根最小(图f所示杆在中间支承处不能转动)?

9－3 图a,b所示的两细长杆均与基础刚性连接，但第一根杆(图a)的基础放在弹性地基上，第二根杆(图b)的基础放在刚性地基上。试问两杆的临界力是否均为 $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2}$?



习题 9－2 图



习题 9－3 图

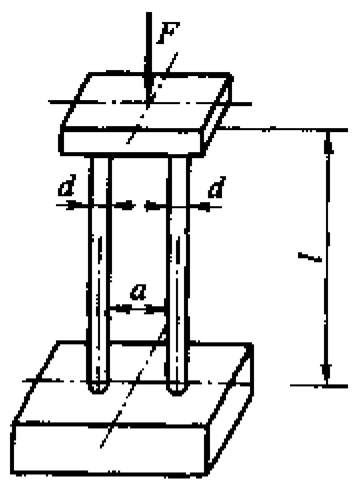
为什么？并由此判断压杆长度因数 μ 是否可能大于 2

螺旋千斤顶(图 c)的底座对丝杆(起顶杆)的稳定性有无影响？校核丝杠稳定性时，把它看作下端固定(固定于底座上)、上端自由、长度为 l 的压杆是否偏于安全？

9－4 试推导两端固定、长为 l 的等截面中心受压直杆的临界力 F_{cr} 的欧拉公式。

9－5 长 5 m 的 10 号工字钢，在温度为 0 ℃ 时安装在两个固定支座之间，这时杆不受力。已知钢的线膨胀系数 $\alpha_l = 125 \times 10^{-7}(℃)^{-1}$，$E = 210$ GPa。试问当温度升高至多少度时，杆将丧失稳定？

9－6 两根直径为 d 的立柱，上、下端分别与强劲的顶、底块刚性连接，如图所示。试根据杆端的约束条件，分析在总压力 F 作用下，立柱可能产生的几种失稳形态下的挠曲线形状，分别写出对应的总压力 F 之临界值的算式(按细长杆考虑)，确定最

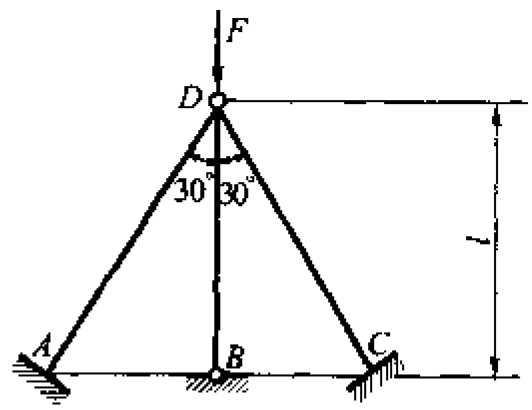


习题 9－6 图

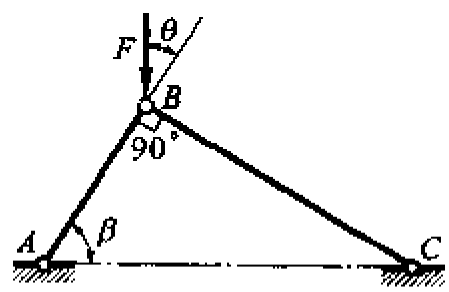
小临界力 F_{cr} 的算式。

9－7　图示结构 $ABCD$ 由三根直径均为 d 的圆截面钢杆组成，在 B 点铰支，而在 A 点和 C 点固定，D 为铰接点，$\frac{l}{d}=10\pi$。若此结构由于杆件在平面 $ABCD$ 内弹性失稳而丧失承载能力，试确定作用于结点 D 处的荷载 F 的临界值。

9－8　图示铰接杆系 ABC 由两根具有相同截面和同样材料的细长杆所组成。若由于杆件在平面 ABC 内失稳而引起毁坏，试确定荷载 F 为最大时的 θ 角 $\left(\text{假设 } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$。

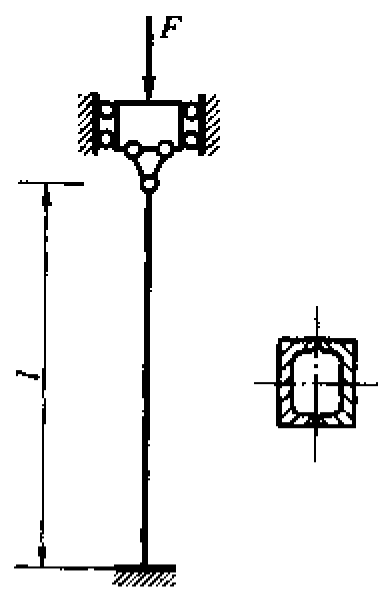


习题 9－7 图



习题 9－8 图

9－9　下端固定、上端铰支、长 $l=4$ m 的压杆，由两根 10 号槽钢焊接而成，如图所示，并符合钢结构设计规范中实腹式 b 类截面中心受压杆的要求。已知杆的材料为 Q235 钢，强度许用应力 $[\sigma]=170$ MPa，试求压杆的许可荷载。



习题 9－9 图

9－10　如果杆分别由下列材料制成：

(1) 比例极限 $\sigma_p=220$ MPa，弹性模量 $E=190$ GPa 的钢；

(2) $\sigma_p=490$ MPa，$E=215$ GPa，含镍 3.5％的镍钢；

(3) $\sigma_p=20$ MPa，$E=11$ GPa 的松木。

试求可用欧拉公式计算临界力的压杆的最小柔度。

9－11　两端铰支、强度等级为 TC13 的木柱，截面为 150 mm×150 mm 的正方形，长度 $l=3.5$ m，强度许用应力 $[\sigma]=10$ MPa。试求木柱的许可荷载。

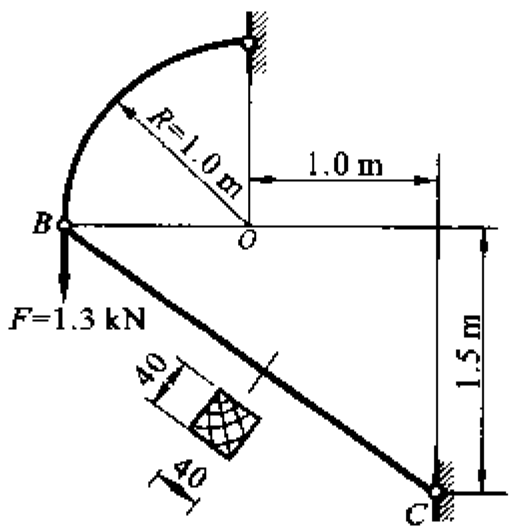
9－12　图示结构由钢曲杆 AB 和强度等级为 TC13 的木杆 BC 组成。已知结构所有的连接均为铰连接，在 B 点处承受竖直荷载 $F=1.3$ kN，木材的强度许用应力 $[\sigma]=10$ MPa。试校核杆 BC 的稳定性。

9－13　一支柱由 4 根 80 mm×80 mm×6 mm 的角钢组成(如图)，并符合钢结构设计规范中实腹式 b 类截面中心受压杆的要求。支柱的两端为铰支，柱长 $l=6$ m，压力为 450 kN。若材料为 Q235 钢，强度许用应力 $[\sigma]=170$ MPa，试求支柱横截面边长 a 的尺寸。

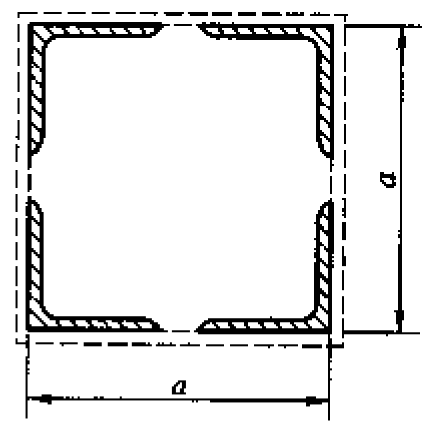
9－14　某桁架的受压弦杆长 4 m，由缀板焊成一体，并符合钢结构设计规范中实腹式 b 类截面中心受压杆的要求，截面形式如图所示，材料为 Q235 钢，$[\sigma]=170$ MPa。若按两端铰

支考虑，试求杆所能承受的许可压力。

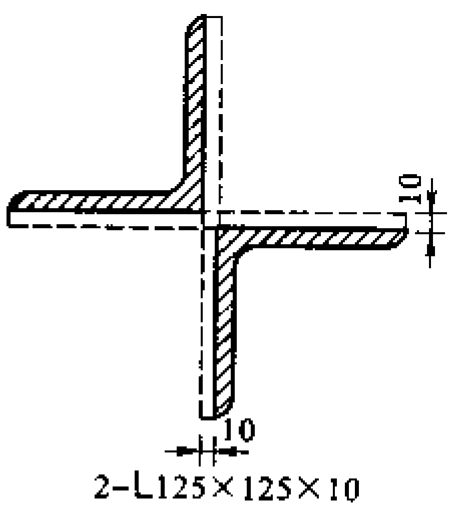
*9-15 图示结构中 BC 为圆截面杆，其直径 $d=80$ mm；AC 为边长 $a=70$ mm 的正方形截面杆。已知该结构的约束情况为 A 端固定，B，C 为球铰。两杆材料均为 Q235 钢，弹性模量 $E=210$ GPa，可各自独立发生弯曲互不影响。若结构的稳定安全因数 $n_{st}=2.5$，试求所能承受的许可压力。



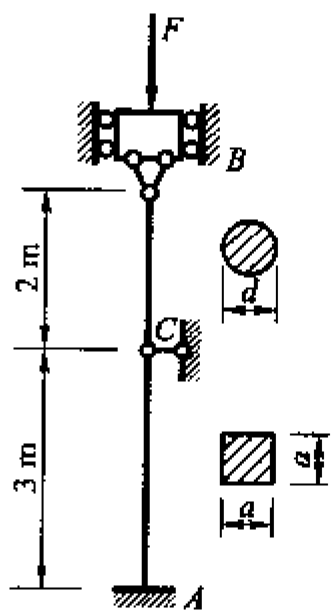
习题 9-12 图



习题 9-13 图



习题 9-14 图



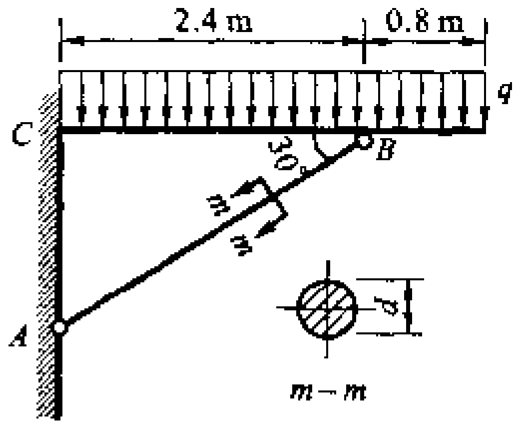
习题 9-15 图

9-16 图示一简单托架，其撑杆 AB 为圆截面木杆，强度等级为 TC15。若架上受集度为 $q=50$ kN/m 的均布荷载作用，AB 两端为柱形铰，材料的强度许用应力$[\sigma]=11$ MPa，试求撑杆所需的直径 d。

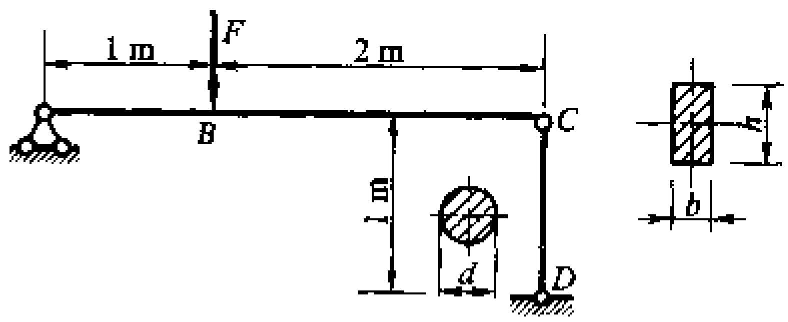
9-17 图示结构中杆 AC 与 CD 均由 Q235 钢制成，C，D 两处均为球铰。已知 $d=20$ mm，$b=100$ mm，$h=180$ mm；$E=200$ GPa，$\sigma_s=235$ MPa，$\sigma_b=400$ MPa；强度安全因数 $n=2.0$，稳定安全因数 $n_{st}=3.0$。试确定该结构的许可荷载。

*9-18 图示结构中钢梁 AB 及立柱 CD 分别由 16 号工字钢和连成一体的两根 63 mm×63 mm×5 mm 角钢制成，杆 CD 符合钢结构设计规范中实腹式 b 类截面中心受压杆的要

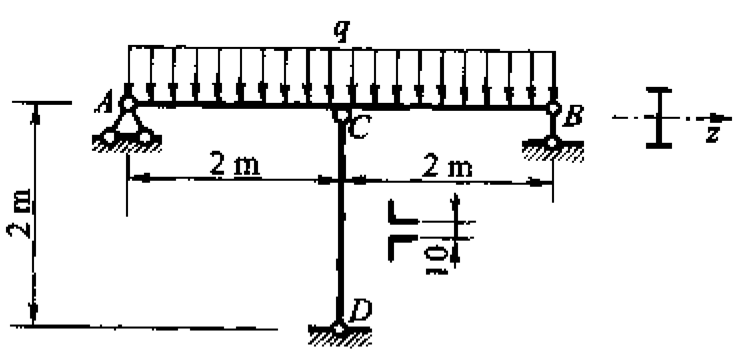
求；均布荷载集度 $q=48$ kN/m。梁及柱的材料均为 Q235 钢，$[\sigma]=170$ MPa，$E=210$ GPa。试验算梁和立柱是否安全。



习题 9－16 图



习题 9－17 图



习题 9－18 图

附录 I　截面的几何性质

§ I－1　截面的静矩和形心位置

计算杆在外力作用下的应力和变形时，将用到杆横截面的几何性质，例如在杆的拉（压）计算中所用的横截面面积 A、在圆杆扭转计算中所用的极惯性矩 I_p，以及在梁的弯曲计算中所用的横截面的静矩、惯性矩和惯性积等。

设一任意形状的截面如图 I－1 所示，其截面面积为 A。从截面中坐标为 (x,y)[①] 处取一面积元素 dA，则 $x\mathrm{d}A$ 和 $y\mathrm{d}A$ 分别称为该面积元素 dA 对于 y 轴和 x 轴的**静矩**或**一次矩**，而以下两积分

$$S_y = \int_A x\mathrm{d}A, \quad S_x = \int_A y\mathrm{d}A \tag{I－1}$$

分别定义为该截面对于 y 轴和 x 轴的静矩。上述积分应遍及整个截面的面积 A。

截面的静矩是对于一定的轴而言的，同一截面对不同坐标轴的静矩不同。静矩可能为正值或负值，也可能等于零，其常用单位为 m^3 或 mm^3。

从理论力学已知，在 Oxy 坐标系中，均质等厚度薄板的重心坐标为

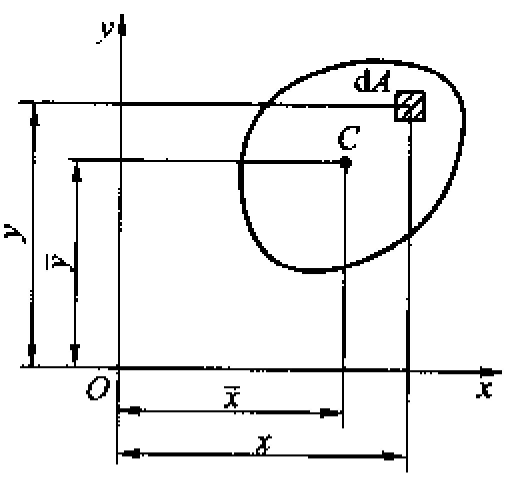


图 I－1

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A}$$

而均质薄板的重心与该薄板平面图形的形心是重合的，所以，上式可用来计算截面（图 I－1）的形心坐标。由于上式中的 $\int_A x\mathrm{d}A$ 和 $\int_A y\mathrm{d}A$ 就是截面的静矩，于是可将上式改写为

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{S_x}{A} \tag{I－2a}$$

因此，在知道截面对于 y 轴和 x 轴的静矩以后，即可求得截面形心的坐标。若

① 本附录中所用的坐标系与型钢规格表中的一致，而与本书各章中所用的不同。在使用本附录时，应予注意。

将上式写为

$$S_y = A\bar{x}, \quad S_x = A\bar{y} \qquad (\text{I}-2\text{b})$$

则在已知截面的面积 A 及其形心的坐标 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 时，就可求得截面对于 y 轴和 x 轴的静矩。

由以上两式可见，若截面对于某一轴的静矩等于零，则该轴必通过截面的形心；反之，截面对于通过其形心的轴的静矩恒等于零。

当截面由若干简单图形例如矩形、圆形或三角形等组成时，由于简单图形的面积及其形心位置均为已知，而且，从静矩定义可知，截面各组成部分对于某一轴的静矩之代数和，就等于该截面对于同一轴的静矩，即得整个截面的静矩为

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i\bar{x}_i, \quad S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i\bar{y}_i \qquad (\text{I}-3)$$

式中，A_i 和 $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ 分别代表任一简单图形的面积及其形心的坐标；n 为组成截面的简单图形的个数。

若将按式(I－3)求得的 S_y 和 S_x 代入式(I－2a)，可得计算组合截面形心坐标的公式为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad (\text{I}-4)$$

例题 I－1　试计算图示三角形截面对于与其底边重合的 x 轴的静矩。

解：取平行于 x 轴的狭长条(见图)作为面积元素，即 $\mathrm{d}A = b(y)\mathrm{d}y$。由相似三角形关系，可知 $b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$，因此有 $\mathrm{d}A = \frac{b}{h}(h-y)\mathrm{d}y$。将其代入式(I－1)的第二式，即得

$$S_x = \int_A y\mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y\mathrm{d}y = b\int_0^h y\mathrm{d}y - \frac{b}{h}\int_0^h y^2\mathrm{d}y = \frac{bh^2}{6}$$

例题 I－2　试确定图示截面形心 C 的位置。

解：将截面分为 I, II 两个矩形。取 x 轴和 y 轴分别与截面的底边和左边缘重合(见图)。先计算每一矩形的面积 A_i 和形心坐标($\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$)：

矩形 I　$A_{\text{I}} = 10\text{ mm} \times 120\text{ mm} = 1\,200\text{ mm}^2$

$$\bar{x}_{\text{I}} = \frac{10}{2}\text{ mm} = 5\text{ mm}, \quad \bar{y}_{\text{I}} = \frac{120}{2}\text{ mm} = 60\text{ mm}$$

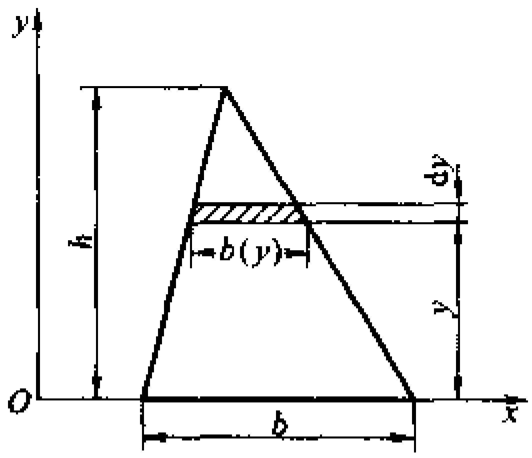
矩形 II　$A_{\text{II}} = 10\text{ mm} \times 70\text{ mm} = 700\text{ mm}^2$

$$\bar{x}_{\text{II}} = 10\text{ mm} + \frac{70}{2}\text{ mm} = 45\text{ mm}, \quad \bar{y}_{\text{II}} = \frac{10}{2}\text{ mm} = 5\text{ mm}$$

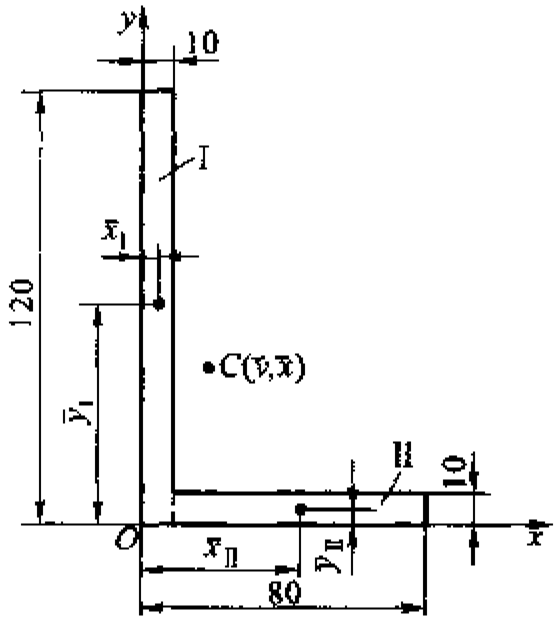
将其代入式(I－4)，即得截面形心 C 的坐标为

$$\bar{x} = \frac{A_{\mathrm{I}}\bar{x}_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}\bar{x}_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}} = \frac{37\ 500\ \mathrm{mm}^3}{1\ 900\ \mathrm{mm}^2} \approx 20\ \mathrm{mm}$$

$$\bar{y} = \frac{A_{\mathrm{I}}\bar{y}_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}\bar{y}_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}} = \frac{75\ 500\ \mathrm{mm}^3}{1\ 900\ \mathrm{mm}^2} \approx 40\ \mathrm{mm}$$



例题 I－1 图



例题 I－2 图

§I－2　极惯性矩·惯性矩·惯性积

设一面积为 A 的任意形状截面如图 I－2 所示。从截面中坐标为(x,y)处取一面积元素 $\mathrm{d}A$，则 $\mathrm{d}A$ 与其至坐标原点距离平方的乘积$\rho^2\mathrm{d}A$，称为面积元素对 O 点的**极惯性矩或截面二次极矩**。而以下积分

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A \qquad (\mathrm{I}-5)$$

定义为整个截面对于 O 点的极惯性矩。上述积分应遍及整个截面面积 A。显然，极惯性矩的数值恒为正值，其单位为 m^4 或 mm^4。

面积元素 $\mathrm{d}A$ 与其至 y 轴或 x 轴距离平方的乘积 $x^2\mathrm{d}A$ 或 $y^2\mathrm{d}A$，分别称为该面积元素对于 y 轴或 x 轴的**惯性矩或截面二次轴矩**。而以下两积分

$$\left.\begin{aligned} I_y &= \int_A x^2 \mathrm{d}A \\ I_x &= \int_A y^2 \mathrm{d}A \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}-6)$$

则分别定义为整个截面对于 y 轴或 x 轴的惯性矩。同样，上述积分应遍及整个截面的面积 A。

由图 I－2 可见，$\rho^2 = x^2 + y^2$，故有

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A (x^2 + y^2)\mathrm{d}A = I_y + I_x \qquad (\text{I}-7)$$

即任意截面对一点的极惯性矩的数值，等于截面对以该点为原点的任意两正交坐标轴的惯性矩之和。

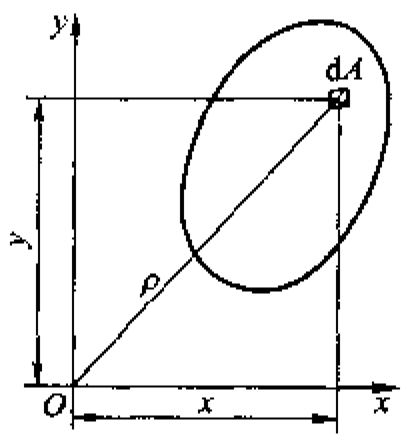


图 I-2

面积元素 $\mathrm{d}A$ 与其分别至 y 轴和 x 轴距离的乘积 $xy\mathrm{d}A$，称为该面积元素对于两坐标轴的**惯性积**，而以下积分

$$I_{xy} = \int_A xy\mathrm{d}A \qquad (\text{I}-8)$$

定义为整个截面对于 x，y 两坐标轴的惯性积，其积分也应遍及整个截面的面积。

从上述定义可见，同一截面对于不同坐标轴的惯性矩或惯性积一般是不同的。惯性矩的数值恒为正值，而惯性积则可能为正值或负值，也可能等于零。若 x，y 两坐标轴中有一为截面的对称轴，则其惯性积 I_{xy} 恒等于零。因在对称轴的两侧，处于对称位置的两面积元素 $\mathrm{d}A$ 的惯性积 $xy\mathrm{d}A$，数值相等而正负号相反，致使整个截面的惯性积必等于零。惯性矩和惯性积的单位相同，均为 m^4 或 mm^4。

在某些应用中，将惯性矩表示为截面面积 A 与某一长度平方的乘积，即

$$I_y = i_y^2 A, \quad I_x = i_x^2 A \qquad (\text{I}-9\text{a})$$

式中，i_y 和 i_x 分别称为截面对于 y 轴和 x 轴的**惯性半径**，其单位为 m 或 mm。当已知截面面积 A 和惯性矩 I_y 和 I_x 时，惯性半径即可从下式求得：

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad (\text{I}-9\text{b})$$

在附录 II 中给出了一些常用截面的几何性质计算公式备查。

例题 I-3 试计算图 a 所示矩形截面对于其对称轴（即形心轴）x 和 y 的惯性矩。

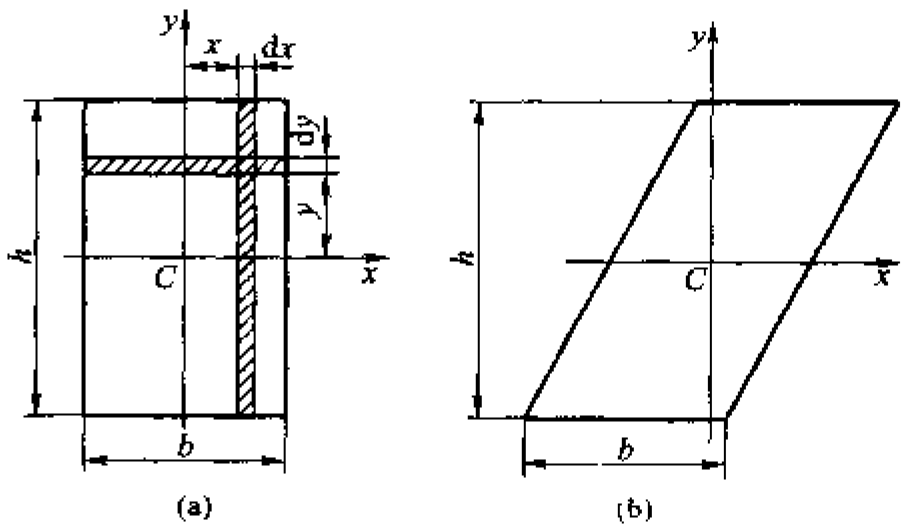
解：取平行于 x 轴的狭长条（图 a）作为面积元素，即 $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$，根据式（I-6）的第二式，可得

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 \mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}$$

同理，在计算对 y 轴的惯性矩 I_y 时，可取 $\mathrm{d}A = h\mathrm{d}x$（图 a），即得

$$I_y = \int_A x^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} hx^2 \mathrm{d}x = \frac{b^3 h}{12}$$

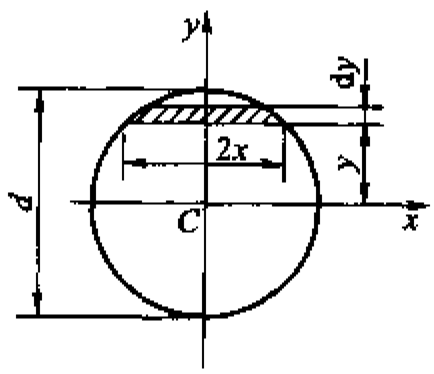
若截面是高度为 h 的平行四边形（图 b），则其对形心轴 x 的惯性矩同样为



例题Ⅰ-3图

$I_x=\dfrac{bh^3}{12}$。

例题Ⅰ-4 试计算图示圆截面对于其形心轴(即直径轴)的惯性矩。



例题Ⅰ-4图

解：以圆心为原点，选坐标轴 x，y 如图所示。取平行于 x 轴的狭长条(见图)作为面积元素，即 $dA=2x\mathrm{d}y$。根据式(Ⅰ-6)的第二式，可得

$$I_x=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}y^2\times 2x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{d}{2}}y^2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-y^2}\ \mathrm{d}y$$

式中引用了 $x=\sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2-y^2}$ 这一几何关系，并利用了截面对称于 x 轴的关系将积分下限作了变动。

利用积分公式，可得

$$I_x=4\left\{-\frac{y}{4}\sqrt{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-y^2\right]^3}+\frac{(d/2)^2}{8}\left[y\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-y^2}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\sin^{-1}\frac{y}{d/2}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{d}{2}}=\frac{\pi d^4}{64}$$

利用圆截面的极惯性矩 $I_p=\dfrac{\pi d^4}{32}$，由于圆截面对任一形心轴的惯性矩均相等，因而 $I_x=I_y$。于是，由式(Ⅰ-7)得

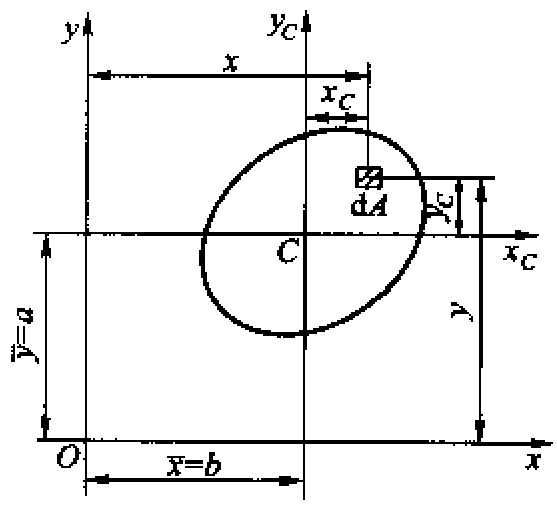
$$I_x=I_y=\frac{I_p}{2}=\frac{\pi d^4}{64}$$

对于矩形和圆形截面，由于 x，y 两轴都是截面的对称轴，因此，惯性积 I_{xy} 均等于零。

§Ⅰ-3　惯性矩和惯性积的平行移轴公式·组合截面的惯性矩和惯性积

一、惯性矩和惯性积的平行移轴公式

设一面积为 A 的任意形状的截面如图Ⅰ-3所示。截面对任意的 x，y 两坐标轴的惯性矩和惯性积分别为 I_x，I_y 和 I_{xy}。另外，通过截面的形心 C 有分别与 x，y 轴平行的 x_C，y_C 轴，称为**形心轴**。截面对于形心轴的惯性矩和惯性积分别为 I_{x_C}，I_{y_C} 和 $I_{x_Cy_C}$。



图Ⅰ-3

由图Ⅰ-3可见，截面上任一面积元素 $\mathrm{d}A$ 在两坐标系内的坐标 (x,y) 和 (x_C,y_C) 之间的关系为

$$x = x_C + b,\quad y = y_C + a \qquad \text{(a)}$$

式中，a，b 是截面形心在 Oxy 坐标系内的坐标值，即 $\bar{x}=b$，$\bar{y}=a$。将式(a)中的 y 代入式(Ⅰ-6)中的第二式，经展开并逐项积分后，可得

$$I_x = \int_A y^2\mathrm{d}A = \int_A (y_C + a)^2\mathrm{d}A$$

$$= \int_A y_C^2\mathrm{d}A + 2a\int_A y_C\mathrm{d}A + a^2\int_A \mathrm{d}A \qquad \text{(b)}$$

根据惯性矩和静矩的定义，上式右端的各项积分分别为

$$\int_A y_C^2\mathrm{d}A = I_{x_C},\qquad \int_A y_C\mathrm{d}A = A\cdot\bar{y}_C,\qquad \int_A \mathrm{d}A = A$$

其中 $\bar{y}_C$ 应为截面形心 C 到 x_C 轴的距离，但 x_C 轴通过截面形心 C，因此 $\bar{y}_C$ 等于零。于是，式(b)可写作

$$I_x = I_{x_C} + a^2A \qquad (\text{Ⅰ}-10\text{a})$$

同理

$$I_y = I_{y_C} + b^2A \qquad (\text{Ⅰ}-10\text{b})$$

$$I_{xy} = I_{x_Cy_C} + abA \qquad (\text{Ⅰ}-10\text{c})$$

注意，上式中的 a，b 两坐标值有正负号，可由截面形心 C 所在的象限来决定。

式(Ⅰ-10)称为惯性矩和惯性积的**平行移轴公式**。应用上式即可根据截面

对于形心轴的惯性矩或惯性积,计算截面对于与形心轴平行的坐标轴的惯性矩或惯性积,或进行相反的运算。

二、组合截面的惯性矩及惯性积

在工程中常遇到组合截面。根据惯性矩和惯性积的定义可知,组合截面对于某坐标轴的惯性矩(或惯性积)就等于其各组成部分对于同一坐标轴的惯性矩(或惯性积)之和。若截面是由 n 个部分组成,则组合截面对于 x,y 两轴的惯性矩和惯性积分别为:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} I_{xi}, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi}, \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} I_{xyi} \qquad (\text{I}-11)$$

式中,I_{xi},I_{yi}和I_{xyi}分别为组合截面中组成部分 i 对于 x,y 两轴的惯性矩和惯性积。

不规则截面对坐标轴的惯性矩或惯性积,可将截面分割成若干等高度的窄长条,然后应用式(Ⅰ-11),计算其近似值。

例题Ⅰ-5 试求图 a 所示截面对于对称轴 x 的惯性矩 I_x。

解:将截面看作由一个矩形和两个半圆形组成。设矩形对于 x 轴的惯性矩为 I_{x1},每一个半圆形对于 x 轴的惯性矩为 I_{x2},则由式(Ⅰ-11)可知,所给截面的惯性矩

$$I_x = I_{x1} + 2I_{x2} \qquad (1)$$

矩形对于 x 轴的惯性矩为

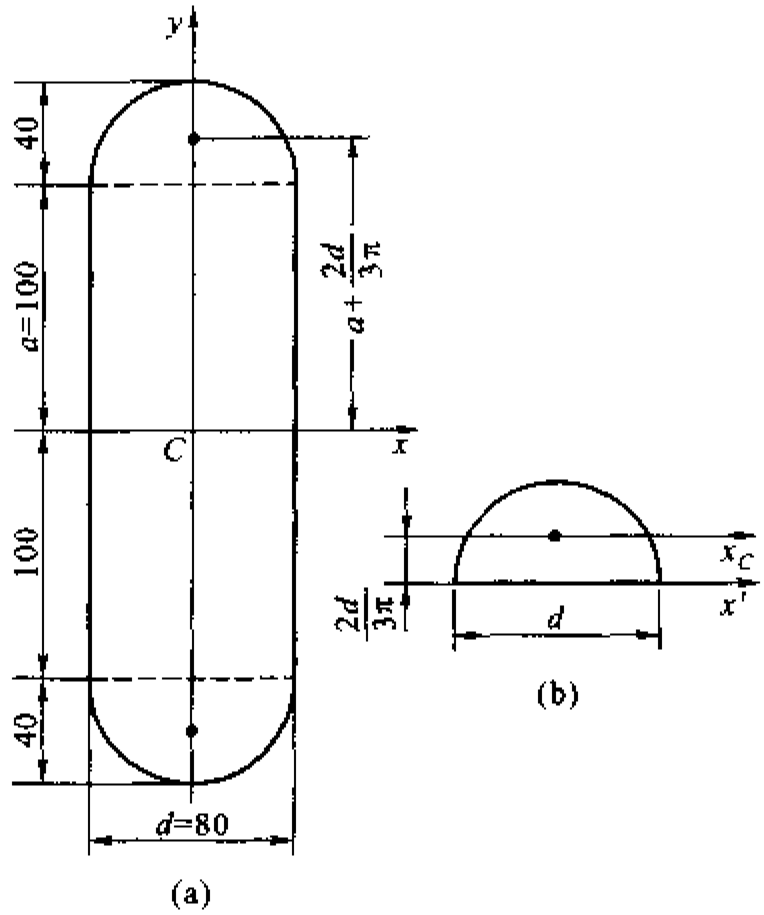
$$I_{x1} = \frac{d(2a)^3}{12} = \frac{(80\ \text{mm})(200\ \text{mm})^3}{12} = 5\,333 \times 10^4\ \text{mm}^4 \qquad (2)$$

半圆形对于 x 轴的惯性矩可利用平行移轴公式求得。为此,先求出每个半圆形对于与 x 轴平行的形心轴 x_C(图 b)的惯性矩 I_{x_C}。已知半圆形对于其底边的惯性矩为圆形对其直径轴 x'(图 b)的惯性矩之半,即 $I_{x'} = \frac{\pi d^4}{128}$。而半圆形的面积为 $A = \frac{\pi d^2}{8}$,其形心到底边的距离为$\frac{2d}{3\pi}$(图 b)。故由平行移轴公式(Ⅰ-10a),可得每个半圆形对其自身形心轴 x_C 的惯性矩为

$$I_{x_C} = I_{x'} - \left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 A = \frac{\pi d^4}{128} - \left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi d^2}{8} \qquad (3)$$

由图 a 可知,半圆形形心到 x 轴的距离为 $a + \frac{2d}{3\pi}$。由平行移轴公式,求得每个半圆形对于 x 轴的惯性矩为

$$I_{x2} = I_{x_C} + \left(a + \frac{2d}{3\pi}\right)^2 A = \frac{\pi d^4}{128} - \left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi d^2}{8} + \left(a + \frac{2d}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi d^2}{8}$$



例题 I　5 图

$$= \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d^2}{32} + \frac{a^2}{2} + \frac{2ad}{3\pi}\right) \tag{4}$$

将 $d = 80$ mm，$a = 100$ mm(图 a)代入式(4)，即得

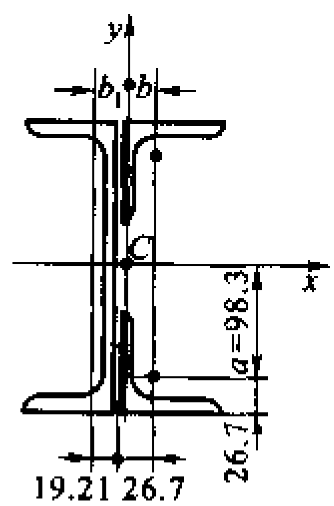
$$I_{x2} = \frac{\pi(80\ \text{mm})^2}{4}\left[\frac{(80\ \text{mm})^2}{32} + \frac{(100\ \text{mm})^2}{2} + \frac{2\times(100\ \text{mm})(80\ \text{mm})}{3\pi}\right]$$

$$= 3\,467\times 10^4\ \text{mm}^4$$

将求得的 I_{x1} 和 I_{x2} 代入式(1)，便得

$$I_x = 5\,333\times 10^4\ \text{mm}^4 + 2\times 3\,467\times 10^4\ \text{mm}^4 = 12\,270\times 10^4\ \text{mm}^4$$

例题 I-6　图示截面由一个 25c 号槽钢截面和两个 90 mm×90 mm×12 mm 角钢截面组成。试求组合截面分别对于形心轴 x 和 y 的惯性矩 I_x 和 I_y。



例题 I-6 图

解：型钢截面的几何性质数值可从型钢规格表查得：

25c 号槽钢截面

$$A = 44.91\ \text{cm}^2$$

$$I_{x_C} = 3\,690.45\ \text{cm}^4$$

$$I_{y_C} = 218.415\ \text{cm}^4$$

90 mm×90 mm×12 mm 角钢截面

$$A = 20.3\ \text{cm}^2$$

$$I_{x_C} = I_{y_C} = 149.22\ \text{cm}^4$$

首先确定此组合截面的形心位置。为便于计算，以两角钢截面的形心连线作为参考轴，则组合截面形心 C 离该轴的距离 b(见图)为

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{2\times(2\,030\ \text{mm}^2)\times 0 + (4\,491\ \text{mm}^2)[-(19.21\ \text{mm}+26.7\ \text{mm})]}{2\times(2\,030\ \text{mm}^2)+4\,491\ \text{mm}^2}$$

$$= -24.1\ \text{mm}$$

由此得

$$b = |\bar{x}| = 24.1\ \text{mm}$$

然后按平行移轴公式(Ⅰ-10)，分别计算槽钢截面和角钢截面对于 x 轴和 y 轴的惯性矩(参看图)：

槽钢截面

$$I_{x1} = I_{x_C} + a_1^2 A = 3\,690.45\times 10^4\ \text{mm}^4 + 0 = 3\,690\times 10^4\ \text{mm}^4$$

$$I_{y1} = I_{y_C} + b_1^2 A$$

$$= 218.415\times 10^4\ \text{mm}^4 + (19.21\ \text{mm} + 26.7\ \text{mm} - 24.1\ \text{mm})^2\times 4\,491\ \text{mm}^2$$

$$= 431\times 10^4\ \text{mm}^4$$

角钢截面

$$I_{x2} = I_{x_C} + a^2 A = 149.22\times 10^4\ \text{mm}^4 + (98.3\ \text{mm})^2\times 2\,030\ \text{mm}^2$$

$$= 2\,110\times 10^4\ \text{mm}^4$$

$$I_{y2} = I_{y_C} + b^2 A = 149.22\times 10^4\ \text{mm}^4 + (24.1\ \text{mm})^2\times 2\,030\ \text{mm}^2$$

$$= 267\times 10^4\ \text{mm}^4$$

最后按式(Ⅰ-11)得所求的惯性矩为

$$I_x = 3\,690\times 10^4\ \text{mm}^4 + 2\times 2\,110\times 10^4\ \text{mm}^4 = 7\,910\times 10^4\ \text{mm}^4$$

$$I_y = 431\times 10^4\ \text{mm}^4 + 2\times 267\times 10^4\ \text{mm}^4 = 965\times 10^4\ \text{mm}^4$$

§Ⅰ-4　惯性矩和惯性积的转轴公式·截面的主惯性轴和主惯性矩

一、惯性矩和惯性积的转轴公式

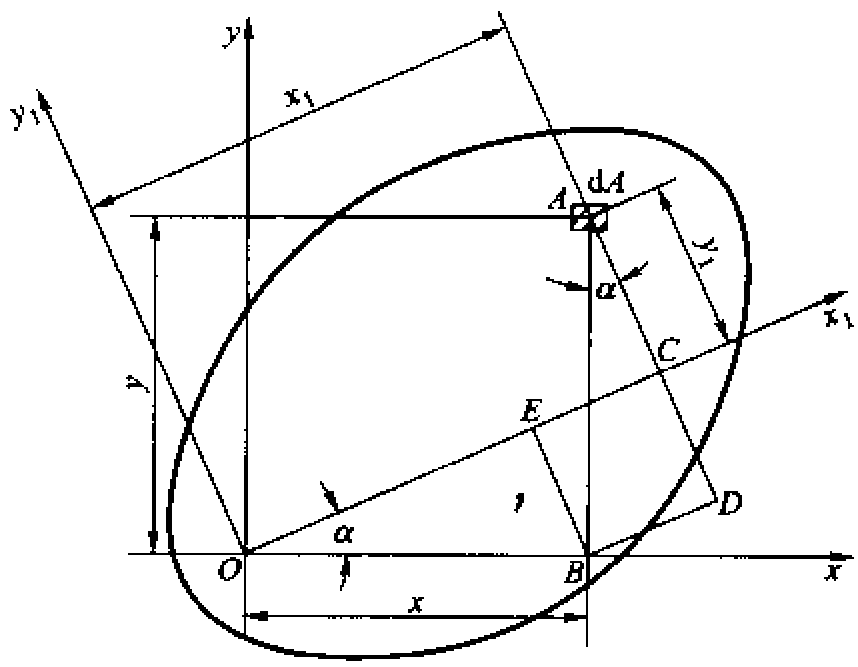
设一面积为 A 的任意形状截面如图Ⅰ-4 所示。截面对于通过其上任意一点 O 的两坐标轴 x, y 的惯性矩和惯性积已知为 I_x, I_y 和 I_{xy}。若坐标轴 x, y 绕 O 点旋转 α 角(α 角以逆时针向旋转为正)至 x_1, y_1 位置，则该截面对于新坐标

轴 x_1，y_1 的惯性矩和惯性积分别为 I_{x_1}，I_{y_1} 和 $I_{x_1y_1}$。

由图Ⅰ-4可见，截面上任一面积元素 dA 在新、老两坐标系内的坐标（x_1，y_1）和（x，y）间的关系为

$$x_1 = \overline{OC} = \overline{OE} + \overline{BD} = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y_1 = \overline{AC} = \overline{AD} - \overline{EB} = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$



图Ⅰ-4

将 y_1 代入式（Ⅰ-6）中的第二式，经过展开并逐项积分后，即得该截面对于坐标轴 x_1 的惯性矩 I_{x_1} 为

$$I_{x_1} = \cos^2\alpha\int_A y^2\mathrm{d}A + \sin^2\alpha\int_A x^2\mathrm{d}A - 2\sin\alpha\cos\alpha\int_A xy\mathrm{d}A \tag{a}$$

根据惯性矩和惯性积的定义，上式右端的各项积分分别为

$$\int_A y^2\mathrm{d}A = I_x,\quad \int_A x^2\mathrm{d}A = I_y,\quad \int_A xy\mathrm{d}A = I_{xy}$$

将其代入式(a)并改用二倍角函数的关系，即得

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha \tag{Ⅰ-12a}$$

同理

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha \tag{Ⅰ-12b}$$

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha \tag{Ⅰ-12c}$$

以上三式就是惯性矩和惯性积的**转轴公式**，可用来计算截面的主惯性轴和主惯性矩。

将式(Ⅰ－12a)和(Ⅰ－12b)中的 I_{x_1} 和 I_{y_1} 相加，可得

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \tag{b}$$

上式表明，截面对于通过同一点的任意一对相互垂直的坐标轴的两惯性矩之和为一常数，并等于截面对该坐标原点的极惯性矩[见式(Ⅰ－7)]。

二、截面的主惯性轴和主惯性矩

由式(Ⅰ－12c)可知，当坐标轴旋转时，惯性积 $I_{x_1y_1}$ 将随着 α 角作周期性变化，且有正有负。因此，必有一特定的角度 α_0，使截面对于新坐标轴 x_0，y_0 的惯性积等于零。截面对其惯性积等于零的一对坐标轴，称为**主惯性轴**。截面对于主惯性轴的惯性矩，称为**主惯性矩**。当一对主惯性轴的交点与截面的形心重合时，就称为**形心主惯性轴**。截面对于形心主惯性轴的惯性矩，称为**形心主惯性矩**。

首先确定主惯性轴的位置，并导出主惯性矩的计算公式。设 α_0 角为主惯性轴与原坐标轴之间的夹角(参看图Ⅰ－4)，则将 α_0 角代入惯性积的转轴公式(Ⅰ－12c)并令其等于零，即

$$\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 + I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

上式可改写为

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}\text{①} \tag{Ⅰ－13}$$

由上式解得的 α_0 值，就确定了两主惯性轴中 x_0 轴的位置。

将所得 α_0 值代入式(Ⅰ－12a)和(Ⅰ－12b)，即得截面的主惯性矩。为计算方便，直接导出主惯性矩的计算公式。为此，利用式(Ⅰ－13)，并将 $\cos 2\alpha_0$ 和 $\sin 2\alpha_0$ 写成

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_0}} = \frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \tag{c}$$

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tan 2\alpha_0}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_0}} = \frac{-2I_{xy}}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \tag{d}$$

将其代入式(Ⅰ－12a)和(Ⅰ－12b)，经化简后即得主惯性矩的计算公式

---

① 这里的负号所以放在分子上，为的是和下面的(c)，(d)两式相符。这样确定的 α_0 角就使得 I_{x_0} 等于 I_{max}，可参看式(Ⅰ－14)和例题Ⅰ－7。

$$\left.\begin{aligned} I_{x_0} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \\ I_{y_0} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅰ}-14)$$

另外，由式(Ⅰ-12a)和(Ⅰ-12b)可见，惯性矩 I_{x_1} 和 I_{y_1} 都是 α 角的正弦和余弦函数，而 α 角可在 0°到 360°的范围内变化，因此，I_{x_1} 和 I_{y_1} 必然有极值。由于对通过同一点的任意一对坐标轴的两惯性矩之和为一常数，因此，其中的一个将为极大值，另一个则为极小值。

由
$$\frac{\mathrm{d}I_{x_1}}{\mathrm{d}\alpha}=0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}I_{y_1}}{\mathrm{d}\alpha}=0$$

解得的使惯性矩取得极值的坐标轴位置的表达式，与式(Ⅰ-13)完全一致。从而可知，截面对于通过任一点的主惯性轴的主惯性矩之值，也就是通过该点所有轴的惯性矩中的极大值 I_{max} 和极小值 I_{min}。从式(Ⅰ-14)可见，I_{x_0} 就是 I_{max}，而 I_{y_0} 则为 I_{min}。

在确定形心主惯性轴的位置并计算形心主惯性矩时，同样可以应用上述式(Ⅰ-13)和(Ⅰ-14)，但式中的 I_x，I_y 和 I_{xy}，应为截面对于通过其形心的某一对轴的惯性矩和惯性积。

在通过截面形心的一对坐标轴中，若有一个为对称轴(例如槽形截面)，则该对称轴就是形心主惯性轴，因为截面对于包括对称轴在内的一对坐标轴的惯性积等于零。在附录Ⅱ中所列的惯性矩除三角形截面的以外，都是形心主惯性矩。

在计算组合截面的形心主惯性矩时，首先应确定其形心位置，然后通过形心选择一对便于计算惯性矩和惯性积的坐标轴，算出组合截面对于这一对坐标轴的惯性矩和惯性积。将上述结果代入式(Ⅰ-13)和(Ⅰ-14)，即可确定表示形心主惯性轴位置的角度 α_0 和形心主惯性矩的数值。

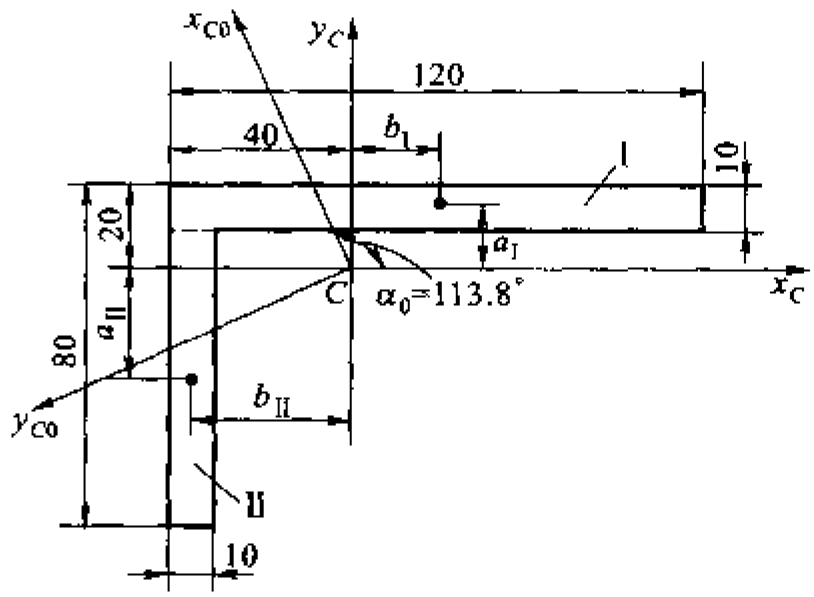
若组合截面具有对称轴，则包括此轴在内的一对互相垂直的形心轴就是形心主惯性轴。此时，只需利用移轴公式(Ⅰ-10)和(Ⅰ-11)，即可得截面的形心主惯性矩。

例题Ⅰ-7 图示截面的尺寸与例题Ⅰ-2 中的相同。试计算截面的形心主惯性矩。

解： 由例题Ⅰ-2 的结果可知，截面的形心 C 位于截面上边缘以下 20 mm 和左边缘以右 40 mm 处(见图)。

通过截面形心 C，先选择一对分别与上边缘和左边缘平行的形心轴 x_C 和 y_C(见图)。将截面分为Ⅰ,Ⅱ两矩形，由图可知，两矩形形心的坐标值分别为

$$a_{\text{Ⅰ}} = 20\ \text{mm} - 5\ \text{mm} = 15\ \text{mm}, \quad a_{\text{Ⅱ}} = -(45\ \text{mm} - 20\ \text{mm}) = -25\ \text{mm}$$



例题 I－7 图

$$b_{\mathrm{I}} = 60 \text{ mm} - 40 \text{ mm} = 20 \text{ mm}, \quad b_{\mathrm{II}} = -(40 \text{ mm} - 5 \text{ mm}) = -35 \text{ mm}$$

然后按平行移轴公式(I－10)和(I－11)，列表计算图示截面对所选形心轴的惯性矩和惯性积(参看图)如下：

项目 / 列号 / 分块号 i	A_i (mm^2)	(mm) a_i	b_i	($10^4 mm^4$) $a_i^2A_i$	$b_i^2A_i$	$I'_{x_{Ci}}$
	(1)	(2)	(3)	(4)=(2)^2×(1)	(5)=(3)^2×(1)	(6)
I	1 200	15	20	27	48	1
II	700	−25	−35	43.8	85.8	28.6
$\sum$	—	—	—	70.8	133.8	29.6

项目 / 列号 / 分块号 i	($10^4 mm^4$) $I'_{y_{Ci}}$	$I_{x_{Ci}}$	$I_{y_{Ci}}$	$a_ib_iA_i$	$I'_{x_{Ci}y_{Ci}}$	$I_{x_{Ci}y_{Ci}}$
	(7)	(8)=(4)+(6)	(9)=(5)+(7)	(10)=(1)×(2)×(3)	(11)	(12)=(10)+(11)
I	144	28	192	36	0	36
II	0.6	72.4	86.4	61.3	0	61.3
$\sum$	144.6	100.4	278.4	97.3	0	97.3

表中(8)，(9)和(12)各列的总和分别为整个截面对形心轴 x_C 和 y_C 的惯性矩和惯性积，即

$$I_{x_C} = 100.4 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_C} = 278.4 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_C y_C} = 97.3 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

将求得的 I_{x_C}，I_{y_C} 和 $I_{x_Cy_C}$ 代入式(I－13)，得

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{x_Cy_C}}{I_{x_C}-I_{y_C}} = \frac{-2\times(97.3\times10^4\ \text{mm}^4)}{100.4\times10^4\ \text{mm}^4-278.4\times10^4\ \text{mm}^4}$$
$$= 1.093$$

由三角函数关系可知，$\tan 2\alpha_0=\dfrac{\sin 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0}$，故代表 $\tan 2\alpha_0$ 的分数 $\dfrac{-194.6}{-178}$ 的分子和分母的正负号也分别反映了 $\sin 2\alpha_0$ 和 $\cos 2\alpha_0$ 的正负号。两者均为负值，故 $2\alpha_0$ 应在第三象限中。由此解得

$$2\alpha_0 = 227.6°$$
$$\alpha_0 = 113.8°$$

即形心主惯性轴 x_{C0} 可从形心轴 x_C 沿逆时针向(因 α_0 为正值)转 113.8°得到，如图所示。

将以上所得的 I_{x_C}，I_{y_C} 和 $I_{x_Cy_C}$ 值代入式(I－14)，即得形心主惯性矩的数值为

$$I_{x_{C0}} = I_{\max} = \frac{I_{x_C}+I_{y_C}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_C}-I_{y_C})^2+4I_{x_Cy_C}^2}$$
$$= \frac{100.4\times10^4\ \text{mm}^4+278.4\times10^4\ \text{mm}^4}{2}+\frac{1}{2}\times$$
$$\sqrt{(100.4\times10^4\ \text{mm}^4-278.4\times10^4\ \text{mm}^4)^2+4\times(97.3\times10^4\ \text{mm}^4)^2}$$
$$= (189.4+132.0)10^4\ \text{mm}^4 = 321\times10^4\ \text{mm}^4$$

$$I_{y_{C0}} = I_{\min} = \frac{I_{x_C}+I_{y_C}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_C}-I_{y_C})^2+4I_{x_Cy_C}^2}$$
$$= (189.4-132.0)10^4\ \text{mm}^4 = 57.4\times10^4\ \text{mm}^4$$

*§ I－5 计算惯性矩的近似方法

设一任意形状的截面如图 I－5 所示。若要计算该截面对 x 轴的惯性矩 I_x，则可作一系列与 x 轴平行的直线，将截面分为 n 个高度均等于 δ 的狭长条。当 δ 很小时，则可以近似地视为矩形。狭长条 i 的面积为

$$\Delta A_i = x_i\delta$$

式中，x_i 为该狭长条在中点处的宽度(图 I－5)。

按惯性矩的平行移轴公式，狭长条 i 对 x 轴的惯性矩为

$$\Delta I_{x_i}=\frac{x_i\delta^3}{12}+a_i^2\Delta A_i\approx a_i^2x_i\delta$$

式中，a_i 为狭长条的中点到 x 轴的距离（见图 I－5）；因$\frac{x_i\delta^3}{12}$与 $a_i^2x_i\delta$ 相比很小，可略去不计。于是，整个截面对于 x 轴的惯性矩就近似地等于

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}\Delta I_{x_i}\approx\delta\sum_{i=1}^{n}a_i^2x_i \tag{I－15}$$

应用这一方法计算工程实际问题中不规则截面（例如钢轨等截面）的惯性矩较为简便。为说明其精确度，举例计算三角形截面的惯性矩。

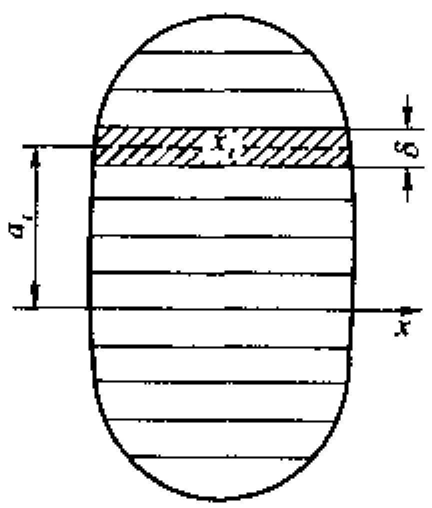
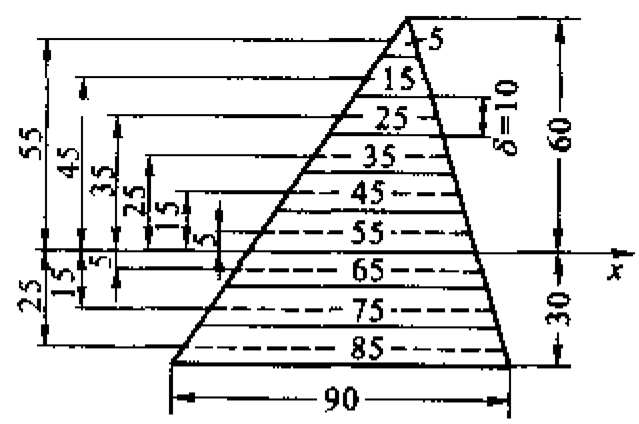


图 I－5



例题 I－8 图

例题 I－8　图示三角形截面的高度和底的宽度均为 90 mm。试用近似方法计算截面对形心轴 x 的惯性矩 I_x。

解：为了计算 I_x，将截面分为 9 个高度均为 $\delta=10$ mm 的狭长条。各条中点处的宽度 x_i 和到 x 轴的距离 a_i 如图中所示。按式（I－15），可得近似结果为

$$\begin{aligned}I_x&=10\text{ mm}\times[(55\text{ mm})^2\times5\text{ mm}+(45\text{ mm})^2\times15\text{ mm}+\\&\quad(35\text{ mm})^2\times25\text{ mm}+(25\text{ mm})^2\times35\text{ mm}+\\&\quad(15\text{ mm})^2\times45\text{ mm}+(5\text{ mm})^2\times55\text{ mm}+(5\text{ mm})^2\times65\text{ mm}+\\&\quad(15\text{ mm})^2\times75\text{ mm}+(25\text{ mm})^2\times85\text{ mm}]\\&=181.1\times10^4\text{ mm}^4\end{aligned}$$

若用按积分法求得的公式（见附录 II）计算，可得惯性矩的精确值为

$$I_x=\frac{bh^3}{36}=\frac{90\times90^3}{36}=182.3\times10^4\text{ mm}^4$$

近似解的相对误差为

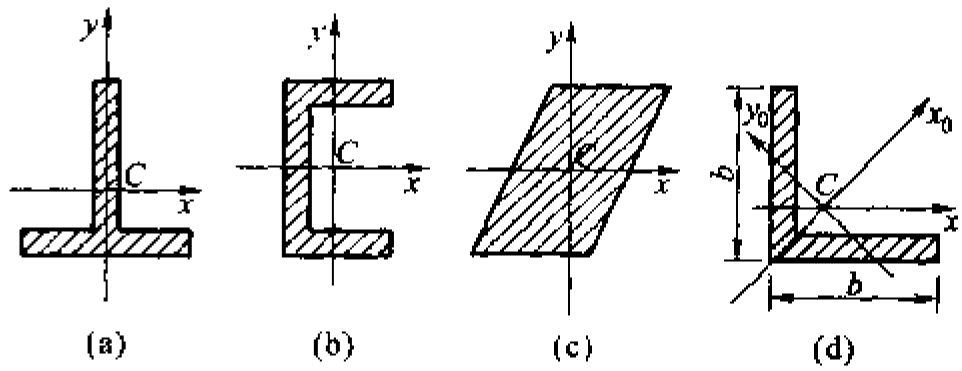
$$\frac{(181.1-182.3)10^4\text{ mm}^4}{182.3\times10^4\text{ mm}^4}\approx-0.66\%$$

在本例中，仅将截面分成 9 个狭长条，其误差已不到 1%，可见用近似方法计算

惯性矩是足够精确的。

思　考　题

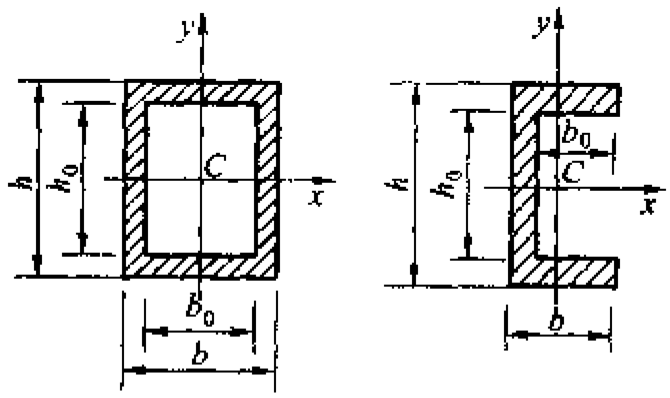
I－1　下面各截面图形中 C 是形心。试问哪些截面图形对坐标轴的惯性积等于零？哪些不等于零？



(a)　(b)　(c)　(d)

思考题 I－1 图

I－2　试问图示两截面的惯性矩 I_x 是否可按照 $I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{b_0h_0^3}{12}$ 来计算？



(a)　(b)

思考题 I－2 图

I－3　由两根同一型号的槽钢组成的截面如图所示。已知每根槽钢的截面面积为 A，对形心轴 y_0 的惯性矩为 I_{y_0}，并知 y_0，y_1 和 y 为相互平行的三根轴。试问在计算截面对 y 轴的惯性矩 I_y 时，应选用下列哪一个算式？

(1) $I_y=I_{y_0}+z_0^2A$；

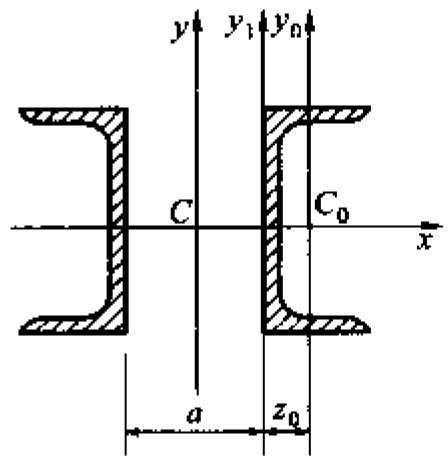
(2) $I_y=I_{y_0}+\left(\frac{a}{2}\right)^2A$；

(3) $I_y=I_{y_0}+\left(z_0+\frac{a}{2}\right)^2A$；

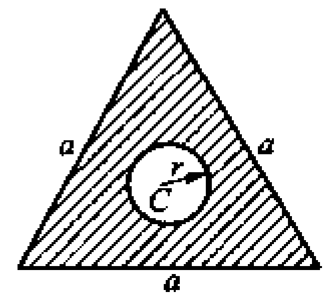
(4) $I_y=I_{y_0}+z_0^2A+z_0aA$；

(5) $I_y=I_{y_0}+\left[z_0^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]A$。

I－4　图示为一等边三角形中心挖去一半径为 r 的圆孔的截面。试证明该截面通过形心 C 的任一轴均为形心主惯性轴。



思考题 I-3 图

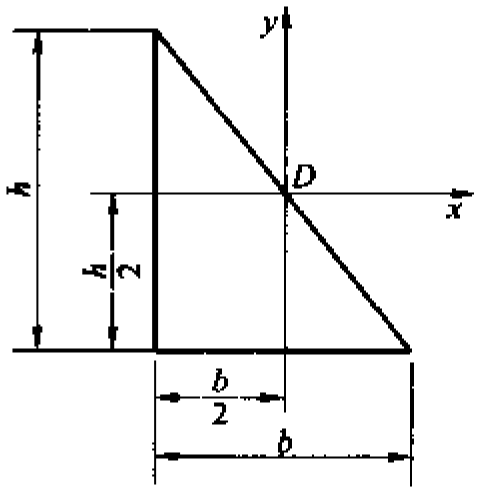


思考题 I-4 图

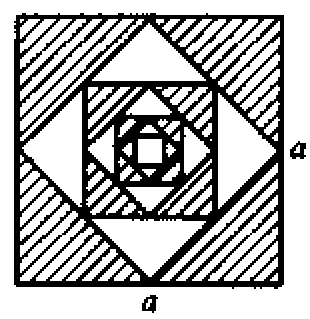
I-5 直角三角形截面斜边中点 D 处的一对正交坐标轴 x,y 如图所示，试问：

(1) x,y 是否为一对主惯性轴？

(2) 不用积分，计算其 I_x 和 I_{xy} 值。



思考题 I-5 图

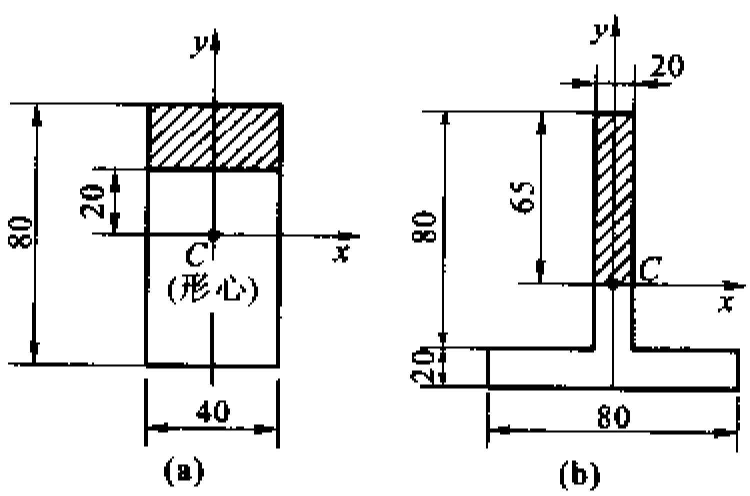


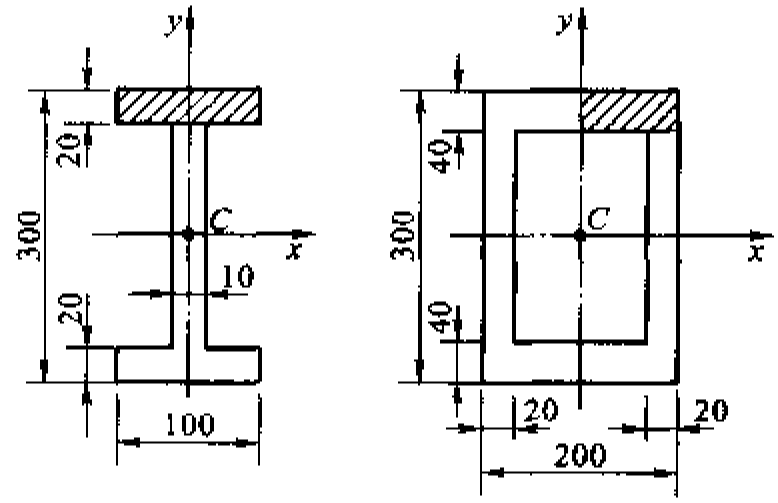
思考题 I-6 图

I-6 有 n 个画了斜线的内接正方形截面如图所示。试求该图形对水平形心轴 x 和与该轴成 $\alpha=30°$ 的形心轴 x_1 的惯性矩。

习 题

I-1 试求图示各截面的阴影线面积对 x 轴的静矩。

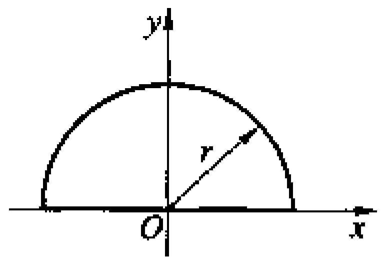




(c) (d)

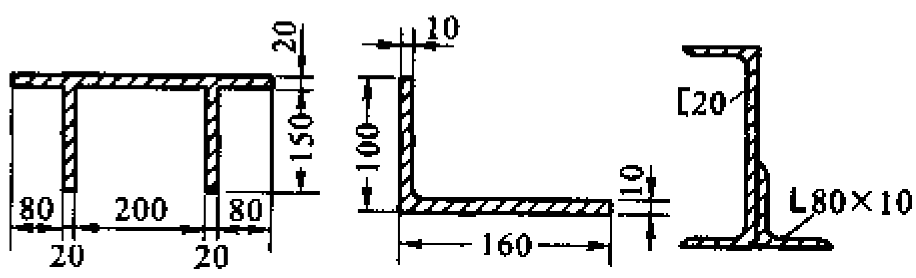
习题 I-1 图

I-2 试用积分法求图示半圆形截面对 x 轴的静矩，并确定其形心的坐标。



习题 I-2 图

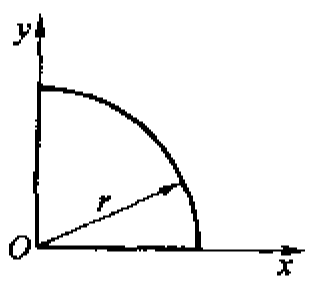
I-3 试确定图示各截面的形心位置。



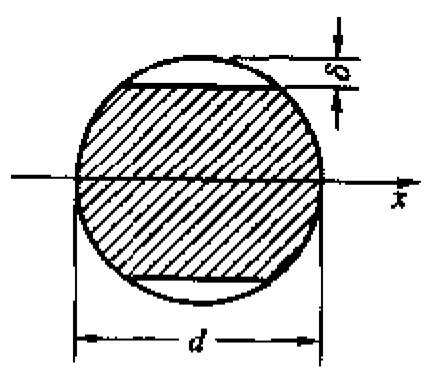
(a) (b) (c)

习题 I-3 图

I-4 试求图示四分之一圆形截面对于 x 轴和 y 轴的惯性矩 I_x，I_y 和惯性积 I_{xy}。



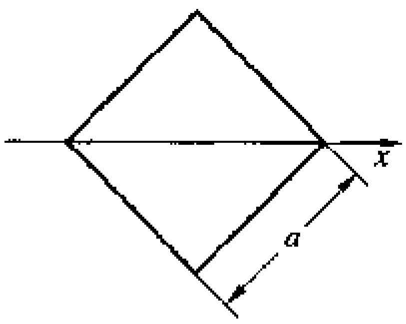
习题 I-4 图



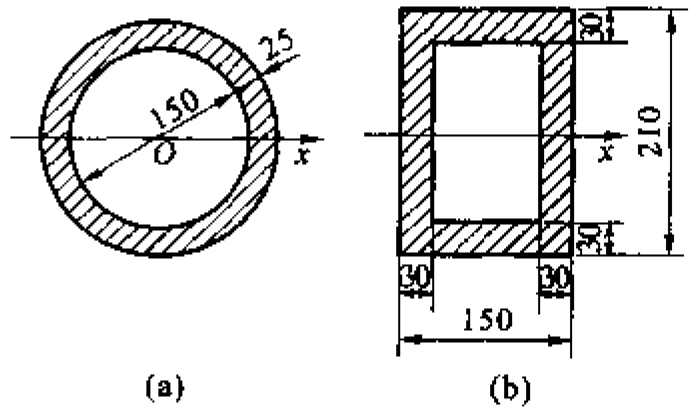
习题 I-5 图

Ⅰ－5 图示直径为 $d=200$ mm 的圆形截面，在其上、下对称地切去两个高为 $\delta=20$ mm 的弓形，试用积分法求余下阴影部分对其对称轴 x 的惯性矩

Ⅰ－6 试求图示正方形截面对其对角线的惯性矩。



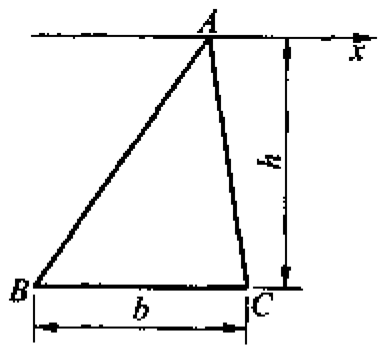
习题Ⅰ－6图



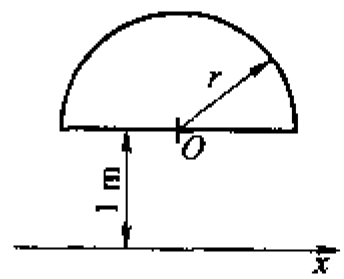
习题Ⅰ－7图

Ⅰ－7 试分别求图示环形和箱形截面对其对称轴 x 的惯性矩。

Ⅰ－8 试求图示三角形截面对通过顶点 A 并平行于底边 BC 的 x 轴的惯性矩。



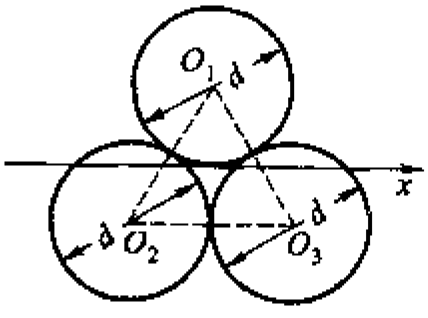
习题Ⅰ－8图



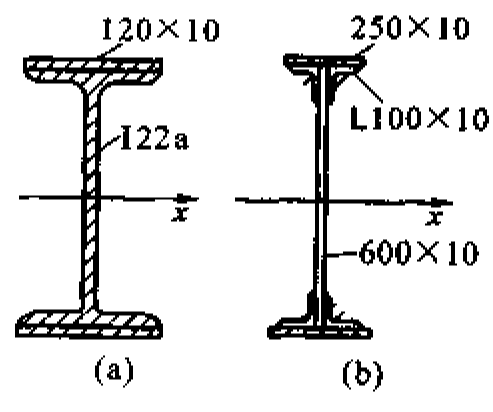
习题Ⅰ－9图

Ⅰ－9 试求图示 $r=1$ m 的半圆形截面对于 x 轴的惯性矩，其中 x 轴与半圆形的底边平行，相距 1 m。

Ⅰ－10 试求图示组合截面对于形心轴 x 的惯性矩。



习题Ⅰ－10图

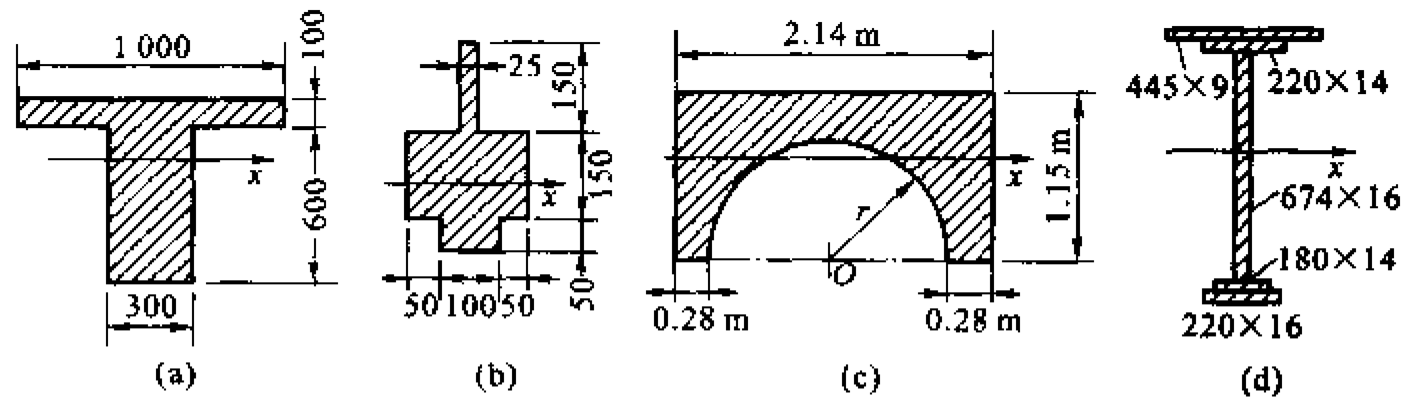


习题Ⅰ－11图

Ⅰ－11 试求图示各组合截面对其对称轴 x 的惯性矩。

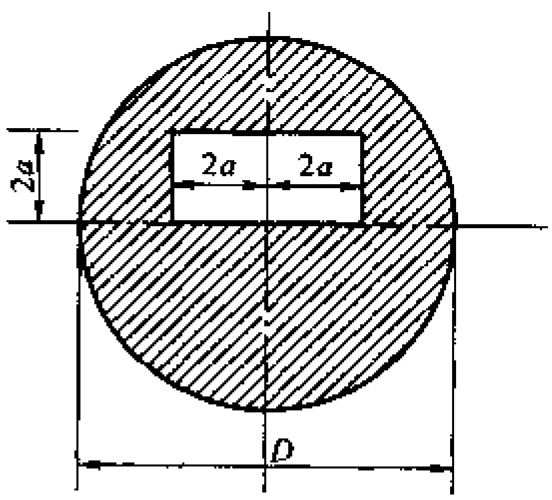
Ⅰ－12 试求习题Ⅰ－3a图所示截面对其水平形心轴 x 的惯性矩。关于形心位置，可利用该题的结果。

I－13　试求图示各截面对其形心轴 x 的惯性矩。

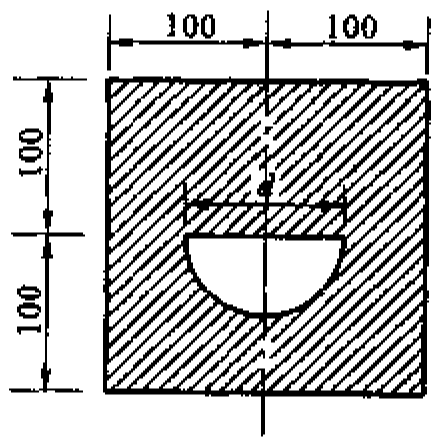


习题 I－13 图

I－14　在直径 $D=8a$ 的圆截面中，开了一个 $2a\times4a$ 的矩形孔，如图所示。试求截面对其水平形心轴和竖直形心轴的惯性矩 I_x 和 I_y。

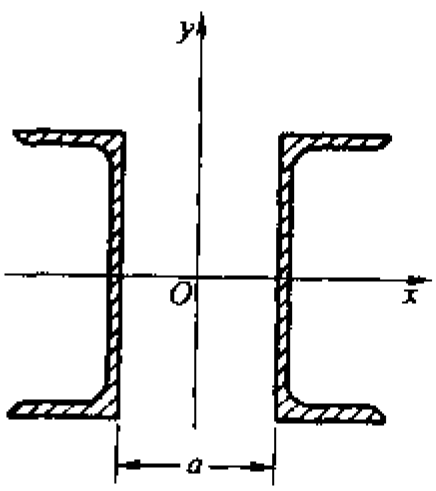


习题 I－14 图

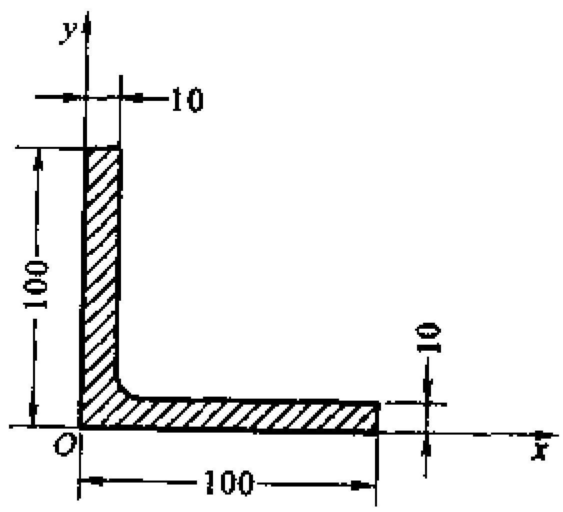


习题 I－15 图

I－15　正方形截面中开了一个直径 $d=100$ mm 的半圆形孔，如图所示。试确定截面的形心位置，并计算对水平形心轴和竖直形心轴的惯性矩。



习题 I－16 图



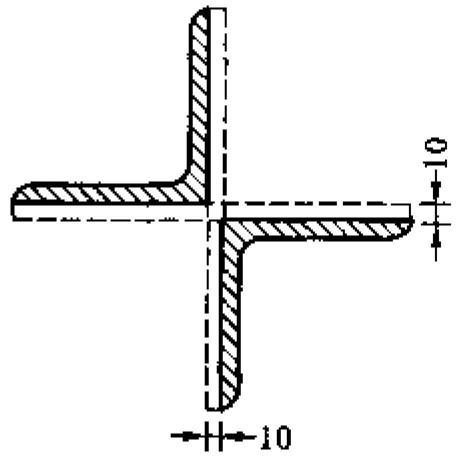
习题 I－17 图

I－16　图示由两个 20a 号槽钢组成的组合截面，如欲使此截面对两对称轴的惯性矩 I_x

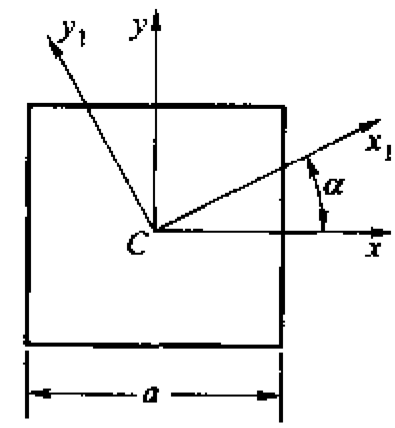
和 I_y 相等，则两槽钢的间距 a 应为多少？

I－17　试求图示截面的惯性积 I_{xy}。

I－18　图示截面由两个 125 mm×125 mm×10 mm 的等边角钢及缀板(图中虚线)组合而成。试求该截面的最大惯性矩 I_{max} 和最小惯性矩 I_{min}。



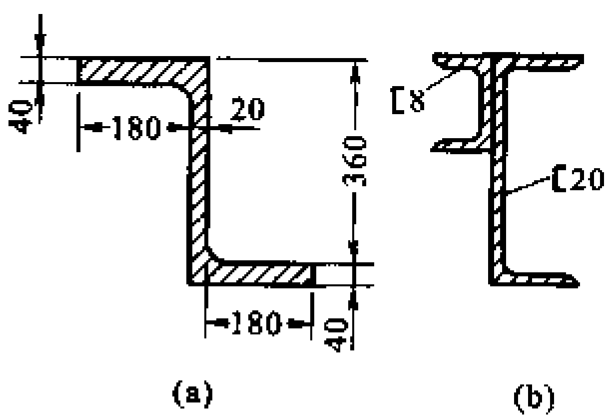
习题 I－18 图



习题 I－19 图

I－19　试求图示正方形截面的惯性积 $I_{x_1y_1}$ 和惯性矩 I_{x_1}，I_{y_1}，并作出相应的结论。

I－20　确定图示截面的形心主惯性轴的位置，并求形心主惯性矩。

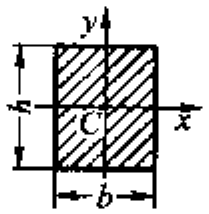
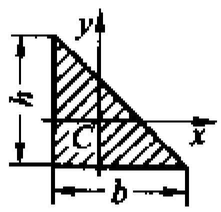
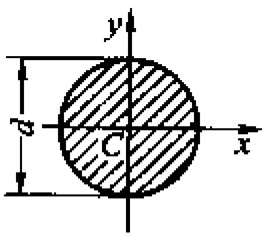
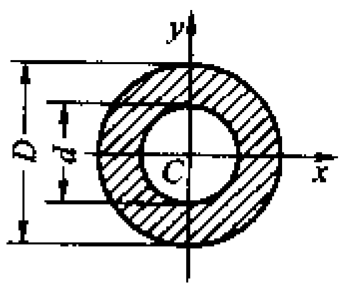
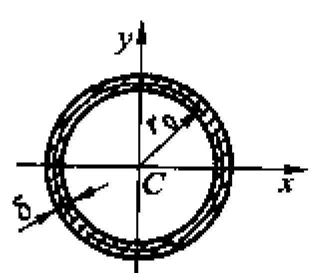


习题 I－20 图

I－21　试用近似法求习题 I－4 所示截面的 I_x，并与该题得出的精确值相比较。已知该截面的半径 $r = 100$ mm。

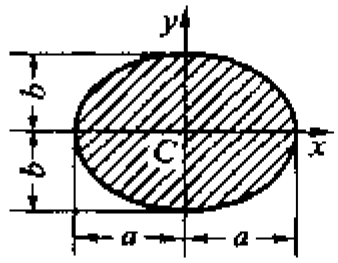
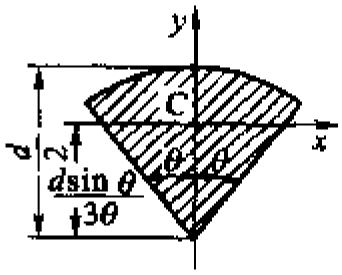
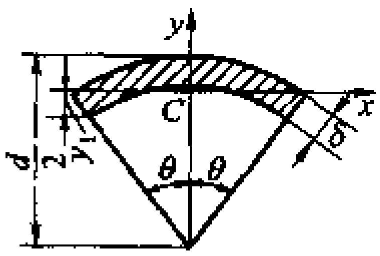
I－22　试证明，直角边长度为 a 的等腰直角三角形，对于平行于直角边的一对形心轴之惯性积为 $I_{xy} = \frac{a^4}{72}$。(提示：最简单的证法是利用惯性积的平行移轴公式，并根据正方形对其本身的一对互相垂直的形心轴的惯性积等于零这一特点。)

附录 II　常用截面的几何性质计算公式[①]

截面形状和形心轴的位置	面积 A	惯性矩		惯性半径	
		I_x	I_y	i_x	i_y
	bh	$\dfrac{bh^3}{12}$	$\dfrac{b^3h}{12}$	$\dfrac{h}{2\sqrt{3}}$	$\dfrac{b}{2\sqrt{3}}$
	$\dfrac{bh}{2}$	$\dfrac{bh^3}{36}$	$\dfrac{b^3h}{36}$	$\dfrac{h}{3\sqrt{2}}$	$\dfrac{b}{3\sqrt{2}}$
	$\dfrac{\pi d^2}{4}$	$\dfrac{\pi d^4}{64}$	$\dfrac{\pi d^4}{64}$	$\dfrac{d}{4}$	$\dfrac{d}{4}$
 $\alpha=\dfrac{d}{D}$	$\dfrac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$	$\dfrac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$	$\dfrac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$	$\dfrac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2}$	$\dfrac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2}$
 $\delta\ll r_0$	$2\pi r_0\delta$	$\pi r_0^3\delta$	$\pi r_0^3\delta$	$\dfrac{r_0}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{r_0}{\sqrt{2}}$

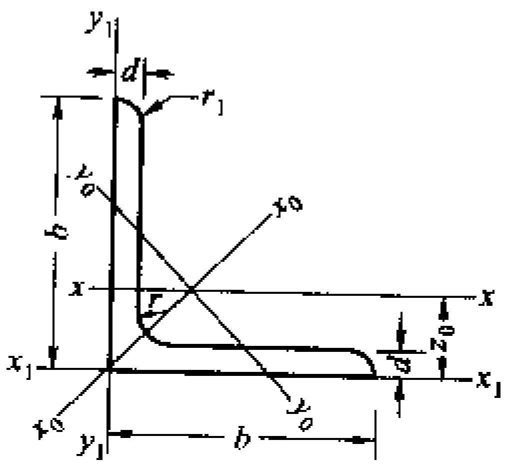
① 在本附录中所用的坐标系与本书各章中所用的不同。在有关对称弯曲的问题中，截面的中性轴可以是本附录中的 x 轴或 y 轴；但对本附录中的三角形截面，则 x，y 轴均非这样的中性轴。希予注意。

续表

截面形状和形心轴的位置	面积 A	惯性矩		惯性半径	
		I_x	I_y	i_x	i_y
	πab	$\frac{\pi}{4}ab^3$	$\frac{\pi}{4}a^3b$	$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$
	$\frac{\theta d^2}{4}$	$\frac{d^4}{64}\left(\theta+\sin\theta\cos\theta-\frac{16\sin^2\theta}{9\theta}\right)$	$\frac{d^4}{64}(\theta-\sin\theta\cos\theta)$		
 $y_1=\frac{d-\delta}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}-\cos\theta\right)+\frac{\delta\cos\theta}{2}$	$\theta\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-\delta\right)^2\right]\approx\theta\delta d$	$\frac{\delta(d-\delta)^3}{8}\left(\theta+\sin\theta\times\cos\theta-\frac{2\sin^2\theta}{\theta}\right)$	$\frac{\delta(d-\delta)^3}{8}(\theta-\sin\theta\cos\theta)$		

附录 III 型钢规格表

表 1 热轧等边角钢(GB 9787—1988)



符号意义：

b——边宽度；

d——边厚度；

r——内圆弧半径；

r_1——边端内圆弧半径；

I——惯性矩；

i——惯性半径；

W——弯曲截面系数；

z_0——重心距离。

角钢号数	尺寸 mm			截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	外表面积 m^2/m	参考数值										z_0 cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x cm^4	i_x cm	W_x cm^3	I_{x_0} cm^4	i_{x_0} cm	W_{x_0} cm^3	I_{y_0} cm^4	i_{y_0} cm	W_{y_0} cm^3	I_{x_1} cm^4	
2	20	3	3.5	1.132	0.889	0.078	0.40	0.59	0.29	0.63	0.75	0.45	0.17	0.39	0.20	0.81	0.60
		4		1.459	1.145	0.077	0.50	0.58	0.36	0.78	0.73	0.55	0.22	0.38	0.24	1.09	0.64
2.5	25	3		1.432	1.124	0.098	0.82	0.76	0.46	1.29	0.95	0.73	0.34	0.49	0.33	1.57	0.73
		4		1.859	1.459	0.097	1.03	0.74	0.59	1.62	0.93	0.92	0.43	0.48	0.40	2.11	0.76

续表

角钢号数	尺寸 mm			截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	外表面积 m^2/m	参考数值										z_0 cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x cm^4	i_x cm	W_x cm^3	I_{x_0} cm^4	i_{x_0} cm	W_{x_0} cm^3	I_{y_0} cm^4	i_{y_0} cm	W_{y_0} cm^3	I_{x_1} cm^4	
3.0	30	3	4.5	1.749	1.373	0.117	1.46	0.91	0.68	2.31	1.15	1.09	0.61	0.59	0.51	2.71	0.85
		4		2.276	1.786	0.117	1.84	0.90	0.87	2.92	1.13	1.37	0.77	0.58	0.62	3.63	0.89
3.6	36	3	4.5	2.109	1.656	0.141	2.58	1.11	0.99	4.09	1.39	1.61	1.07	0.71	0.76	4.68	1.00
		4		2.756	2.163	0.141	3.29	1.09	1.28	5.22	1.38	2.05	1.37	0.70	0.93	6.25	1.04
		5		3.382	2.654	0.141	3.95	1.08	1.56	6.24	1.36	2.45	1.65	0.70	1.09	7.84	1.07
4.0	40	3	5	2.359	1.852	0.157	3.59	1.23	1.23	5.69	1.55	2.01	1.49	0.79	0.96	6.41	1.09
		4		3.086	2.422	0.157	4.60	1.22	1.60	7.29	1.54	2.58	1.91	0.79	1.19	8.56	1.13
		5		3.791	2.976	0.156	5.53	1.21	1.96	8.76	1.52	3.01	2.30	0.78	1.39	10.74	1.17
4.5	45	3		2.659	2.088	0.177	5.17	1.40	1.58	8.20	1.76	2.58	2.14	0.90	1.24	9.12	1.22
		4		3.486	2.736	0.177	6.65	1.38	2.05	10.56	1.74	3.32	2.75	0.89	1.54	12.18	1.26
		5		4.292	3.369	0.176	8.04	1.37	2.51	12.74	1.72	4.00	3.33	0.88	1.81	15.25	1.30
		6		5.076	3.985	0.176	9.33	1.36	2.95	14.76	1.70	4.64	3.89	0.88	2.06	18.36	1.33
5	50	3	5.5	2.971	2.332	0.197	7.18	1.55	1.96	11.37	1.96	3.22	2.98	1.00	1.57	12.50	1.34
		4		3.897	3.059	0.197	9.26	1.54	2.56	14.70	1.94	4.16	3.82	0.99	1.96	16.69	1.38
		5		4.803	3.770	0.196	11.21	1.53	3.13	17.79	1.92	5.03	4.64	0.98	2.31	20.90	1.42
		6		5.688	4.465	0.196	13.05	1.52	3.68	20.68	1.91	5.85	5.42	0.98	2.63	25.14	1.46
5.6	56	3	6	3.343	2.624	0.221	10.19	1.75	2.48	16.14	2.20	4.08	4.24	1.13	2.02	17.56	1.48
		4		4.390	3.446	0.220	13.18	1.73	3.24	20.92	2.18	5.28	5.46	1.11	2.52	23.43	1.53
5.6	56	5	6	5.415	4.251	0.220	16.02	1.72	3.97	25.42	2.17	6.42	6.61	1.10	2.98	29.33	1.57
		8	7	8.367	6.568	0.219	23.63	1.68	6.03	37.37	2.11	9.44	9.89	1.09	4.16	47.24	1.68

续表

角钢号数	尺寸 mm			截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	外表面积 m^2/m	参考数值										z_0 cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x cm^4	i_x cm	W_x cm^3	I_{x_0} cm^4	i_{x_0} cm	W_{x_0} cm^3	I_{y_0} cm^4	i_{y_0} cm	W_{y_0} cm^3	I_{x_1} cm^4	
6.3	63	4	7	4.978	3.907	0.248	19.03	1.96	4.13	30.17	2.46	6.78	7.89	1.26	3.29	33.35	1.70
		5		6.143	4.822	0.248	23.17	1.94	5.08	36.77	2.45	8.25	9.57	1.25	3.90	41.73	1.74
		6		7.288	5.721	0.247	27.12	1.93	6.00	43.03	2.43	9.66	11.20	1.24	4.46	50.14	1.78
		8		9.515	7.469	0.247	34.46	1.90	7.75	54.56	2.40	12.25	14.33	1.23	5.47	67.11	1.85
		10		11.657	9.151	0.246	41.09	1.88	9.39	64.85	2.36	14.56	17.33	1.22	6.36	84.31	1.93
7	70	4	8	5.570	4.372	0.275	26.39	2.18	5.14	41.80	2.74	8.44	10.99	1.40	4.17	45.74	1.86
		5		6.875	5.397	0.275	32.21	2.16	6.32	51.08	2.73	10.32	13.34	1.39	4.95	57.21	1.91
		6		8.160	6.406	0.275	37.77	2.15	7.48	59.93	2.71	12.11	15.61	1.38	5.67	68.73	1.95
		7		9.424	7.398	0.275	43.09	2.14	8.59	68.35	2.69	13.81	17.82	1.38	6.34	80.29	1.99
		8		10.667	8.373	0.274	48.17	2.12	9.68	76.37	2.68	15.43	19.98	1.37	6.98	91.92	2.03
7.5	75	5	9	7.367	5.818	0.295	39.97	2.33	7.32	63.30	2.92	11.94	16.63	1.50	5.77	70.56	2.04
		6		8.797	6.905	0.294	46.95	2.31	8.64	74.38	2.90	14.02	19.51	1.49	6.67	84.55	2.07
		7		10.160	7.976	0.294	53.57	2.30	9.93	84.96	2.89	16.02	22.18	1.48	7.44	98.71	2.11
		8		11.503	9.030	0.294	59.96	2.28	11.20	95.07	2.88	17.93	24.86	1.47	8.19	112.97	2.15
		10		14.126	11.089	0.293	71.98	2.26	13.64	113.92	2.84	21.48	30.05	1.46	9.56	141.71	2.22
8	80	5	9	7.912	6.211	0.315	48.79	2.48	8.34	77.33	3.13	13.67	20.25	1.60	6.66	85.36	2.15
		6		9.397	7.376	0.314	57.35	2.47	9.87	90.98	3.11	16.08	23.72	1.59	7.65	102.50	2.19
		7		10.860	8.525	0.314	65.58	2.46	11.37	104.07	3.10	18.40	27.09	1.58	8.58	119.70	2.23
		8		12.303	9.658	0.314	73.49	2.44	12.83	116.60	3.08	20.61	30.39	1.57	9.46	136.97	2.27
		10		15.126	11.874	0.313	88.43	2.42	15.64	140.09	3.04	24.76	36.77	1.56	11.08	171.74	2.35

续表

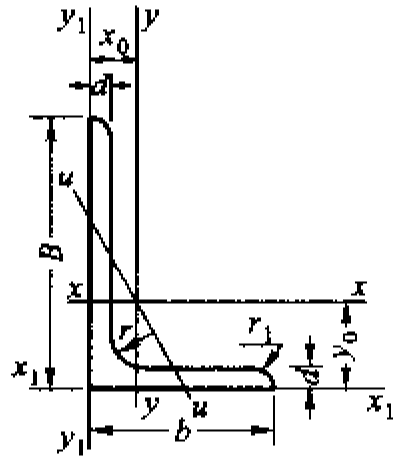
角钢号数	尺寸 mm			截面面积 cm²	理论重量 kg/m	外表面积 m²/m	参考数值										z_0 cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x cm⁴	i_x cm	W_x cm³	I_{x_0} cm⁴	i_{x_0} cm	W_{x_0} cm³	I_{y_0} cm⁴	i_{y_0} cm	W_{y_0} cm³	I_{x_1} cm⁴	
9	90	6	10	10.637	8.350	0.354	82.77	2.79	12.61	131.26	3.51	20.63	34.28	1.80	9.95	145.87	2.44
		7		12.301	9.656	0.354	94.83	2.78	14.54	150.47	3.50	23.64	39.18	1.78	11.19	170.30	2.48
		8		13.944	10.946	0.353	106.47	2.76	16.42	168.97	3.48	26.55	43.97	1.78	12.35	194.80	2.52
		10		17.167	13.476	0.353	128.58	2.74	20.07	203.90	3.45	32.04	53.26	1.76	14.52	244.07	2.59
		12		20.306	15.940	0.352	149.22	2.71	23.57	236.21	3.41	37.12	62.22	1.75	16.49	293.76	2.67
10	100	6	12	11.932	9.366	0.393	114.95	3.01	15.68	181.98	3.90	25.74	47.92	2.00	12.69	200.07	2.67
		7		13.796	10.830	0.393	131.86	3.09	18.10	208.97	3.89	29.55	54.74	1.99	14.26	233.54	2.71
		8		15.638	12.276	0.393	148.24	3.08	20.47	235.07	3.88	33.24	61.41	1.98	15.75	267.09	2.76
		10		19.261	15.120	0.392	179.51	3.05	25.06	284.68	3.84	40.26	74.35	1.96	18.54	334.48	2.84
		12		22.800	17.898	0.391	208.90	3.03	29.48	330.95	3.81	46.80	86.84	1.95	21.08	402.34	2.91
		14		26.256	20.611	0.391	236.53	3.00	33.73	374.06	3.77	52.90	99.00	1.94	23.44	470.75	2.99
		16		29.627	23.257	0.390	262.53	2.98	37.82	414.16	3.74	58.57	110.89	1.94	25.63	539.80	3.06
11	110	7	12	15.196	11.928	0.433	177.16	3.41	22.05	280.94	4.30	36.12	73.38	2.20	17.51	310.64	2.96
		8		17.238	13.532	0.433	199.46	3.40	24.95	316.49	4.28	40.69	82.42	2.19	19.39	355.20	3.01
		10		21.261	16.690	0.432	242.19	3.38	30.60	384.39	4.25	49.42	99.98	2.17	22.91	444.65	3.09
		12		25.200	19.782	0.431	282.55	3.35	36.05	448.17	4.22	57.62	116.93	2.15	26.15	534.60	3.16
		14		29.056	22.809	0.431	320.71	3.32	41.31	508.01	4.18	65.31	133.40	2.14	29.14	625.16	3.24
12.5	125	8	14	19.750	15.504	0.492	297.03	3.88	32.52	470.89	4.88	53.28	123.16	2.50	25.86	521.01	3.37
		10		24.373	19.133	0.491	361.67	3.85	39.97	573.89	4.85	64.93	149.46	2.48	30.62	651.93	3.45
		12		28.912	22.696	0.491	423.16	3.83	41.17	671.44	4.82	75.96	174.88	2.46	35.03	783.42	3.53

续表

角钢号数	尺寸 mm			截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	外表面积 m^2/m	参考数值										z_0 cm
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	
	b	d	r				I_x cm^4	i_x cm	W_x cm^3	I_{x_0} cm^4	i_{x_0} cm	W_{x_0} cm^3	I_{y_0} cm^4	i_{y_0} cm	W_{y_0} cm^3	I_{x_1} cm^4	
12.5	125	14		33.367	26.193	0.490	481.65	3.80	54.16	763.73	4.78	86.41	199.57	2.45	39.13	915.61	3.61
14	140	10	14	27.373	21.488	0.551	514.65	4.34	50.58	817.27	5.46	82.56	212.04	2.78	39.20	915.11	3.82
		12		32.512	25.522	0.551	603.68	4.31	59.80	958.79	5.43	96.85	248.57	2.76	45.02	1 099.28	3.90
		14		37.567	29.490	0.550	688.81	4.28	68.75	1 093.56	5.40	110.47	284.06	2.75	50.45	1 284.22	3.98
		16		42.539	33.393	0.549	770.24	4.26	77.46	1 221.81	5.36	123.42	318.67	2.74	55.55	1 470.07	4.06
16	160	10	16	31.502	24.729	0.630	779.53	4.98	66.70	1 237.30	6.27	109.36	321.76	3.20	52.76	1 365.33	4.31
		12		37.441	29.391	0.630	916.58	4.95	78.98	1 455.68	6.24	128.67	377.49	3.18	60.74	1 639.57	4.39
		14		43.296	33.987	0.629	1 048.36	4.92	90.95	1 665.02	6.20	147.17	431.70	3.16	68.244	1 914.68	4.47
		16		49.067	38.518	0.629	1 175.08	4.89	102.63	1 865.57	6.17	164.89	484.59	3.14	75.31	2 190.82	4.55
18	180	12	16	42.241	33.159	0.710	1 321.35	5.59	100.82	2 100.10	7.05	165.00	542.61	3.58	78.41	2 332.80	4.89
		14		48.896	38.388	0.709	1 514.48	5.56	116.25	2 407.42	7.02	189.14	625.53	3.56	88.38	2 723.48	4.97
		16		55.467	43.542	0.709	1 700.99	5.54	131.13	2 703.37	6.98	212.40	698.60	3.55	97.83	3 115.29	5.05
		18		61.955	48.634	0.708	1 875.12	5.50	145.64	2 988.24	6.94	234.78	762.01	3.51	105.14	3 502.43	5.13
20	200	14	18	54.642	42.894	0.788	2 103.55	6.20	144.70	3 343.26	7.82	236.40	863.83	3.98	111.82	3 734.10	5.46
		16		62.013	48.680	0.788	2 366.15	6.18	163.65	3 760.89	7.79	265.93	971.41	3.96	123.96	4 270.39	5.54
		18		69.301	54.401	0.787	2 620.64	6.15	182.22	4 164.54	7.75	294.48	1 076.74	3.94	135.52	4 808.13	5.62
		20		76.505	60.056	0.787	2 867.30	6.12	200.42	4 554.55	7.72	322.06	1 180.04	3.93	146.55	5 347.51	5.69
		24		90.661	71.168	0.785	2 338.25	6.07	236.17	5 294.97	7.64	374.41	1 381.53	3.90	166.55	6 457.16	5.87

注：截面图中的 $r_1 = d/3$ 及表中 r 值的数据用于孔型设计，不作为交货条件。

表 2 热轧不等边



角钢号数	尺寸 mm				截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	外表面积 m^2/m			
								$x-x$		
	B	b	d	r				I_x cm^4	i_x cm	W_x cm^3
2.5/1.6	25	16	3	3.5	1.162	0.912	0.080	0.70	0.78	0.43
			4		1.499	1.176	0.079	0.88	0.77	0.55
3.2/2	32	20	3		1.492	1.171	0.102	1.53	1.01	0.72
			4		1.939	1.522	0.101	1.93	1.00	0.93
4/2.5	40	25	3	4	1.890	1.484	0.127	3.08	1.28	1.15
			4		2.467	1.936	0.127	3.93	1.26	1.49
4.5/2.8	45	28	3	5	2.149	1.687	0.143	4.45	1.44	1.47
			4		2.806	2.203	0.143	5.69	1.42	1.91
5/3.2	50	32	3	5.5	2.431	1.908	0.161	6.24	1.60	1.84
			4		3.177	2.494	0.160	8.02	1.59	2.39
5.6/3.6	56	36	3	6	2.743	2.153	0.181	8.88	1.80	2.32
			4		3.590	2.818	0.180	11.25	1.79	3.03
			5		4.415	3.466	0.180	13.86	1.77	3.71
6.3/4	63	40	4	7	4.058	3.185	0.202	16.49	2.02	3.87
			5		4.993	3.920	0.202	20.02	2.00	4.74
			6		5.908	4.638	0.201	23.36	1.96	5.59
			7		6.802	5.339	0.201	26.53	1.98	6.40

角钢(GB 9788—1988)

符号意义：

B——长边宽度；　b——短边宽度；

d——边厚度；　r——内圆弧半径；

r_1——边端内圆弧半径；　I——惯性矩；

i——惯性半径；　W——弯曲截面系数；

x_0——形心坐标；　y_0——形心坐标

参考数值										
$y-y$			x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$			
I_y cm^4	i_y cm	W_y cm^3	I_{x_1} cm^4	y_0 cm	I_{y_1} cm^4	x_0 cm	I_u cm^4	i_u cm	W_u cm^3	tanα
0.22	0.44	0.19	1.56	0.86	0.43	0.42	0.14	0.34	0.16	0.392
0.27	0.43	0.24	2.09	0.90	0.59	0.46	0.17	0.34	0.20	0.381
0.46	0.55	0.30	3.27	1.08	0.82	0.49	0.28	0.43	0.25	0.382
0.57	0.54	0.39	4.37	1.12	1.12	0.53	0.35	0.42	0.32	0.374
0.93	0.70	0.49	6.39	1.32	1.59	0.59	0.56	0.54	0.40	0.386
1.18	0.69	0.63	8.53	1.37	2.14	0.63	0.71	0.54	0.52	0.381
1.34	0.79	0.62	9.10	1.47	2.23	0.64	0.80	0.61	0.51	0.383
1.70	0.78	0.80	12.13	1.51	3.00	0.68	1.02	0.60	0.66	0.380
2.02	0.91	0.82	12.49	1.60	3.31	0.73	1.20	0.70	0.68	0.404
2.58	0.90	1.06	16.65	1.65	4.45	0.77	1.53	0.69	0.87	0.402
2.92	1.03	1.05	17.54	1.78	4.70	0.80	1.73	0.79	0.87	0.408
3.76	1.02	1.37	23.39	1.82	6.33	0.85	2.23	0.79	1.13	0.408
4.49	1.01	1.65	29.25	1.87	7.94	0.88	2.67	0.78	1.36	0.404
5.23	1.14	1.70	33.30	2.04	8.63	0.92	3.12	0.88	1.40	0.398
6.31	1.12	2.71	41.63	2.08	10.86	0.95	3.76	0.87	1.71	0.396
7.29	1.11	2.43	49.98	2.12	13.12	0.99	4.34	0.86	1.99	0.393
8.24	1.10	2.78	58.07	2.15	15.47	1.03	4.97	0.86	2.29	0.389

角钢号数	尺寸 mm				截面面积 cm²	理论重量 kg/m	外表面积 m²/m	x－x		
	B	b	d	r				I_x cm⁴	i_x cm	W_x cm³
7/4.5	70	45	4	7.5	4.547	3.570	0.226	23.17	2.26	4.86
			5		5.609	4.403	0.225	27.95	2.23	5.92
			6		6.647	5.218	0.225	32.54	2.21	6.95
			7		7.657	6.011	0.225	37.22	2.20	8.03
(7.5/5)	75	50	5	8	6.125	4.808	0.245	34.86	2.39	6.83
			6		7.260	5.699	0.245	41.12	2.38	8.12
			8		9.467	7.431	0.244	52.39	2.35	10.52
			10		11.590	9.098	0.244	62.71	2.33	12.79
8/5	80	50	5	8	6.375	5.005	0.255	41.96	2.56	7.78
			6		7.560	5.935	0.255	49.49	2.56	9.25
			7		8.724	6.848	0.255	56.16	2.54	10.58
			8		9.867	7.745	0.254	62.83	2.52	11.92
9/5.6	90	56	5	9	7.212	5.661	0.287	60.45	2.90	9.92
			6		8.557	6.717	0.286	71.03	2.88	11.74
			7		9.880	7.756	0.286	81.01	2.86	13.49
			8		11.183	8.779	0.286	91.03	2.85	15.27
10/6.3	100	63	6	10	9.617	7.550	0.320	99.06	3.21	14.64
			7		11.111	8.722	0.320	113.45	3.29	16.88
			8		12.584	9.878	0.319	127.37	3.18	19.08
			10		15.467	12.142	0.319	153.81	3.15	23.32
10/8	100	80	6	10	10.637	8.350	0.354	107.04	3.17	15.19
			7		12.301	9.656	0.354	122.73	3.16	17.52
			8		13.944	10.946	0.353	137.92	3.14	19.81
			10		17.167	13.476	0.353	166.87	3.12	24.24

续表

参考数值										
$y-y$			x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$			
I_y cm^4	i_y cm	W_y cm^3	I_{x_1} cm^4	y_0 cm	I_{y_1} cm^4	x_0 cm	I_u cm^4	i_u cm	W_u cm^3	$\tan\alpha$
7.55	1.29	2.17	45.92	2.24	12.26	1.02	4.40	0.98	1.77	0.410
9.13	1.28	2.65	57.10	2.28	15.39	1.06	5.40	0.98	2.19	0.407
10.62	1.26	3.12	68.35	2.32	18.58	1.09	6.35	0.98	2.59	0.404
12.01	1.25	3.57	79.99	2.36	21.84	1.13	7.16	0.97	2.94	0.402
12.61	1.44	3.30	70.00	2.40	21.04	1.17	7.41	1.10	2.74	0.435
14.70	1.42	3.88	84.30	2.44	25.37	1.21	8.54	1.08	3.19	0.435
18.53	1.40	4.99	112.50	2.52	34.23	1.29	10.87	1.07	4.10	0.429
21.96	1.38	6.04	140.80	2.60	43.43	1.36	13.10	1.06	4.99	0.423
12.82	1.42	3.32	85.21	2.60	21.06	1.14	7.66	1.10	2.74	0.388
14.95	1.41	3.91	102.53	2.65	25.41	1.18	8.85	1.08	3.20	0.387
16.96	1.39	4.48	119.33	2.69	29.82	1.21	10.18	1.08	3.70	0.384
18.85	1.38	5.03	136.41	2.73	34.32	1.25	11.38	1.07	4.16	0.381
18.32	1.59	4.21	121.32	2.91	29.53	1.25	10.98	1.23	3.49	0.385
21.42	1.58	4.96	145.59	2.95	35.58	1.29	12.90	1.23	4.18	0.384
24.36	1.57	5.70	169.66	3.00	41.71	1.33	14.67	1.22	4.72	0.382
27.15	1.56	6.41	194.17	3.04	47.93	1.36	16.34	1.21	5.29	0.380
30.94	1.79	6.35	199.71	3.24	50.50	1.43	18.42	1.38	5.25	0.394
35.26	1.78	7.29	233.00	3.28	59.14	1.47	21.00	1.38	6.02	0.393
39.39	1.77	8.21	266.32	3.32	67.88	1.50	23.50	1.37	6.78	0.391
47.12	1.74	9.98	333.06	3.40	85.73	1.58	28.33	1.35	8.24	0.387
61.24	2.40	10.16	199.83	2.95	102.68	1.97	31.65	1.72	8.37	0.627
70.08	2.39	11.71	233.20	3.00	119.98	2.01	36.17	1.72	9.60	0.626
78.58	2.37	13.21	266.61	3.04	137.37	2.05	40.58	1.71	10.80	0.625
94.65	2.35	16.12	333.63	3.12	172.48	2.13	49.10	1.69	13.12	0.622

角钢号数	尺寸 mm				截面面积	理论重量	外表面积	$x-x$		
	B	b	d	r	cm^2	kg/m	m^2/m	I_x cm^4	i_x cm	W_x cm^3
11/7	110	70	6	10	10.637	8.350	0.354	133.37	3.54	17.85
			7		12.301	9.656	0.354	153.00	3.53	20.60
			8		13.944	10.946	0.353	172.04	3.51	23.30
			10		17.167	13.476	0.353	208.39	3.48	28.54
12.5/8	125	80	7	11	14.096	11.066	0.403	227.98	4.02	26.86
			8		15.989	12.551	0.403	256.77	4.01	30.41
			10		19.712	15.474	0.402	312.04	3.98	37.33
			12		23.351	18.330	0.402	364.41	3.95	44.01
14/9	140	90	8	12	18.038	14.160	0.453	365.64	4.50	38.48
			10		22.261	17.475	0.452	445.50	4.47	47.31
			12		26.400	20.724	0.451	521.59	4.44	55.87
			14		30.456	23.908	0.451	594.10	4.42	64.18
16/10	160	100	10	13	25.315	19.872	0.512	668.69	5.14	62.13
			12		30.054	23.592	0.511	784.91	5.11	73.49
			14		34.709	27.247	0.510	896.30	5.08	84.56
			16		39.281	30.835	0.510	1 003.04	5.05	95.33
18/11	180	110	10	14	28.373	22.273	0.571	956.25	5.80	78.96
			12		33.712	26.464	0.571	1 124.72	5.78	93.53
			14		38.967	30.589	0.570	1 286.91	5.75	107.76
			16		44.139	34.649	0.569	1 443.06	5.72	121.64
20/12.5	200	125	12		37.912	29.761	0.641	1 570.90	6.44	116.73
			14		43.867	34.436	0.640	1 800.97	6.41	134.65
			16		49.739	39.045	0.639	2 023.35	6.38	152.18
			18		55.526	43.588	0.639	2 238.30	6.35	169.33

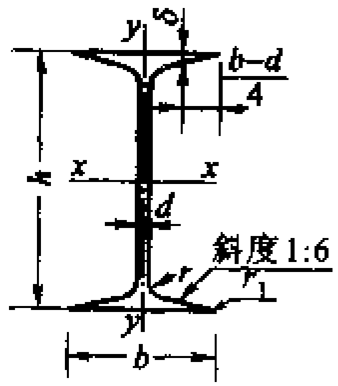
注:1. 括号内型号不推荐使用。2. 截面图中的 $r_1=d/3$ 及表中 r 的数据用于孔型设计,不作为交

续表

参考数值										
$y-y$			x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$			
I_y cm^4	i_y cm	W_y cm^3	I_{x_1} cm^4	y_0 cm	I_{y_1} cm^4	x_0 cm	I_u cm^4	i_u cm	W_u cm^3	$\tan\alpha$
42.92	2.01	7.90	265.78	3.53	69.08	1.57	25.36	1.54	6.53	0.403
49.01	2.00	9.09	310.07	3.57	80.82	1.61	28.95	1.53	7.50	0.402
54.87	1.98	10.25	354.39	3.62	92.70	1.65	32.45	1.53	8.45	0.401
65.88	1.96	12.48	443.13	3.70	116.83	1.72	39.20	1.51	10.29	0.397
74.42	2.30	12.01	454.99	4.01	120.32	1.80	43.81	1.76	9.92	0.408
83.49	2.28	13.56	519.99	4.06	137.85	1.84	49.15	1.75	11.18	0.407
100.67	2.26	16.56	650.09	4.14	173.40	1.92	59.45	1.74	13.64	0.404
116.67	2.24	19.43	780.39	4.22	209.67	2.00	69.35	1.72	16.01	0.400
120.69	2.59	17.34	730.53	4.50	195.79	2.04	70.83	1.98	14.31	0.411
146.03	2.56	21.22	913.20	4.58	245.92	2.12	85.82	1.96	17.48	0.409
169.79	2.54	24.95	1 096.09	4.66	296.89	2.19	100.21	1.95	20.54	0.406
192.10	2.51	28.54	1 279.26	4.74	348.82	2.27	114.13	1.94	23.52	0.403
205.03	2.85	26.56	1 362.89	5.24	336.59	2.28	121.74	2.19	21.92	0.390
239.06	2.82	31.28	1 635.56	5.32	405.94	2.36	142.33	2.17	25.79	0.388
271.20	2.80	35.83	1 908.50	5.40	476.42	2.43	162.23	2.16	29.56	0.385
301.60	2.77	40.24	2 181.79	5.48	548.22	2.51	182.57	2.16	33.44	0.382
278.11	3.13	32.49	1 940.40	5.89	447.22	2.44	166.50	2.42	26.88	0.376
325.03	3.10	38.32	2 328.38	5.98	538.94	2.52	194.87	2.40	31.66	0.374
369.55	3.08	43.97	2 716.60	6.06	631.95	2.59	222.30	2.39	36.32	0.372
411.85	3.06	49.44	3 105.15	6.14	726.46	2.67	248.94	2.38	40.87	0.369
483.16	3.57	49.99	3 193.85	6.54	787.74	2.83	285.79	2.74	41.23	0.392
550.83	3.54	57.44	3 726.17	6.02	922.47	2.91	326.58	2.73	47.34	0.390
615.44	3.52	64.69	4 258.86	6.70	1 058.86	2.99	366.21	2.71	53.32	0.388
677.19	3.49	71.74	4 792.00	6.78	1 197.13	3.06	404.83	2.70	59.18	0.385

货条件。

表3 热轧工字钢(GB 706—1988)



符号意义：

h——高度；

b——腿宽度；

d——腰厚度；

δ——平均腿厚度；

r——内圆弧半径；

r_1——腿端圆弧半径；

I——惯性矩；

W——弯曲截面系数；

i——惯性半径；

S——半截面的静矩。

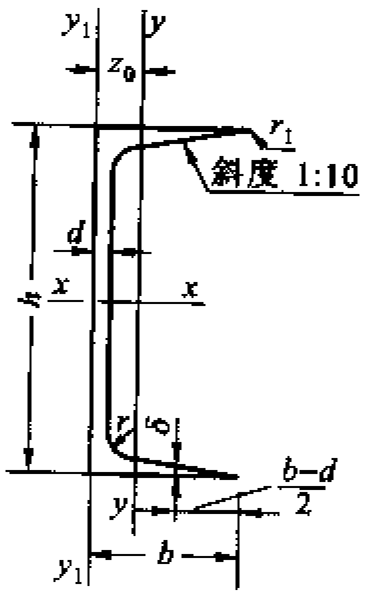
型号	尺寸 mm						截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	参考数值						
									$x-x$				$y-y$		
	h	b	d	δ	r	r_1			I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	$I_x:S_x$ cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.3	11.2	245	49	4.14	8.59	33	9.72	1.52
12.6	126	74	5	8.4	7	3.5	18.1	14.2	488.43	77.529	5.195	10.85	46.906	12.677	1.609
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.5	16.9	712	102	5.76	12	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6	9.9	8	4	26.1	20.5	1 130	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.6	24.1	1 660	185	7.36	15.4	122	26	2
20a	200	100	7	11.4	9	4.5	35.5	27.9	2 370	237	8.15	17.2	158	31.5	2.12
20b	200	102	9	11.4	9	4.5	39.5	31.1	2 500	250	7.96	16.9	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42	33	3 400	309	8.99	18.9	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.4	36.4	3 570	325	8.78	18.7	239	42.7	2.27
25a	250	116	8	13	10	5	48.5	38.1	5 023.54	401.88	10.18	21.58	280.046	48.283	2.403
25b	250	118	10	13	10	5	53.5	42	5 283.96	422.72	9.938	21.27	309.297	52.423	2.404
28a	280	122	8.5	13.7	10.5	5.3	55.45	43.4	7 114.14	508.15	11.32	24.62	345.051	56.565	2.495
28b	280	124	10.5	13.7	10.5	5.3	61.05	47.9	7 480	534.29	11.08	24.24	379.496	61.209	2.493

续表

型号	尺寸 mm						截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	参考数值						
									$x-x$				$y-y$		
	h	b	d	δ	r	r_1			I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	$I_x:S_x$ cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm
32a	320	130	9.5	15	11.5	5.8	67.05	52.7	11 075.5	692.2	12.84	27.46	459.93	70.758	2.619
32b	320	132	11.5	15	11.5	5.8	73.45	57.7	11 621.4	726.33	12.58	27.09	501.53	75.989	2.614
32c	320	134	13.5	15	11.5	5.8	79.95	62.8	12 167.5	760.47	12.34	26.77	543.81	81.166	2.608
36a	360	136	10	15.8	12	6	76.3	59.9	15 760	875	14.4	30.7	552	81.2	2.69
36b	360	138	12	15.8	12	6	83.5	65.6	16 530	919	14.1	30.3	582	84.3	2.64
36c	360	140	14	15.8	12	6	90.7	71.2	17 310	962	13.8	29.9	612	87.4	2.6
40a	400	142	10.5	16.5	12.5	6.3	86.1	67.6	21 720	1 090	15.9	34.1	660	93.2	2.77
40b	400	144	12.5	16.5	12.5	6.3	94.1	73.8	22 780	1 140	15.6	33.6	692	96.2	2.71
40c	400	146	14.5	16.5	12.5	6.3	102	80.1	23 850	1 190	15.2	33.2	727	99.6	2.65
45a	450	150	11.5	18	13.5	6.8	102	80.4	32 240	1 430	17.7	38.6	855	114	2.89
45b	450	152	13.5	18	13.5	6.8	111	87.4	33 760	1 500	17.4	38	894	118	2.84
45c	450	154	15.5	18	13.5	6.8	120	94.5	35 280	1 570	17.1	37.6	938	122	2.79
50a	500	158	12	20	14	7	119	93.6	46 470	1 860	19.7	42.8	1 120	142	3.07
50b	500	160	14	20	14	7	129	101	48 560	1 940	19.4	42.4	1 170	146	3.01
50c	500	162	16	20	14	7	139	109	50 640	2 080	19	41.8	1 220	151	2.96
56a	560	166	12.5	21	14.5	7.3	135.25	106.2	65 585.6	2 342.31	22.02	47.73	1 370.16	165.08	3.182
56b	560	168	14.5	21	14.5	7.3	146.45	115	68 512.5	2 446.69	21.63	47.17	1 486.75	174.25	3.162
56c	560	170	16.5	21	14.5	7.3	157.85	123.9	71 439.4	2 551.41	21.27	46.66	1 558.39	183.34	3.158
63a	630	176	13	22	15	7.5	154.9	121.6	93 916.2	2 981.47	24.62	54.17	1 700.55	193.24	3.314
63b	630	178	15	22	15	7.5	167.5	131.5	98 083.6	3 163.38	24.2	53.51	1 812.07	203.6	3.289
63c	630	180	17	22	15	7.5	180.1	141	102 251.1	3 298.42	23.82	52.92	1 924.91	213.88	3.268

注：截面图和表中标注的圆弧半径 r, r_1 的数据用于孔型设计，不作为交货条件。

表 4 热轧槽钢(GB 707—1988)



符号意义：

h——高度；

b——腿宽度；

d——腰厚度；

δ——平均腿厚度；

r——内圆弧半径；

r_1——腿端圆弧半径；

I——惯性矩；

W——弯曲截面系数；

i——惯性半径；

z_0——$y-y$ 轴与 y_1-y_1 轴间距

型号	尺寸 mm						截面面积	理论重量	参考数值							
									$x-x$			$y-y$			y_1-y_1	z_0
	h	b	d	δ	r	r_1	cm^2	kg/m	W_x cm^3	I_x cm^4	i_x cm	W_y cm^3	I_y cm^4	i_y cm	I_{y_1} cm^4	cm
5	50	37	4.5	7	7	3.5	6.93	5.44	10.4	26	1.94	3.55	8.3	1.1	20.9	1.35
6.3	63	40	4.8	7.5	7.5	3.75	8.444	6.63	16.123	50.786	2.453	4.50	11.872	1.185	28.38	1.36
8	80	43	5	8	8	4	10.24	8.04	25.3	101.3	3.15	5.79	16.6	1.27	37.4	1.43
10	100	48	5.3	8.5	8.5	4.25	12.74	10	39.7	198.3	3.95	7.8	25.6	1.41	54.9	1.52
12.6	126	53	5.5	9	9	4.5	15.69	12.37	62.137	391.466	4.953	10.242	37.99	1.567	77.09	1.59
14a	140	58	6	9.5	9.5	4.75	18.51	14.53	80.5	563.7	5.52	13.01	53.2	1.7	107.1	1.71
14b	140	60	8	9.5	9.5	4.75	21.31	16.73	87.1	609.4	5.35	14.12	61.1	1.69	120.6	1.67
16a	160	63	6.5	10	10	5	21.95	17.23	108.3	866.2	6.28	16.3	73.3	1.83	144.1	1.8
16	160	65	8.5	10	10	5	25.15	19.74	116.8	934.5	6.1	17.55	83.4	1.82	160.8	1.75

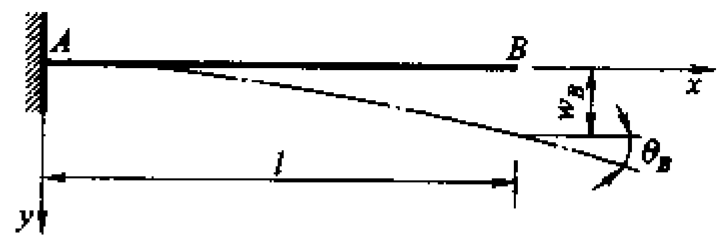
续表

型号	尺寸 mm						截面面积 cm^2	理论重量 kg/m	参考数值							
									$x-x$			$y-y$			y_1-y_1	z_0
	h	b	d	δ	r	r_1			W_x cm^3	I_x cm^4	i_x cm	W_y cm^3	I_y cm^4	i_y cm	I_{y_1} cm^4	cm
18a	180	68	7	10.5	10.5	5.25	25.69	20.17	141.4	1 272.7	7.04	20.03	98.6	1.96	189.7	1.88
18	180	70	9	10.5	10.5	5.25	29.29	22.99	152.2	1 369.9	6.84	21.52	111	1.95	210.1	1.84
20a	200	73	7	11	11	5.5	28.83	22.63	178	1 780.4	7.86	24.2	128	2.11	244	2.01
20	200	75	9	11	11	5.5	32.83	25.77	191.4	1 913.7	7.64	25.88	143.6	2.09	268.4	1.95
22a	220	77	7	11.5	11.5	5.75	31.84	24.99	217.6	2 393.9	8.67	28.17	157.8	2.23	298.2	2.1
22	220	79	9	11.5	11.5	5.75	36.24	28.45	233.8	2 571.4	8.42	30.05	176.4	2.21	326.3	2.03
a	250	78	7	12	12	6	34.91	27.47	269.597	3 369.62	9.823	30.607	175.529	2.243	322.256	2.065
25b	250	80	9	12	12	6	39.91	31.39	282.402	3 530.04	9.405	32.657	196.421	2.218	353.187	1.982
c	250	82	11	12	12	6	44.91	35.32	295.236	3 690.45	9.065	35.926	218.415	2.206	384.133	1.921
a	280	82	7.5	12.5	12.5	6.25	40.02	31.42	340.328	4 764.59	10.91	35.718	217.989	2.333	387.566	2.097
28b	280	84	9.5	12.5	12.5	6.25	45.62	35.81	366.46	5 130.45	10.6	37.929	242.144	2.304	427.589	2.016
c	280	86	11.5	12.5	12.5	6.25	51.22	40.21	392.594	5 496.32	10.35	40.301	267.602	2.286	426.597	1.951
a	320	88	8	14	14	7	48.7	38.22	474.879	7 598.06	12.49	46.473	304.787	2.502	552.31	2.242
32b	320	90	10	14	14	7	55.1	43.25	509.012	8 144.2	12.15	49.157	336.332	2.471	592.933	2.158
c	320	92	12	14	14	7	61.5	48.28	543.145	8 690.33	11.88	52.642	374.175	2.467	643.299	2.092
a	360	96	9	16	16	8	60.89	47.8	659.7	11 874.2	13.97	63.54	455	2.73	818.4	2.44
36b	360	98	11	16	16	8	68.09	53.45	702.9	12 651.8	13.63	66.85	496.7	2.7	880.4	2.37
c	360	100	13	16	16	8	75.29	50.1	746.1	13 429.4	13.36	70.02	536.4	2.67	947.9	2.34
a	400	100	10.5	18	18	9	75.05	58.91	878.9	17 577.9	15.30	78.83	592	2.81	1 067.7	2.49
40b	400	102	12.5	18	18	9	83.05	65.19	932.2	18 644.5	14.98	82.52	640	2.78	1 135.6	2.44
c	400	104	14.5	18	18	9	91.05	71.47	985.6	19 711.2	14.71	86.19	687.8	2.75	1 220.7	2.42

注：截面图和表中标注的圆弧半径 r、r_1 的数据用于孔型设计，不作为交货条件。

附录 IV　简单荷载作用下梁的挠度和转角

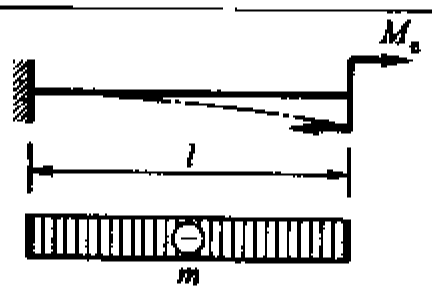
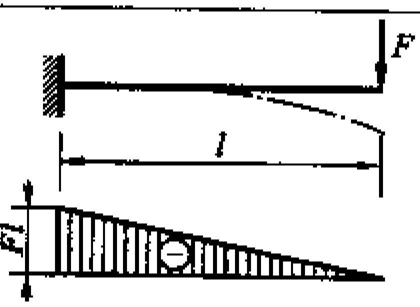
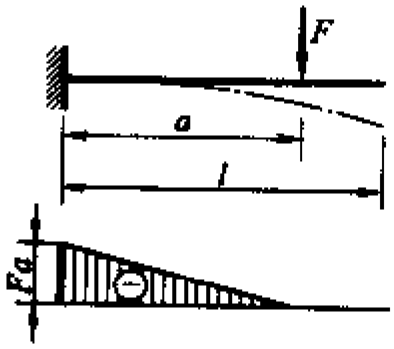
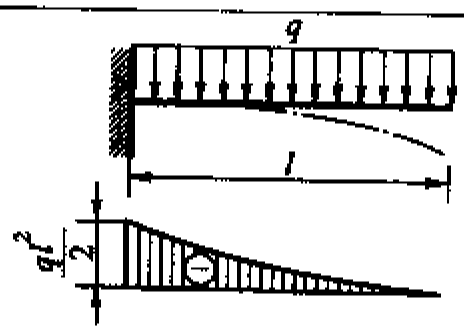
悬臂梁



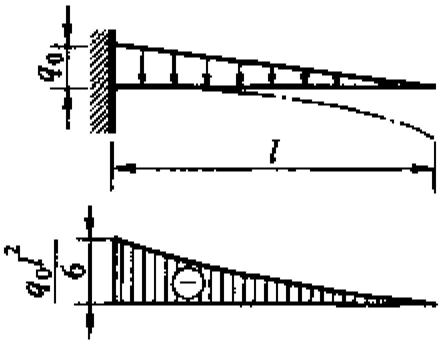
w = 沿 y 方向的挠度

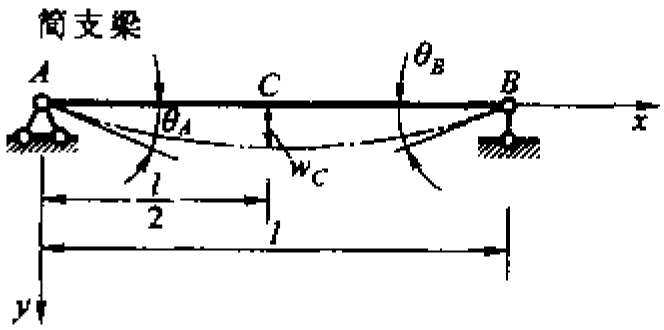
$w_B = w(l)$ = 梁右端处的挠度

$\theta_B = w'(l)$ = 梁右端处的转角

序号	梁上荷载及弯矩图	挠曲线方程	转角和挠度
1		$w=\frac{M_e x^2}{2EI}$	$\theta_B=\frac{M_e l}{EI}$ $w_B=\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$w=\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=\frac{Fl^2}{2EI}$ $w_B=\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$w=\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a)$ $(a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_B=\frac{Fa^2}{2EI}$ $w_B=\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$
4		$w=\frac{qx^2}{24EI}(x^2+6l^2-4lx)$	$\theta_B=\frac{ql^3}{6EI}$ $w_B=\frac{ql^4}{8EI}$

续表

序号	梁上荷载及弯矩图	挠曲线方程	转角和挠度
5		$w=\frac{q_0x^2}{120EIl}(10l^4-10l^2x+5lx^2-x^3)$	$\theta_B=\frac{q_0l^3}{24EI}$ $w_B=\frac{q_0l^4}{30EI}$

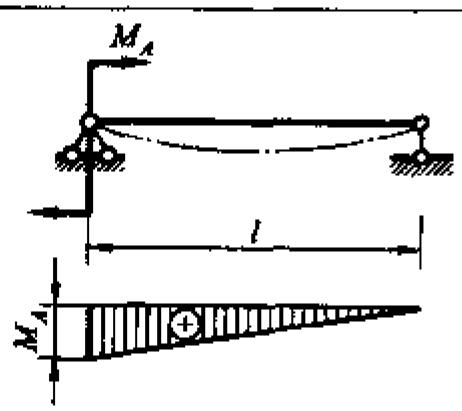
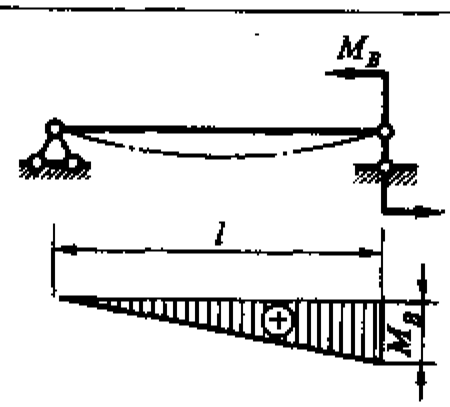
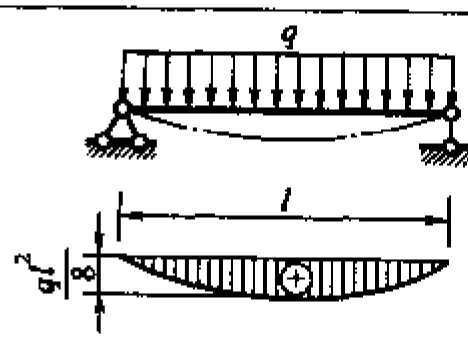


w = 沿 y 方向的挠度

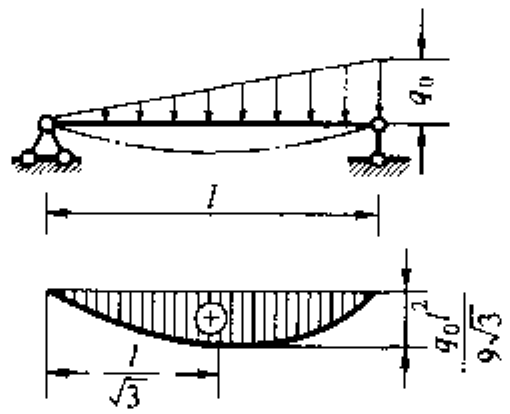
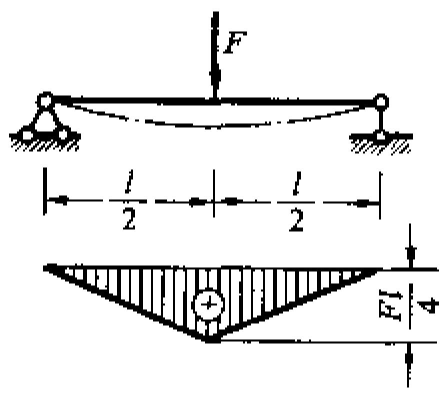
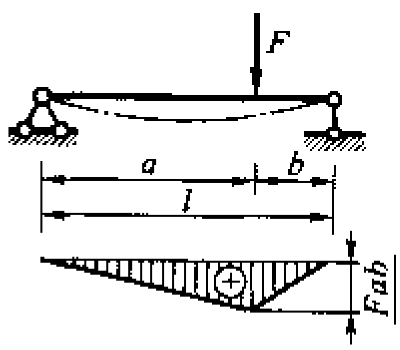
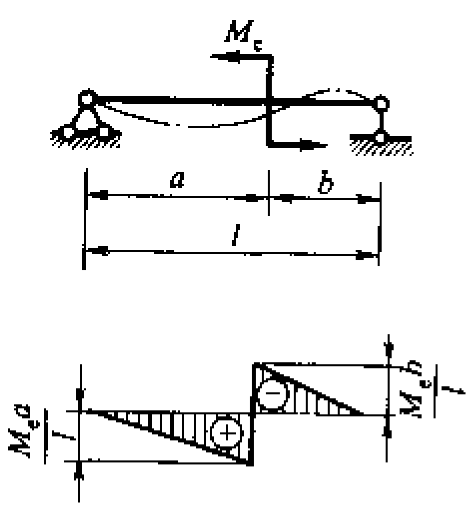
$w_C=w\left(\frac{l}{2}\right)$ = 梁的中点挠度

$\theta_A=w'(0)$ = 梁左端处的转角

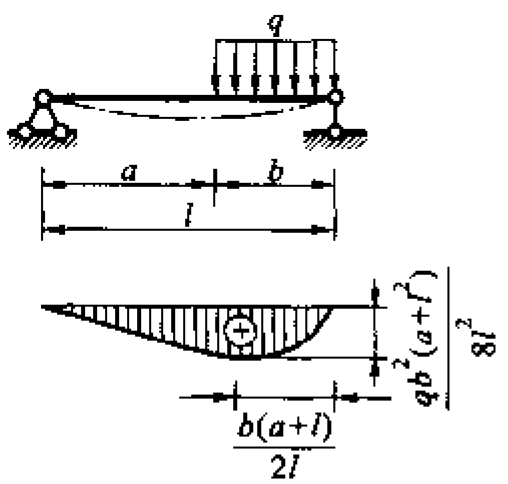
$\theta_B=w'(l)$ = 梁右端处的转角

序号	梁上荷载及弯矩图	挠曲线方程	转角和挠度
6		$w=\frac{M_Ax}{6EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=\frac{M_Al}{3EI}$ $\theta_B=-\frac{M_Al}{6EI}$ $w_C=\frac{M_Al^2}{16EI}$
7		$w=\frac{M_Bx}{6EIl}(l^2-x^2)$	$\theta_A=\frac{M_Bl}{6EI}$ $\theta_B=-\frac{M_Bl}{3EI}$ $w_C=\frac{M_Bl^2}{16EI}$
8		$w=\frac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\theta_A=\frac{ql^3}{24EI}$ $\theta_B=-\frac{ql^3}{24EI}$ $w_C=\frac{5ql^4}{384EI}$

续表

序号	梁上荷载及弯矩图	挠曲线方程	转角和挠度
9		$w=\frac{q_0x}{360EIl}(7l^4-10l^2x^2+3x^4)$	$\theta_A=\frac{7q_0l^3}{360EI}$ $\theta_B=-\frac{q_0l^3}{45EI}$ $w_C=\frac{5q_0l^4}{768EI}$
10		$w=\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\right)$	$\theta_A=\frac{Fl^2}{16EI}$ $\theta_B=-\frac{Fl^2}{16EI}$ $w_C=\frac{Fl^3}{48EI}$
11		$w=\frac{Fbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=\frac{Fb}{6EIl}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right]$ $(a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_A=\frac{Fab(l+b)}{6EIl}$ $\theta_B=-\frac{Fab(l+a)}{6EIl}$ $w_C=\frac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$ (当 $a\geqslant b$ 时)
12		$w=\frac{M_ex}{6EIl}(6al-3a^2-2l^2-x^2)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 当 $a=b=\frac{l}{2}$ 时， $w=\frac{M_ex}{24EIl}(l^2-4x^2)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\right)$	$\theta_A=\frac{M_e}{6EIl}(6al-3a^2-2l^2)$ $\theta_B=\frac{M_e}{6EIl}(l^2-3a^2)$ 当 $a=b=\frac{l}{2}$ 时， $\theta_A=\frac{M_el}{24EI}$ $\theta_B=\frac{M_el}{24EI}$，$w_C=0$

续表

序号	梁上荷载及弯矩图	挠曲线方程	转角和挠度
13		$w=-\frac{qb^5}{24EIl}\left[2\frac{x^3}{b^3}-\frac{x}{b}\left(2\frac{l^2}{b^2}-1\right)\right]$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\frac{q}{24EI}\left[2\frac{b^2x^3}{l}-\frac{b^2x}{l}(2l^2-b^2)-(x-a)^4\right]$ $(a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_A=\frac{qb^2(2l^2-b^2)}{24EIl}$ $\theta_B=-\frac{qb^2(2l-b)^2}{24EIl}$ $w_C=\frac{qb^5}{24EIl}\left(\frac{3}{4}\frac{l^3}{b^3}-\frac{1}{2}\frac{l}{b}\right)$ （当 $a>b$ 时） $w_C=\frac{qb^5}{24EIl}\left[\frac{3}{4}\frac{l^3}{b^3}-\frac{1}{2}\frac{l}{b}+\frac{1}{16}\frac{l^5}{b^5}\cdot\left(1-\frac{2a}{l}\right)^4\right]$ （当 $a<b$ 时）

主要参考书

1 孙训方,方孝淑,陆耀洪编. 材料力学:上册. 第2版. 北京:高等教育出版社,1987

2 孙训方,方孝淑,陆耀洪编. 材料力学:下册. 第2版. 北京:高等教育出版社,1991

3 单辉祖编著. 材料力学(I). 北京:高等教育出版社,1999

4 单辉祖编著. 材料力学(II). 北京:高等教育出版社,1999

5 胡增强主编. 固体力学基础. 南京:东南大学出版社,1990

6 王龙甫编. 弹性理论. 北京:科学出版社,1978

7 徐秉业,刘信声编著. 结构塑性极限分析. 北京:中国建筑工业出版社,1985

8 宗听聪编. 钢结构. 北京:中国建筑工业出版社,1985

9 Gere J M, Timoshenko S P. Mechanics of materials. SI Edition. New York: Van Nostrand Reinhold, 1984

10 Archer R R, Lardner T J, et al. An introduction to the mechanics of solids. Second Edittion (SI Units). New York: McGraw-Hill, 1978

习题答案

第 二 章

2-1 (a) $F_{N1} = F$，$F_{N2} = -F$

(b) $F_{N1} = 2F$，$F_{N2} = 0$

(c) $F_{N1} = 2F$，$F_{N2} = F$

(d) $F_{N1} = F$，$F_{N2} = -2F$

2-2 $F_{N1} = -20\ \text{kN}$，$\sigma = 50\ \text{MPa}$

$F_{N2} = -10\ \text{kN}$，$\sigma = -25\ \text{MPa}$

$F_{N3} = 10\ \text{kN}$，$\sigma = 25\ \text{MPa}$

2-3 $F_{N1} = -20\ \text{kN}$，$\sigma = -100\ \text{MPa}$

$F_{N2} = -10\ \text{kN}$，$\sigma = -33.3\ \text{MPa}$

$F_{N3} = 10\ \text{kN}$，$\sigma = 25\ \text{MPa}$

2-4 $\sigma_{AE} = 159.1\ \text{MPa}$，$\sigma_{EG} = 154.8\ \text{MPa}$

2-5 $\sigma = -0.34\ \text{MPa}$

2-6

截面方位	σ_α/MPa	τ_α/MPa
0°	100	0
30°	75	43.3
45°	50	50
60°	25	43.3
90°	0	0

2-7 $\Delta_D = \dfrac{Fl}{3EA}$

2-8 (1) 最大压力 $F_{NCB} = 260\ \text{kN}$

(2) $\sigma_{AC} = -2.5\ \text{MPa}$，$\sigma_{CB} = -6.5\ \text{MPa}$

(3) $\varepsilon_{AC} = -0.25\times10^{-3}$，$\varepsilon_{CB} = -0.65\times10^{-3}$

(4) $\Delta l = -1.35\ \text{mm}$

2-9 $\sigma = 149\ \text{MPa}$，$E = 203\ \text{GPa}$

2-10 (2) $F = 13.75\ \text{kN}$；(3) $\delta = 29.99\ \text{mm}$

2-11 $\Delta_{CD} = -1.003\dfrac{\nu F}{4E\delta}$

2-12 $\delta_{Cx} = 0.476\ \text{mm}(\rightarrow)$，$\delta_{Cy} = 0.476\ \text{mm}(\downarrow)$

2－13 $\Delta = 1.365$ mm

2－14 (1) $\sigma = 735$ MPa

(2) $\Delta = 83.7$ mm

(3) $F = 96.4$ N

2－15 $\Delta l = \dfrac{4Fl}{\pi E d_1 d_2}$

2－16 $V_\varepsilon = 0.257$ N·m

2－17 $V_{\varepsilon 1} = 3V_{\varepsilon 2}$

2－18 $\sigma = 111.4$ MPa

2－19 $\sigma_{AB} = 74$ MPa

2－20 $\sigma = 125$ MPa

2－21 杆 AB：2⌊100×10；杆 AD：2⌊80×6

2－22 杆 AC：2⌊80×7；杆 CD：2⌊75×6

2－23 杆 AB：2⌊90×56×5；杆 CD：2⌊40×25×3；

杆 EF：2⌊70×45×5，杆 GH：2⌊70×45×5

$\Delta_A = 2.7$ mm，$\Delta_D = 1.55$ mm，$\Delta_C = 2.46$ mm

2－24 $A_1 = 0.576\ \text{m}^2$，$A_2 = 0.665\ \text{m}^2$，$\Delta_A = 2.24$ mm

2－25 (1) $\sigma_{AC} = 136$ MPa，$\sigma_{BD} = 131$ MPa，

$\Delta l_{AC} = 1.62$ mm，$\Delta l_{BD} = 1.56$ mm

2－26 $d \geqslant 35.6$ mm，$\Delta l = 17.7$ mm

2－27 (1) $\theta = 54°44'$

(2) $A_{AB}/A_{BC} = \sqrt{3}$

2－28 (1) $\sigma = \dfrac{pr}{\delta}$

(2) $\Delta_r = \dfrac{pr^2}{E\delta}$

第 三 章

3－1 最大正扭矩 $T = 0.860$ kN·m

最大负扭矩 $T = 2.006$ kN·m

3－2 $m = 0.0135$ kN·m/m

3－3 $P = 18.47$ kW

3－4 (1) $\tau_{max} = 46.6$ MPa；(2) $P = 71.8$ kW

3－5 (1) $\tau_{max} = 71.4$ MPa，$\varphi = 1.02°$

(2) $\tau_A = \tau_B = 71.4$ MPa，$\tau_C = 35.7$MPa

(3) $\gamma_C = 0.446 \times 10^{-3}$

3－6 (1) $\tau_{max} = 69.8$ MPa；

(2) $\varphi_{DA} = 3°$

3-7 $\tau_{max}=19.25$ MPa

3-8 (1) $t=0.009\,73$ kN·m/m; (2) $\tau_{max}=17.75$ MPa

(3) $\varphi=8.5°$

3-9 (1) $d\geqslant 21.7$ mm; (2) $W=1.12$ kN

3-10 $\nu=0.28$

3-11 $E=216$ GPa, $G=81.8$ GPa, $\nu=0.32$

3-12 重量比 = 0.51,刚度比 = 1.19

3-13 $\varphi=\dfrac{32M_e}{3\pi G}\left[\dfrac{d_2^2+d_1d_2+d_1^2}{d_1^3d_2^3}\right]$

3-14 $d\geqslant 111.3$ mm

3-15 $d\geqslant 74.4$ mm

3-16 AE 段:$\tau_{max}=43.8$ MPa, $\varphi'=0.44(°)/\mathrm{m}$

BC 段:$\tau_{max}=71.3$ MPa, $\varphi'=1.02(°)/\mathrm{m}$

3-17 $d\geqslant 87.5$ mm

3-18 $G=\dfrac{8M_e}{\pi d^3\epsilon}$

3-19 $\tau_{max}=65.7$ MPa, $V_\epsilon=0.492$ kN·m

3-20 $V_\epsilon=\dfrac{t^2l^3}{6GI_p}$

3-21 (1) $\tau_{max}=32.8$ MPa$\left(根据\ \tau_{max}=K\dfrac{16FR}{\pi d^3},\ K=\dfrac{4c+2}{4c-3}\right)$

(2) $n=6.5$ 圈

3-22 (1) $[F]=981$ N

(2) 提示:簧丝任一截面的半径 R 与极角 α 的关系为 $R=R_1+\dfrac{(R_2-R_1)\alpha}{2\pi n}$

3-23 (1) $\tau_{max}=40.1$ MPa; (2) $\tau'_{max}=34.4$ MPa;

(3) $\varphi'=0.565(°)/\mathrm{m}$

3-24 $\tau_{max}=25$ MPa, $\varphi'=3.12(°)/\mathrm{m}$(求 φ' 用的 I_t 根据修正因数 $\eta=1.15$ 计算)

3-25 闭口截面杆 $M_e=10.35$ kN·m,开口截面杆 $M_e=0.142$ kN·m

3-26 (1) 最大切应力比 $=\dfrac{3a}{2\delta}$; (2) 扭转角比 $=\dfrac{3a^2}{4\delta^2}$

第 四 章

习题号	F_{S1}	M_1	F_{S2}	M_2	F_{S3}	M_3
4-1(a)	0	2 kN·m	-5 kN	-12 kN·m		
(b)	2 kN	6 kN·m	-3 kN	6 kN·m	0	$-M_e$
(c)	4 kN	4 kN·m	4 kN	-6 kN·m		
(d)	-1.67 kN	5 kN·m				

续表

<table>
<tr><th>习题号</th><th>F_{S1}</th><th>M_1</th><th>F_{S2}</th><th>M_2</th><th>F_{S3}</th><th>M_3</th></tr>
<tr><td>4-1(e)</td><td>$-\frac{M_e}{4a}$</td><td>$-\frac{1}{4}M_e$</td><td>$-\frac{M_e}{4a}$</td><td>$-M_e$</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">$-M_e$</td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>12.5 kN</td><td>−15.25 kN·m</td><td>−11.81 kN</td><td>−15.25 kN·m</td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>30 kN</td><td>−45 kN·m</td><td>0</td><td>−40 kN·m</td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>$\frac{3}{4}q_0 a$</td><td>$\frac{11}{12}q_0 a^2$</td><td>0</td><td>$\frac{4}{3}q_0 a^2$</td></tr>
</table>

习题号	最大正剪力	最大负剪力	最大正弯矩	最大负弯矩
4-2(a)		$\frac{1}{2}q_0 l$		$\frac{1}{6}q_0 l^2$
(b)	45 kN			127.5 kN·m
(c)	49.5 kN	49.5 kN	174 kN·m	
(d)	0.6 kN	1.4 kN	2.4 kN·m	1.6 kN·m
(e)		22 kN	6 kN·m	20 kN·m
(f)	qa	$\frac{1}{8}qa$		$\frac{1}{2}qa^2$
(g)	$\frac{F}{2}$	F		$\frac{Fl}{2}$
(h)	30 kN	10 kN	15 kN·m	30 kN·m
4-3(a)	5 kN			10 kN·m
(b)	15 kN			25 kN·m
(c)	$\frac{3}{2}qa$	$\frac{3}{2}qa$	$\frac{21}{8}qa^2$	
(d)		$\frac{M_e}{3a}$		$2M_e$
(e)	2 kN	14 kN	4.5 kN·m	20 kN·m
(f)	$\frac{11}{16}F$	$\frac{11}{16}F$	$\frac{5}{16}Fa$	$\frac{3}{8}Fa$
(g)	1.5 kN	0.5 kN	0.563 kN·m	
(h)	280 kN	280 kN	545 kN·m	
(i)	$\frac{2}{3}F$	F	$\frac{1}{3}Fa$	Fa
(j)	$\frac{11}{6}qa$	$\frac{7}{6}qa$	$\frac{49}{72}qa^2$	qa^2
4-4(a)	qa	qa	$\frac{qa^2}{2}$	qa^2
(b)	0	qa	0	qa^2
(c)	$\frac{3}{2}ql$	$\frac{ql}{2}$	0	ql^2

续表

习题号	最大正剪力	最大负剪力	最大正弯矩	最大负弯矩
4-6(a)			54 kN·m	
(b)			0.25 kN·m	2 kN·m
4-7(a)		10 kN		
(b)		20 kN		
4-8(a)				$\frac{1}{2}Fl$
(b)				qa^2
(c)				20 kN·m
(d)			30 kN·m	20 kN·m
(e)			10 kN·m	10 kN·m
(f)			$\frac{1}{40}ql^2$	$\frac{1}{50}ql^2$
4-9(a)	11.45 kN	3 kN	1.55 kN·m	3.09 kN·m
(b)	40 kN	40 kN	60 kN·m	
(c)	$\frac{1}{4}q_0 l$	$\frac{1}{4}q_0 l$	$\frac{1}{12}q_0 l^2$	
(d)	50 kN	40 kN	27.8 kN·m	15 kN·m
(e)	$\frac{1}{12}q_0 l$	$\frac{1}{4}q_0 l$	$\frac{1}{16\sqrt[3]{4}}q_0 l^2$	
(f)	$\frac{1}{\pi}q_0 l$	$\frac{1}{\pi}q_0 l$	$\frac{1}{\pi^2}q_0 l^2$	
4-10(a)			$\frac{1}{4}Fl$	
(b)			$\frac{1}{6}Fl$	
(c)			$\frac{3}{20}Fl$	
(d)			$\frac{1}{8}Fl$	
4-11(a)			36 kN·m	
(b)			6 kN·m	6.25 kN·m
(c)				2.25 kN·m

4-12 $\frac{a}{l}=0.207$

4-13 (a) $q_R=62.5$ kN/m

最大正剪力 37.5 kN，最大负剪力 37.5 kN

最大正弯矩 12.81 kN·m

4－14　$q_A=\frac{3F}{4a}$，$q_B=\frac{9F}{4a}$

最大正剪力$\frac{31}{32}F$，最大负剪力$\frac{33}{32}F$，最大正弯矩$\frac{17}{64}Fa$

习题号	最大正剪力	最大负剪力	最大弯矩	最大拉力	最大压力
4－15(a)	20 kN		80 kN·m		10 kN
(b)	15 kN	17.5 kN	26.3 kN·m		17.5 kN
(c)	60 kN	45 kN	18 kN·m	0	60 kN
(d)	70 kN	70 kN	105 kN·m	70 kN	0
(e)	6 kN	0	15 kN·m	6 kN	0
(f)	45 kN	27 kN	101 kN·m	27 kN	27 kN
4－16	10.5 kN	10.5 kN	9.09 kN·m		12.12 N
4－17	$0.433F$	$0.433F$	$0.25Fl$		$0.25F$
4－18(a)	F	F	FR	F	
(b)	F		FR		F
(c)	0	F	FR	F	0

4－19　(1) $x=\frac{l}{2}-\frac{a}{4}$，$M_{max}=\frac{F}{2l}\left(l-\frac{a}{2}\right)^2$

(2) $x=0$，$F_A=2F-\frac{Fa}{l}$

x 坐标原点在梁的左端

4－20　最大剪力 F，最大弯矩 FR，最大扭矩 FR

4－21　$\sigma_{max}=352$ MPa

4－22　$\sigma_{max}=105$ MPa

4－23　$D/d=E/\sigma_{0.2}$

4－25　截面 $m-m$：$\sigma_A=-7.41$ MPa，$\sigma_B=-4.94$ MPa，

$\sigma_C=0$，$\sigma_D=7.41$ MPa

截面 $n-n$：$\sigma_A=9.26$ MPa，$\sigma_B=-6.18$ MPa，

$\sigma_C=0$，$\sigma_D=-9.26$ MPa

4－26　$\sigma_{max}=40.7$ MPa

4－27　强度比 2:1，刚度比 4:1

4－28　(1) $\frac{W_a}{W_b}=\sqrt{2}$

(2) 未切去尖角时 $W=9.43\times10^3\ mm^3$

切去尖角时 $W=9.87\times10^3\ mm^3$

(3) $u=15.71$ mm，W 增加 5.35%

4－29　$\delta=0.011d$

4－30　$F=47.4$ kN

4－31 $[F]=29\text{ kN}$

4－32 $\Delta l=\dfrac{ql^3}{2bh^2E}$

4－33 $\Delta l=0.25\text{ mm}$

4－34 (2) $F'_S=\dfrac{3}{4}\dfrac{ql^2}{h}$

4－35 $\tau=\dfrac{F_S}{\pi r_0\delta}(1-\cos\theta)$

4－36 $\sigma_{max}=153.8\text{ MPa}$

4－37 $M_{max}=140.2\text{ kN}\cdot\text{m}$，选 I25a

4－38 $b\geqslant61.5\text{ mm}$，$h\geqslant184.5\text{ mm}$

4－39 $\dfrac{h}{b}=\sqrt{2}$，$d_{min}=227\text{ mm}$

4－40 $d_{max}=115\text{ mm}$

4－41 $\delta\geqslant27\text{ mm}$

4－42 $n=3.71$

4－43 (1) $x=1.74\text{ m}$；(2) $b\geqslant76.9\text{ mm}$，$h\geqslant154\text{ mm}$

4－44 $a=1.385\text{ m}$

4－45 $a=2.12\text{ m}$，$q=25\text{ kN/m}$

4－46 $\tau_{max}=0.521\text{ MPa}$

4－47 $|F|\leqslant3.94\text{ kN}$，$\sigma_{max}=9.47\text{ MPa}$

4－48 $\sigma_{max}=7.05\text{ MPa}$，$\tau_{max}=0.478\text{ MPa}$

4－49 $\sigma_{max}=9.67\text{ MPa}$，顺纹，$\tau_{max}=0.72\text{ MPa}$，
$\tau_a=0.34\text{ MPa}$，$\tau_b=0.32\text{ MPa}$

4－50 $\sigma_{max}=159.8\text{ MPa}$，$\tau_{max}=74.5\text{ MPa}$

4－51 选 I28a

4－52 $h\geqslant208\text{ mm}$，$b\geqslant138.7\text{ mm}$

4－53 选 I20a

第五章

5－2 $\theta_A=\dfrac{7q_0l^3}{360EI}$，$\theta_B=-\dfrac{q_0l^3}{45EI}$，$w_{max}=0.006\,52\dfrac{q_0l^4}{EI}$

5－3 $\theta_A=\dfrac{qa^3}{6EI}$，$\theta_B=0$，$w_D=\dfrac{1}{12}\dfrac{qa^4}{EI}$，$w_C=\dfrac{qa^4}{8EI}$

5－4 $\theta_B=-\dfrac{ql^3}{24EI}$，$w_A=\dfrac{ql^4}{24EI}$

5－5 $w_C=-\dfrac{3}{8}\dfrac{Fa^3}{EI}$

5－6 $w_B=\dfrac{2}{9}\dfrac{Fl^3}{EI}$

5－7　$\theta_A=-\frac{qa^3}{48EI}$，$w_C=\frac{13qa^4}{48EI}$

5－8　$\theta_A=-\theta_B=\frac{5q_0l^3}{192EI}$，$w_{max}=\frac{q_0l^4}{120EI}$

5－9　$M_B=2M_A$

5－10　$w_A=\frac{3Fl^3}{16EI}$

5－11　$w_C=\frac{11Fl^3}{64Ebh^3}$

5－12　$w_B=11.5$ mm，$w_D=-5.75$ mm

5－18　(a) $w_C=\frac{135qa^4}{24EI}$；(b) $w_C=\frac{M_Aa^2}{3EI}$

5－19　$\delta_{Cy}=\frac{4Fa^3}{3EI}+\frac{Fa}{EA}$，$\delta_{Cx}=\frac{Fa^3}{2EI}$

5－20　$\delta_{AD}=\frac{5Fl^3}{3EI}$

5－24　$\theta_A=\frac{1}{EI}\left(-\frac{M_Al}{3}+\frac{M_Bl}{6}\right)$

5－25　$d=158$ mm

5－26　$\Delta l=2.28$ mm，$\Delta=7.39$ mm

第　六　章

6－1　最大拉力 $F_N=\frac{7}{4}F$，最大压力 $F_N=\frac{5}{4}F$

6－2　$F_{N1}=8.46$ kN，$F_{N2}=2.68$ kN，$F_{N3}=-11.54$ kN

6－3　$F_{N1}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{e}{\sqrt{2}a}\right)F$，$F_{N2}=-\frac{1}{4}F$，

$F_{N3}=-\left(\frac{1}{4}+\frac{e}{\sqrt{2}a}\right)F$，$F_{N4}=-\frac{1}{4}F$

6－4　$F_{N\,CD}=30$ kN，$\sigma_{CD}=30$ MPa

$F_{N\,EF}=60$ kN，$\sigma_{EF}=60$ MPa

6－5　$\sigma_{CE}=96$ MPa，$\sigma_{BD}=161$ MPa

6－6　$[F]\leqslant 2.5[\sigma]A$

6－7　$[F]=742.6$ kN

6－8　杆 1 应力 $\sigma_1=16.2$ MPa，杆 2 应力 $\sigma_2=45.9$ MPa

6－9　最大拉伸内力 $F_N=85$ kN，最大压缩内力 $F_N=-15$ kN

6－10　$\sigma_{AC}=100.8$ MPa，$\sigma_{CD}=50.4$ MPa

6－11　$M_A=\frac{32}{33}M_e$，$M_B=\frac{1}{33}M_e$

6－12　截面 C 左侧 $\tau_{max}=59.8$ MPa，右侧 $\tau_{max}=29.9$ MPa

$\varphi_{AC}=\varphi_{BC}=0.714^{\circ}$

6－13 $T_A=T_B=\dfrac{G\beta I_{pA}I_{pB}}{l_AI_{pB}+l_BI_{pA}}$

6－14 $\tau_{max}=30.6\ \text{MPa}$

6－15 (a) $F_B=\dfrac{14}{27}F$；(b) $F_B=-\dfrac{3}{2}\dfrac{M_e}{2a}(\downarrow)$；

(c) $M_A=\dfrac{ql^2}{12}(\searrow)$

6－16 梁 CD 受力 $F_1=\dfrac{135}{167}F$

6－17 $F_C=\dfrac{5}{4}F$，w_B 减小 39%，M_{max}减小 50%

6－18 $F_{S,max}=\dfrac{11ql}{32}$，$M_{max}=\dfrac{121ql^2}{2\,048}$

$\sigma_{max}=\dfrac{6Etr}{l^2}$

6－20 $\Delta=\dfrac{7}{72}\dfrac{ql^4}{EI}$

6－21 $F_A=\dfrac{6EI\theta}{l^2}(\uparrow)$，$M_A=4\dfrac{EI\theta}{l}(\searrow)$

6－22 $F_B=-\dfrac{3\alpha_l(t_2-t_1)EI}{2hl}(\downarrow)$

第 七 章

7－1 (a) $\sigma_A=-\dfrac{4F}{\pi d^2}$；(b) $\tau_A=79.6\ \text{MPa}$；

(c) $\tau_A=0.42\ \text{MPa}$，$\sigma_B=2.1\ \text{MPa}$，$\tau_B=0.31\ \text{MPa}$；

(d) $\sigma_A=50\ \text{MPa}$，$\tau_A=50\ \text{MPa}$

7－2 $F=60\ \text{kN}$

7－3 $\alpha=60°$

7－4 $\alpha=26.6°$，$F=17.5\ \text{kN}$

7－6 $\sigma_\alpha=-0.162\,5\ \text{MPa}$，$\tau_\alpha=-0.065\ \text{MPa}$

7－7 $\sigma_1=10.66\ \text{MPa}$，$\sigma_3=-0.06\ \text{MPa}$，$\alpha=4.73°$

7－8 (a) $\sigma_\alpha=25\ \text{MPa}$，$\tau_\alpha=26\ \text{MPa}$，$\sigma_1=20\ \text{MPa}$，$\sigma_3=-40\ \text{MPa}$；

(b) $\sigma_\alpha=-26\ \text{MPa}$，$\tau_\alpha=15\ \text{MPa}$，$\sigma_1=-\sigma_3=30\ \text{MPa}$；

(c) $\sigma_\alpha=-50\ \text{MPa}$，$\tau_\alpha=0$，$\sigma_2=\sigma_3=-50\ \text{MPa}$；

(d) $\sigma_\alpha=40\ \text{MPa}$，$\tau_\alpha=10\ \text{MPa}$，$\sigma_1=41\ \text{MPa}$，

$\sigma_3=-61\ \text{MPa}$，$\alpha_0=39.35°$

7－9 (a) $\sigma_1=160\ \text{MPa}$，$\sigma_3=-30\ \text{MPa}$，$\alpha_0=-23.5°$；

(b) $\sigma_1=36\ \text{MPa}$，$\sigma_3=-176\ \text{MPa}$，$\alpha_0=65.6°$；

(c) $\sigma_2=-16.25\ \text{MPa}$，$\sigma_3=-53.75\ \text{MPa}$，$\alpha_0=16.1°$；

(d) $\sigma_1=170$ MPa，$\sigma_2=70$ MPa，$\alpha_0=-71.6^\circ$；

7－10 $\sigma_1=141$ MPa，$\sigma_2=31$ MPa，$\sigma_3=0$，$\alpha_0=29.5^\circ$；$\alpha=75^\circ$

7－12 a 点：$\sigma_1=212$ MPa。b 点：$\sigma_1=210$ MPa，$\sigma_3=-17$ MPa

c 点：$\sigma_1=-\sigma_3=85$ MPa

7－13 长轴：300.109 mm，短轴：299.979 mm

7－14 $\sigma_{max}=80$ MPa，$\tau_{max}=120$ MPa

7－15 (a) $\sigma_1=94.7$ MPa，$\sigma_2=50$ MPa，$\sigma_3=5.3$ MPa，$\tau_{max}=44.7$ MPa；

(b) $\sigma_1=50$ MPa，$\sigma_2=20$ MPa，$\sigma_3=-80$ MPa，$\tau_{max}=65$ MPa；

(c) $\sigma_1=50$ MPa，$\sigma_2=-50$ MPa，$\sigma_3=-80$ MPa，$\tau_{max}=65$ MPa

7－17 $\Delta h=1.46\times10^{-3}$ mm

7－18 纵向（力 F 方向）：$\sigma_y=-35$ MPa，横向：$\sigma_x=\sigma_z=-15$ MPa

7－19 $\nu=0.27$

7－20 $M_e=10.89$ kN·m

7－21 $M_e=\dfrac{2Elbh}{3(1+\nu)}\varepsilon_{45^\circ}$

7－22 $\Delta V=6.54\times10^{-10}$ m^3

7－23 $v_d=12.99$ kN·m/m^3

7－24 $\sigma_{r1}=24.3$ MPa，$\sigma_{r2}=26.6$ MPa

7－25 集中荷载作用截面上点 a 处 $\sigma_{r4}=176$ MPa

7－26 $\sigma_{r3}=250$ MPa，$\sigma_{r4}=229$ MPa

7－27 $\sigma_{r3}=183$ MPa

7－28 $\sigma_{rM}=58$ MPa

7－29 $\sigma_{r2}=29.8$ MPa

7－30 $\sigma_{rM}=29.8$ MPa

7－31 $F=2$ kN，$M_e=2$ kN·m，$\sigma_{r4}=26.9$ MPa

7－32 $\tau_{max}=131$ MPa，$v_d=124$ kN·m/m^3

第 八 章

8－1 $\sigma_{max}=79.1$ MPa

8－2 $\sigma_{max}=12$ MPa，$\dfrac{w_{max}}{l}=\dfrac{1}{200}$

8－3 $\theta=63^\circ13'$，$[F]=12.15$ kN

8－4 最大压应力 5.29 MPa，最大拉应力 5.09 MPa

8－5 最大正应力 94.9 MPa（压）

8－6 (1) 最大压应力 0.72 MPa；(2) $D=4.16$ m

8－7 $b=86$ mm

8－8 $\sigma_{max}=0.572\dfrac{F}{a^2}$

8-9 (1) 最大拉应力 0.159 MPa,最大压应力 0.217 MPa;
(2) $h=0.64$ m

8-10 $r=5.25\times10^{-3}$ m

8-11 $[F]=140.5$ kN

8-12 $\sigma_A=-0.193$ MPa, $\sigma_B=-0.0114$ MPa

8-13 核心边界为一八边形,其中有四个顶点在与截面各边平行的两对称轴上,相对的两顶点间距离为 12.9×10^{-2} m

8-14 (a) 核心边界为一正方形,其对角顶点在两对称轴上,相对两顶点间距离为 36.4 mm;
(b) 核心边界为一平行四边形,四个顶点均在两对称轴上,两顶点间的距离是一个为 4.16 mm,另一个为 8.34 mm;
(c) 核心边界为一扇形

8-15 $\sigma_1=33.5$ MPa, $\sigma_3=-9.95$ MPa, $\tau_{max}=21.7$ MPa

8-16 $\delta=2.65\times10^{-3}$ m

8-17 $P=0.59$ kN

8-18 $d=35.7$ mm

8-20 杆的顶端横截面上:剪力 $F_S=\dfrac{M_e a}{a^2+\dfrac{2}{3}\dfrac{G}{E}l^2}$,

扭矩 $T=\dfrac{M_e}{2+3\left(\dfrac{a}{l}\right)^2\dfrac{E}{G}}$, 弯矩 $M=\dfrac{M_e}{2\left(\dfrac{a}{l}\right)+\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{l}{a}\right)\dfrac{G}{E}}$

8-21 $\tau=66.3$ MPa, $\sigma_{bs}=102$ MPa

8-22 $\tau=30.3$ MPa, $\sigma_{bs}=44$ MPa

8-23 $\delta=80$ mm

8-24 $d=14$ mm

8-25 $\tau=52.6$ MPa, $\sigma_{bs}=90.9$ MPa, $\sigma=166.7$ MPa

8-26 $d_1=19.1$ mm

8-27 $\tau=104$ MPa

8-28 $s=213.1$ mm

8-29 $l=200$ mm, $a=20$ mm

8-30 $\delta=60$ mm, $l=120$ mm

第 九 章

9-1 均相同。

9-2 图 e 所示杆 F_{cr} 最小,图 f 所示杆 F_{cr} 最大(根据 μl 值的比较)

9-3 图 a 所示柱的 F_{cr} 小于图 b 所示柱的;图 a 所示柱的 μ 即大于 2

9-5 $\Delta t=29.2$ ℃

9-6 面外失稳时 F_{cr} 最小, $F_{cr}=\dfrac{\pi^3 Ed^4}{128l^2}$

9－7 $F_{cr}=36.1\dfrac{EI}{l^2}$

9－8 $\theta=\arctan(\cot^2\beta)$

9－9 $[F]=302.4$ kN

9－10 (1) $\lambda=92.5$; (2) $\lambda=65.8$; (3) $\lambda=73.6$

9－11 $\lambda=80.8$, $\varphi=0.393$, $[F]=88.4$ kN

9－12 $\sigma=0.58$ MPa $<\varphi[\sigma]=0.6$ MPa

9－13 $a=0.191$ m

9－14 $[F]=556.9$ kN

9－15 $[F]=376$ kN

9－16 $d=193.7$ mm

9－17 $[F]=15.5$ kN

9－18 $F_N\approx120$ kN, $\lambda_{CD}=103$, $\varphi[\sigma]=91.1$ MPa

附　录　I

I－1 (a) $S_x=24\times10^3$ mm^3; (b) $S_x=42.25\times10^3$ mm^3;
(c) $S_x=280\times10^3$ mm^3; (d) $S_x=520\times10^3$ mm^3

I－2 $S_x=\dfrac{2}{3}r^3$, $\bar{y}=\dfrac{4r}{3\pi}$

I－3 (a) 距上边 $\bar{y}=46.4$ mm;
(b) 距下边 $\bar{y}=23$ mm,距左边 $\bar{x}=53$ mm;
(c) 距下边 $\bar{y}=76$ mm,自槽钢腹板右边缘向左 6 mm

I－4 $I_x=I_y=\dfrac{\pi R^4}{16}$, $I_{xy}=\dfrac{R^4}{8}$

I－5 $I_x=5.32\times10^7$ mm^4

I－6 $I_x=\dfrac{a^4}{12}$

I－7 (a) $I_x=5.37\times10^7$ mm^4; (b) $I_x=9.05\times10^7$ mm^4

I－8 $I_x=\dfrac{bh^3}{4}$

I－9 $I_x=3.3$ m^4

I－10 $I_x=\dfrac{11}{64}\pi d^4$

I－11 (a) $I_x=6.58\times10^7$ mm^4; (b) $I_x=1.22\times10^9$ mm^4

I－12 $I_x=3.63\times10^7$ mm^4

I－13 (a) $I_x=1.337\times10^{10}$ mm^4; (b) $I_x=1.987\times10^8$ mm^4;
(c) $I_x=1.34\times10^{11}$ mm^4; (d) $I_x=2.03\times10^9$ mm^4

I－14 $I_x=188.9a^4$, $I_y=190.4a^4$

I－15 $I_x=13\,069\times10^4$ mm^4, $I_y=13\,090\times10^4$ mm^4

I－16　$a = 111$ mm

I－17　$I_{xy} = 4.98 \times 10^5$ mm^4

I－18　$I_{max} = 1\,819.8 \times 10^4$ mm^4，$I_{min} = 1\,147.8 \times 10^4$ mm^4

I－19　$I_{x_1} = \dfrac{a^4}{12}$，$I_{y_1} = \dfrac{a^4}{12}$，$I_{x_1y_1} = 0$

I－20　(a) $\alpha_0 = 26°25'$，$I_{x_0} = 7.04 \times 10^8$ mm^4，$I_{y_0} = 0.541 \times 10^8$ mm^4；

(b) $\alpha_0 = 4°24'$，$I_{x_0} = 2.31 \times 10^7$ mm^4，$I_{y_0} = 0.237 \times 10^7$ mm^4

索　　引

（按汉语拼音字母顺序）

Synopsis

The first edition of this textbook was published in April of 1979, the second in April of 1987. And the third edition of this book, published in September of 1994, was awarded a lst grade prige of the outstanding textbooks for undergraduate courses in Chinese universities by the Commission of Education of P. R. of China in 1996, and was also selected by some universities in TaiWan and HongKong. For this reason, a science book company had published the third edition in original complex form of Chinese Chracters. Based on the formal textbooks, in the fouth edition the original two parts of the textbook was diveded into two individual books titled "Mechanics of Materials (I)" and "Mechanics of Materials (II)", maintaining the chief features of the earlier editions, such as plentiful content; clear interpretation of the principles; and close relation with engineering practice.

"Mechanics of Materials (I)" gives the chief ingredients and basic concepts of Mechanics of Materials, and can be used as a textbook for students who take a shorter undergraduate course. In "Mechanics of Materials (II)" more advanced knowledge is included to meet with the requirement of people who take more advanced course or have ability to study in - depth.

"Mechanics of Materials (I)" has 9 chapters: introduction and basic concepts; axial loading; torsion; bending stresses; displacements of bending beam; simple statically indeterminate problems; stress state and failure criteria; combined deformation and analysis of connections; and stability of column.

"Mechanics of Materials (II)" includes 7 chapters: further investigation in bending problem; plastic limit analysis; energy methods; further investigation in stability of column; analysis strain and basis for strain-gage measurement; dynamic load and alternative stress; and further studies in mechanical behaviour of materials.

The presented textbooks are written for the undergraduates majoring in civil and hydraulic engineering, but they can also be selected as the reference books for person specialized in other fields.

Contents

郑重声明

责任编辑　黄　毅

封面设计　于文燕

责任绘图　朱　静

版式设计　胡志萍

责任校对　殷　然

责任印制　宋克学

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝材料力学
作者＝
页数＝３８７
ＳＳ号＝０
出版日期＝

封面
书名
版权
前言
目录
正文
封底